Tangram
Revista de Educação Matemática

O FORMALISMO NA REPRESENTAÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS EM UMA ATIVIDADE INTERDISCIPLINAR

THE FORMALISM IN THE REPRESENTATION OF MATHEMATICAL MODELS IN AN INTERDISCIPLINARY ACTIVITY

Claudia de Oliveira Lozada[1]

Wagner Morrone[2]

Mauro Sérgio Teixeira de Araújo[3]

Anneliese de Oliveira Lozada[4]

RESUMO: Neste trabalho propomos uma reflexão sobre a representação dos modelos matemáticos. Para tanto, apresentamos um estudo de caso sobre modelagem matemática aplicada ao Ensino de Física com enfoque interdisciplinar, que aborda o formalismo matemático utilizado nas representações dos modelos matemáticos. Os resultados da pesquisa qualitativa apontam que a maioria dos grupos conseguiu elaborar um modelo matemático, embora, alguns precisem refinar algebricamente a representação do modelo matemático para evitar interpretações e aplicações incorretas do modelo. Para tanto, o professor deverá promover atividades de modelagem matemática com maior frequência para que os alunos se habituem com o uso da linguagem algébrica e consigam escolher adequadamente as variáveis para se estabelecer uma relação coerente do modelo com o fenômeno estudado.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática. Formalismo Matemático. Interdisciplinaridade.

ABSTRACT: In this work we propose a reflection on the representation of mathematical models. For this, we present a case study on mathematical modeling applied to Physics Teaching in an interdisciplinary context, which deals with the mathematical formalism used in the representations of mathematical models. The results of the qualitative research point out that most of the groups have been able to elaborate a mathematical model, although some need to refine algebraically the representation of

[1] Doutora em Educação (USP). Email: cld.lozada@gmail.com
[2] Mestre em Ensino de Ciências e Matemática (UNICSUL). Email: profwagnerfisica@uol.com.br
[3] Doutor em Física (USP). Email: mstaraujo@uol.com.br
[4] Mestra em Ensino e História das Ciências e da Matemática (UFABC). Email: ans.lozada@gmail.com

the mathematical model to avoid interpretations and incorrect applications of the model. In order to do so, the teacher should promote mathematical modeling activities more frequently so that students get used to the use of algebraic language and can choose the variables appropriately to establish a coherent relationship of the model with the phenomenon studied.

KEYWORDS: Mathematical Modeling. Mathematical Formalism. Interdisciplinarity.

INTRODUÇÃO

As práticas docentes interdisciplinares emergem no sentido de atribuir conexões e novos significados aos conteúdos desenvolvidos nas aulas, exigindo planejamento e a mobilização de diversos conhecimentos entre áreas. Como expresso na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 2000, p. 78), a interdisciplinaridade:

> A interdisciplinaridade deve ir além da mera justaposição de disciplinas e, ao mesmo tempo, evitar a diluição delas em generalidades. De fato, será principalmente na possibilidade de relacionar as disciplinas em atividades ou projetos de estudo, pesquisa e ação, que a interdisciplinaridade poderá ser uma prática pedagógica e didática adequada aos objetivos do Ensino Médio (LDB, 2000, p. 78,).

Simultaneamente à busca de atribuição de novos significados aos conteúdos matemáticos, Gonçalves, Santos e Peralta (2014, p. 7) defendem ser preciso que essas práticas permitam organizar o "trabalho pedagógico para o ensino de Matemática visto seu papel articulador entre as diversas disciplinas do currículo", salientando ainda que é importante estabelecer uma construção pedagógica que:

> (...) congregue as diversas disciplinas do currículo a partir das peculiaridades de cada área do conhecimento (método/objeto), visando promover uma aprendizagem efetiva para estudantes, problematizando a realidade, considerando a ressignificação dos saberes escolares, proporcionando uma formação ampla e sem fragmentação do conhecimento, que, em alguma instância, possibilitará transformar a realidade.

A interdisciplinaridade é uma forma de tentar superar a visão fragmentada do conhecimento, mesmo que em princípio se tenha que superar alguns obstáculos apontados por Fazenda (2002), tais como: a) Obstáculos Epistemológicos e Institucionais, sendo necessário eliminar as barreiras entre as disciplinas por meio da quebra da rigidez entre as estruturas institucionais que engessam cada disciplina em sua

gaiola epistemológica; b) Obstáculos Psicossociológicos e Culturais, que envolvem aspectos ligados ao desconhecimento do que é um projeto interdisciplinar, a formação específica dos atores que agem nos contextos interdisciplinares e a acomodação diante de situações estabelecidas formando uma zona de conforto e impedindo que se formem grupos com novas visões; c) Obstáculos Metodológicos, que implicam no questionamento sobre a forma de desenvolvimento dos conteúdos disciplinares e sobre a formação dos alunos, pois uma metodologia interdisciplinar prevê mudanças significativas que impactam nos aspectos citados; d) Obstáculos quanto à Formação, pois no contexto interdisciplinar a relação é dialógica com a finalidade de construir o conhecimento e não de ensino por transmissão, o que nos lembra a educação bancária; e) Obstáculos Materiais, sendo primordial o planejamento em relação aos recursos necessários para a consecução das atividades interdisciplinares.

Nesse sentido, seguindo os preceitos da Lei de Diretrizes e Bases (1996) e os documentos seguintes que tratam da Educação Nacional como os Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio, Orientações Curriculares para o Ensino Médio e a Base Nacional Curricular Comum, é relevante destacar a importância da interdisciplinaridade no contexto da Modelagem Matemática que dialoga com a Química, a Física e a Biologia no Ensino Médio, abrindo amplas possibilidades de interlocuções entre o trabalho dos docentes destas disciplinas e a melhor significação dos conteúdos para os alunos.

É o que Wolff e Serrano (2012) explicitam, por exemplo, no trabalho que publicaram e que consiste em uma revisão bibliográfica sobre a Modelagem Matemática aplicada ao Ensino de Física, na qual se apropriam da modelagem como "estratégia de ensino para a Física". Os autores enumeram trabalhos sobre modelagem aplicada ao Ensino de Física com o uso de computadores – modelagem computacional - e trabalhos nos quais são abordados conteúdos de Física com modelagem usual sem apoio de tecnologias de informação e comunicação, e por vezes com dados experimentais.

Por sua vez, Costa (2009, p. 114) enfatiza a modelagem matemática "para promover uma aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos de limite e continuidade a partir de conceitos científicos" estabelecendo uma relação entre Matemática e Química, por meio do conteúdo "leis de transformação dos gases". Batista e Fusinato (2015, p. 95) relatam uma atividade experimental para a modelagem de

fenômenos físicos que "possibilitou aos alunos a construção do conceito científico que pôde ser verificada por meio da articulação entre a experimentação e a expressão oral/escrita", sendo que os alunos apresentaram maior envolvimento e interesse pelo conteúdo. Maciel (2014, p. 22) afirma que os problemas de Física em sua maioria podem ser modelados matematicamente e que a Matemática é "(...) parte integrante do próprio pensamento científico e do pensar de todo e qualquer pesquisador da natureza".

Também associando o Ensino de Física ao de Matemática por meio da Modelagem Matemática, Campos e Araújo (2015) desenvolveram atividades experimentais em laboratórios didáticos envolvendo alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, empregando diferentes níveis de estruturação em seus roteiros. Os autores constataram que essa proposta permitiu a construção de novos conhecimentos associados aos fenômenos físicos estudados, a ampliação da autonomia de ação e de pensamento dos estudantes e ainda uma gradativa diminuição dos conflitos e dificuldades enfrentados pelos mesmos ao associar os dados experimentais com os conceitos teóricos abordados nas atividades propostas.

Nestes exemplos, podemos verificar as potencialidades das atividades de modelagem em um contexto interdisciplinar, visto que elas contribuem não apenas com a aprendizagem dos conceitos relacionados às diferentes áreas de conhecimento, como também favorecem a atribuição de novos significados aos mesmos, o desenvolvimento de competências e habilidades nos estudantes, com destaque para a capacidade de trabalho em grupo e a utilização e interpretação da linguagem matemática. Estas atividades possibilitam ainda maior autonomia aos estudantes, ampliação de sua capacidade de reflexão e análise, bem como menor manifestação de conflitos e dificuldades dos mesmos aos se depararem com situações em que é necessário fazer associações entre aspectos teóricos e conceituais ao buscarem a solução para os problemas práticos estudados.

Complementarmente, Barbosa (2009, p. 70) defende que a "educação científica também deve abordar os modelos como parte das práticas pedagógicas", enfatizando o uso de modelos matemáticos por estarem presentes em difernetes área de conhecimento e por permitirem que seja estabelecida uma rede de relações entre conceitos e leis em uma teoria, contribuindo desta forma para a interpretação e entendimento de alguns aspectos envolvidos nas situações reais colocadas em estudo. Em seu estudo, Barbosa

(2009, p. 80) apresenta uma classificação de três possibilidades de aplicação dos modelos matemáticos na educação científica, defendendo que o modelo matemático pode ser utilizado: a) para dar sustentação à introdução de um conceito novo, funcionando como uma justificativa; b) sendo empregado como uma definição e, ainda, c) como um elemento estruturante de um fenômeno.

Barquero, Bosch e Gascón (2014, p. 89, tradução nossa) defendem que é preciso superar a ideia de "aplicacionismo" relacionado com a Modelagem Matemática, de modo que esta não seja entendida apenas como uma simples "aplicação de conhecimento matemático previamente construído ou, no seu caso mais extremo, como uma simples 'exemplificação' de ferramentas matemáticas em certos contextos extramatemáticos artificialmente construídos para este fim". Ao abordarem as restrições que afetam a ampliação e consolidação do uso das atividades de Modelagem Matemática em cursos superiores de Matemática destinados às Ciências Experimentais, estes autores chamam a atenção de que é preciso:

> (...) introduzir novos dispositivos didáticos que, no conjunto, permitam modificar os gestos do estudo com a finalidade de transformar a atividade científica escolar. Postulamos que essa mudança na atividade escolar científica provocará, de fato, mudanças na pedagogia escolar e acabará modificando, a longo prazo, os modelos epistemológicos e didáticos dominantes na instituição de ensino considerada (BARQUERO, BOSCH e GASCÓN, 2014, p. 86, tradução nossa).

Assim, é possível notar que a Modelagem Matemática vem se estabelecendo no cenário da Educação Matemática como um importante recurso capaz de orientar as atividades didático-pedagógicas destinadas ao ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos, de modo a favorecer o desenvolvimento da autonomia de ação e de pensamento nos estudantes, ampliando seu potencial de refletir sobre as situações envolvidas nos contextos educacionais propostos. Neste sentido, a Modelagem Matemática torna-se uma aliada no estabelecimento do pensamento crítico dos estudantes, aspecto também defendido pela Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2001). Esta premissa é apoiada por Almeida e Silva (2010) que afirmam que a Educação Matemática Crítica está relacionada com o conhecimento reflexivo como postula Skovsmose, necessário para analisar os impactos sociais que os modelos matemáticos provocam criando uma consciência metacognitiva do papel da Matemática na sociedade. Lawson e Marion (2008) inclusive colocam que dentre os

objetivos da Modelagem Matemática está a tomada de decisão, incluindo decisões táticas por gestores e as decisões estratégicas por planejadores, que certamente impactam em diversos setores da sociedade, como a Economia. Portanto, o alcance da aplicação dos modelos matemáticos é amplo, sendo pertinente uma postura crítico-reflexiva a respeito.

Por sua vez, apresentando definições diversas, a Modelagem Matemática tem se consolidado como um ambiente de aprendizagem (BARBOSA, 2001) extremamente rico, de onde situações reais desencadeiam a elaboração de modelos matemáticos e servem de pano de fundo para o ensino de conteúdos da Matemática e de outras áreas de conhecimento. E desta forma, procura-se "entender e explicar fatos e fenômenos, logo, buscar por interpretações de fenômenos naturais, sociais, ou matemáticos" (BARBOSA, 2012, p. 16-17) onde são mobilizados, produzidos e/ou integrados conhecimentos matemáticos e não matemáticos (ALMEIDA, ARAÚJO e BISOGNIN, 2011).

Embora os modelos matemáticos possam expressar de algum modo uma aproximação da realidade, os mesmos podem apresentar diversas representações, como esclarece Biembengut (2014, p. 201):

> Modelo é um conjunto de símbolos os quais interagem entre si representando alguma coisa. Esse conjunto de representação pode se dar por meio de desenho ou imagem, projeto, esquema, gráfico, lei matemática, dentre outras formas.

A representação de um modelo matemático seja por meio de um gráfico ou lei matemática exige em algum nível o uso de um formalismo capaz de denotar as variáveis envolvidas na situação-problema analisada. No caso da representação algébrica, a conversão dos registros semióticos (DUVAL, 2003) é fundamental para a construção assertiva do modelo matemático. Deste modo, propusemos a seguinte questão de investigação: Quais as formas de representação os alunos podem elaborar em uma situação-problema com enfoque interdisciplinar?

Deste modo, este trabalho abordará por meio de um relato de experiência, o formalismo matemático que implica em uma representação algébrica dos modelos matemáticos de fenômenos físicos, como veremos adiante.

A REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DOS MODELOS MATEMÁTICOS

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) colocam que a Matemática exerce um importante papel na construção do conhecimento físico e que a forma com que se ensina a Física dificulta a associação entre a Matemática e o conhecimento físico:

> Na prática, é comum a resolução de problemas utilizando expressões matemáticas dos princípios físicos, sem argumentos que as relacionem aos fenômenos físicos e ao modelo utilizado. Isso se deve em parte ao fato já mencionado de que esses problemas são de tal modo idealizados que podem ser resolvidos com a mera aplicação de fórmulas, bastando ao aluno saber qual expressão usar e substituir os dados presentes no enunciado do problema. Essas práticas não asseguram a competência investigativa, visto que não promovem a reflexão e a construção do conhecimento. Ou seja, dessa forma ensina-se mal e aprende-se pior. (BRASIL, 2006, p.54).

Os modelos matemáticos são estigmatizados em "fórmulas" como se fossem a solução mágica para as situações-problema propostas em Física. Quando os alunos são desafiados a elaborar o modelo matemático relativo ao fenômeno físico, muitos desistem e alegam que "está muito difícil", "vamos aguardar a correção". Por outro lado, em situações-problema que envolvem resoluções puramente algébricas, com modelos matemáticos algébricos e respostas algébricas, os alunos também encontram dificuldades em lidar com a linguagem algébrica, sem ter que manipular números com os quais estão habituados.

A utilização de modelos matemáticos em Ensino de Física é postulada pelas Orientações Curriculares, como podemos verificar adiante:

> Assim, propomos que o ensino de Física seja pensado a partir do processo: situação – problema – modelo, entendendo-se "situação" nesse caso como a referência de uma ideia física. Essa é uma característica da Física: fazer modelos da realidade para entendê-la; obter meios para encarar um problema. (BRASIL, 2006, p. 53)

Mas, essa abordagem deve ser pautada pela contextualização e interdisciplinaridade, como salientam as Orientações Curriculares, para o que o ensino não fique estanque, isolado e fragmentado. Por este motivo as Orientações Curriculares recomendam uma abordagem investigativa para o ensino de Física para que o aluno desenvolva a competência crítico-reflexiva:

> (...) capacitando o aluno a responder a perguntas e a procurar as informações necessárias, para utilizá-las nos contextos em que forem solicitadas. Na

> escola, uma das características mais importantes do processo de aprendizagem é a atitude reflexiva e autocrítica diante dos possíveis erros. Essa forma de ensino auxilia na formação das estruturas de raciocínio, necessárias para uma aprendizagem efetiva, que permita ao aluno gerenciar os conhecimentos adquiridos. (BRASIL, 2006, p. 45-46).

Na parte que se refere à Matemática, as Orientações Curriculares abordam o uso de modelos no desenvolvimento do conteúdo de funções, apontando que devam ser abordados em áreas do conhecimento diversas. O mesmo documento ressalta a importância de se trabalhar com a Modelagem Matemática em sala de aula como uma estratégia de ensino na qual o aluno tem que mobilizar uma gama de competências para resolver a situação-problema:

> **A modelagem matemática, percebida como estratégia de ensino, apresenta fortes conexões com a ideia de resolução de problemas** apresentada anteriormente. Ante uma situação-problema ligada ao "mundo real", com sua inerente complexidade, o aluno precisa mobilizar um leque variado de competências: **selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir;** problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado, o que, muitas vezes, requer um trabalho de simplificação quando o modelo originalmente pensado é matematicamente muito complexo; validar, isto é, confrontar as conclusões teóricas com os dados empíricos existentes; e eventualmente ainda, quando surge a necessidade, modificar o modelo para que esse melhor corresponda à situação real, aqui se revelando o aspecto dinâmico da construção do conhecimento. (BRASIL, 2006, p. 84-85, grifo nosso).

O documento cita ainda a modelação geométrica com a utilização de softwares que devem "oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica, geométrica" (BRASIL, 2006, p. 88). Isto decorre certamente das várias representações que um modelo matemático pode assumir, e neste trabalho em particular iremos abordar o modelo matemático descrito algebricamente por meio de uma lei matemática para expressar um fenômeno físico. Preliminarmente destacamos o trabalho de Souza e Santo (2010) sobre os modelos matemáticos e os registros de representação semiótica em Ensino de Física, com base nas ideias de Duval. Para a elaboração dos modelos matemáticos, os principais registros semióticos de representação dos objetos são aqueles específicos da Matemática, como registro de representação algébrica comumente usada nos modelos matemáticos, o registro tabular, o registro geométrico e o registro gráfico. Estes registros devem estar correlacionados à

compreensão dos conceitos envolvidos na situação-problema e não simplesmente representar símbolos sem aparente significado.

Na elaboração dos modelos matemáticos a estrutura cognitiva dos alunos pode transitar entre representações internas e as representações semióticas, passando quando for o caso, pelas representações computacionais. Na conversão dos registros semióticos, os alunos podem encontrar dificuldades, sobretudo, na passagem para a linguagem algébrica, que exige maior abstração e na correlação entre a variável e seu real significado, uma vez que o formalismo equivocado pode gerar problemas na interpretação e utilização dos modelos.

UM ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

No primeiro semestre de 2017, procedemos a uma experiência qualitativa, por meio de um estudo de caso com três turmas de 3ª série do Ensino Médio, em uma escola particular do bairro de Itaquera localizada no município de São Paulo. Participaram desta atividade 59 alunos, distribuídos em 15 grupos sendo que foram formados 2 grupos com cinco componentes, 10 grupos com quatro componentes, 3 grupos com três componentes.

O objetivo era a integração de conceitos físicos e matemáticos por meio da leitura e interpretação de um texto, contribuindo para a interdisciplinaridade, de modo que os alunos conseguissem estabelecer relações entre os conteúdos desenvolvidos em Matemática e Física. Ao final da atividade, os grupos foram questionados acerca da interpretação do texto sobre os aspectos relacionados aos conceitos matemáticos (operações fundamentais) e físicos (temperaturas máximas e mínimas) em duas questões específicas relacionadas ao texto. O texto abordava as medidas de temperatura pelas diversas escalas termométricas propostas no decorrer dos séculos, com destaque para as escalas de Celsius, Fahrenheit, Kelvin, Réaumur, Newton e Rankine. A interdisciplinaridade foi estabelecida por meio das disciplinas Física, Matemática e História.

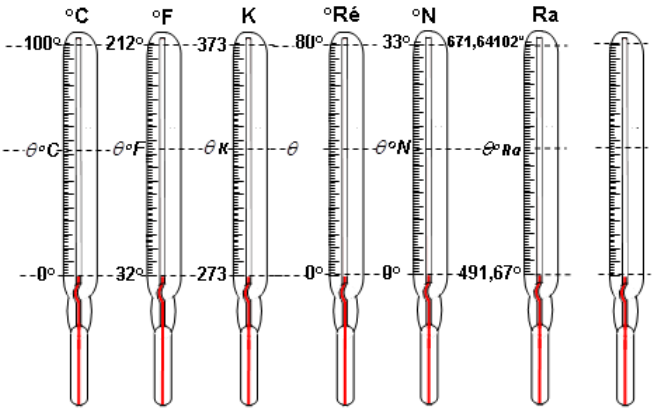

Fig. 1 – A relação entre as escalas termométricas

Após a leitura do texto, como dito anteriormente, foram propostas duas questões: *1 - Um jovem brasileiro aferiu sua temperatura em Cambridge, Massachusetts, Estados Unidos e constatou a medida de 97,7º , apavorado deslocou-se para o hospital da Universidade de Harvard. Que diagnóstico recebeu e qual a sua temperatura no Sistema Internacional? 2 - Desta forma, determine algebricamente o modelo matemático que permita transferir a temperatura de uma escala termométrica para outra qualquer.*

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Em relação à questão 1, todos os grupos acertaram, pois a resposta encontrava-se explícita no texto: "Temperatura normal igual a 36,5 ºC equivalente a 309,5 K no SI", embora todos utilizaram o formalismo apresentado no texto fornecido aos grupos, passando os 97,7º que pelo contexto dava a entender ser graus ***Fahrenheit*** **para graus** *Celsius*, por isso chegaram aos 36,5 ºC, concluindo ser uma temperatura normal para o corpo humano e a posterior passaram também, utilizando o formalismo apresentado para a Escala *Kelvin.*

Em relação à questão 2, após 90 minutos de ampla discursão, exceto dois grupos não atingiram o objetivo de formular um modelo matemático para transferir a temperatura de uma escala termométrica para outra qualquer.

Os demais grupos, utilizando a linguagem algébrica selecionaram as letras que representariam as temperaturas máximas e mínimas, apresentando o formalismo algébrico, alguns grupos se apropriaram das variáveis que representam os nomes das

escalas e outros utilizaram outras variáveis para a conversão e representação do registro semiótico. Os grupos tomaram como base os modelos apresentados no texto:

Celsius X Fahrenheit; $\frac{^oC}{5} = \frac{^oF - 32}{9}$ ***e*** *Celsius X Kelvin;* $^oC = K - 273$, e efetuaram a validação dos modelos entre as escalas apresentadas.

Os resultados apresentados pelos grupos com relação à elaboração dos modelos matemáticos foram estes:

- **Grupo 1:** composto por 3 alunos; não conseguiram elaborar um modelo matemático.
- **Grupo 2**: composto por 3 alunos, apresentaram o seguinte formalismo para o modelo matemático: $\frac{t_1 - ti_1}{tf_1 - ti_1} = \frac{t_2 - ti_2}{tf_2 - ti_2}$.

Utilizaram a variável t para representar os parâmetros das escalas diferenciando-as pela em umeração.

Em seguida, o Grupo 2 testou a conversão de uma escala termométrica para outra:

- ***Testando de 20º Ré (Réamur) para*** $\frac{20^0Ré - 0}{80^0Ré - 0} = \frac{^0C - 0}{100^0C - 0}$ ***graus Celsius, chegando a 25º C.***
- ***Dos 25ºC para ºN (Newton),*** $\frac{25^0C - 0}{100^0C - 0} = \frac{^0N - 0}{33^0N - 0}$ ***chegando em 8,25ºN.***
- ***Dos 8,25º para ºN (Newton)e para Ré (Réamur),*** $\frac{8{,}25^0N - 0}{33^0N - 0} = \frac{^0Ré - 0}{80^0Ré - 0}$ ***chegando em 20º Ré.***

- **Grupo 3:** composto por 3 alunos, apresentou o seguinte formalismo matemático para o modelo: $\frac{E_1 - T_{1_{E1}}}{T_{f_{E1}} - T_{i_{E1}}} = \frac{E_2 - T_{2_{E2}}}{T_{f_{E2}} - T_{i_{E2}}}$ ***onde:***

E_1 é a escala 1 escolhida (F,C,N ,etc)

E_2 escala escolhida para a transformação

T_f temperatura máxima da primeira escala e idem para a escala de transformação

T_i temperatura mínima da primeira escala e idem para a escala de transformação

O Grupo 3, não realizou o teste de conversão entre as escalas para validar o modelo.

- Grupo 4: composto por 4 alunos apresentou este modelo: $\frac{W - T_0 W}{\Delta TW} = \frac{K - T_0 K}{t\Delta TK}$

Em seguida, realizaram testes para validação dos modelos entre as escalas termométricas. Percebemos que o grupo utilizou o delta para indicar a variação, portanto, apresentou um representação algébrica diferente dos grupos 1 e 2. Os testes realizados foram estes, nos quais ao substituírem os valores mantiveram a proposta original dos modelos das escalas:

Testando de 30º Celsius para graus Ré (Réamur) $\frac{30^0 C - 0}{100^0 C - 0} = \frac{^0 Ré - 0}{80^0 Ré - 0}$ ***chegando a 24 Ré.***

Dos 20º Ré (Réamur) para K $\frac{24^0 Ré - 0}{80^0 Ré - 0} = \frac{k - 273}{373k - 273k}$ ***(Kelvin), calculando 303 K.***

Dos 303 K (Kelvin) para ºC (Celsius), $\frac{303K - 273K}{373k - 273k} = \frac{^0 C - 0}{100^0 C - 0}$ *apurando 30 ºC*

Assim procederam os demais grupos modelando e testando seus modelos para validá-los, sendo que todos voltaram aos graus da escala inicial.

- Grupo 5: com 4 alunos: formalismo apresentado: $\frac{\Theta t_1 - ti_1}{tf_1 - ti_1} = \frac{\Theta t_2 - ti_2}{tf_2 - ti_2}$, testando de ºRé para ºC, para ºN, para ºC.

Este grupo também utilizou a variável t, mas acompanhada de um caractere.

- Grupo 6: com 4 alunos, formalismo apresentado: $\frac{^o Z - ^o Z \min}{\Delta^o Z} = \frac{^o W - ^o W \min}{\Delta^o W}$, testando de ºRé para ºN, para ºC, para ºRé.

O Grupo 6 utilizou o delta para denotar a variação e a abreviatura do parâmetro "Mínimo" das escalas.

- Grupo 7: com 4 alunos, formalismo apresentado: $\frac{\Theta - \Theta i}{\Theta f - \Theta i} = \frac{T - Ti}{Tf - Ti}$, testando de ºC para ºF, para ºK, para ºC.

O Grupo 7 fez uso do caractere especial e da variável T maiúscula, denotando f para final e i para inicial.

- Grupo 8: com 4 alunos, formalismo apresentado: $\frac{\Theta T_1 - P\min}{\Delta Ampl1} = \frac{\Theta T_2 - P\min 2}{\Delta Ampl2}$, testando de ºC para ºN, para ºRé para ºC.

O Grupo 8 utilizou o delta, o caractere especial e a notação "Mínimo".

- Grupo 9: com 4 alunos; não conseguiram apresentar um modelo.

- Grupo 10: com 4 alunos, formalismo apresentado: $\frac{\Theta T_1 - P\min}{\Delta Ampl1} = \frac{\Theta T_2 - P\min 2}{\Delta Ampl2}$, testando de ºC para ºN, para ºRé para ºC.

O Grupo 10 copiou o modelo do Grupo 8. Provavelmente, apresentaram dificuldades na elaboração e optaram por copiar para apresentar do que não apresentar nada, o que não é positivo porque os alunos devem manifestar as dificuldades para o professor para que ele possa auxiliá-los.

- Grupo 11: com 4 alunos, formalismo apresentado: $\frac{TX - X\min}{X\max - X\min} = \frac{TY - Y\min}{Y\max - Y\min}$, testando de ºC para K, para ºF para ºC.

O Grupo 11 utilizou as variáveis X, Y e T e os parâmetros "Mínimo" e 'Máximo" para formalizar o modelo.

- Grupo 12: com 4 alunos, formalismo apresentado: $\frac{A - Tmenor}{Tmaior - Tmenor} = \frac{B - Tmenor}{Tmaior - Tmenor}$, testando de ºC para ºRé, para ºRa, para K, para ºF, para ºC.

O Grupo 12 utilizou as variáveis A, B e T e os parâmetros "Maior" e 'Menor" para formalizar o modelo.

- Grupo 13: com 4 alunos, formalismo apresentado: $\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y}$, testando de ºC para K, para ºRé, para ºN, para ºRa, para ºC.

O Grupo 13 utilizou as variáveis x, y e o delta, bem típicas da Cinemática.

- Grupo 14: com 5 alunos, formalismo apresentado: $\frac{\Theta t_1 - \Theta_0}{\Delta\Theta} = \frac{\Theta t_2 - \Theta_0}{\Delta\Theta}$, explicaram a operacionalidade do formalismo, mas não apresentaram o teste do modelo, subscrevendo:

Dados dois termômetros quaisquer t_1 e t_2 teremos para t_1

Θt_1 - *Uma temperatura qualquer da escala de t_1*

Θ_0 - *Temperatura mínima da escala de t_1*

$\Delta\Theta$ - *Variação da escala termométrica, temperatura máxima de t_1 menos a temperatura mínima de t_1*

Θt_2 - *Uma temperatura qualquer da escala de t_2*

Θ_0 - *Temperatura mínima da escala de t_2*

$\Delta\Theta$ - *Variação da escala termométrica, temperatura máxima de t_2 menos a temperatura mínima de t_2*

- Grupo 15: com 5 alunos, formalismo apresentado: $\frac{T(final) - T(inicial)}{T(final) - T(inicial)}$, para cada termômetro cujas escalas deve ser transformada, igualando duas a duas e apresentaram:

$$\frac{^oC - 0}{(100-0)^O} = \frac{^oF - 32^O}{(212-32)^O} = \frac{K - 273}{(373-273)} = \frac{^oRé - 0}{(80-0)^O} = \frac{^oN - 0^O}{(33-0)^O} = \frac{^oRa - 491{,}67^O}{(671{,}64102 - 491{,}67)^O} = \frac{^oWa - (-10^O)}{(220-(-10))^O}$$

Sendo Wa um termômetro qualquer com temperatura máxima de 220º e mínima de -10º.

A representação inicial é bem simples denotada pelos parâmetros “Final” e “Inicial” e a variável T, sendo transcritas para as variáveis que representam as escalas para a conversão.

Com base nos resultados obtidos, podemos correlacionar com os apontamentos que Silva e Almeida (2009) fazem em relação à semiótica, sobretudo, com as concepções de Peirce sobre os signos. Aliás, Duval (2003) o signo é o elemento fundamental da representação semiótica, que envolve uma atividade cognitiva que abarca o registro de representação, seu tratamento e sua conversão.

Segundo as autoras, o esquema semiótico de Peirce (2010, p.63) estabelece uma relação triádica do signo que se inicia a partir do objeto, convergindo para o signo (que está no centro e é responsável pela mediação entre objeto e interpretante) e o interpretante (que está na mente do sujeito e substitui a objeto real):

> A relação triádica é genuína, isto é, seus três membros estão por ela ligados de modo tal que não consiste em nenhum complexo de relação diádica. Essa é a razão que o interpretante, ou o terceiro, não se pode colocar em uma mera relação diádica com o objeto, mas sim deve colocar-se em uma relação com ele do mesmo tipo assumida pelo representâmen.

Nesse contexto, Peirce *apud* Silva e Almeida (2009) formula categorias fenomenológicas, que relacionadas com as ideias de Santaella podem ser explicitadas desta maneira: Primeiridade (o que se apresenta à mente, qual objeto real decorrente da situação-problema se apresenta à mente), Secundidade (o que o signo representa, a que se refere ou o que indica, indicando o processo de matematização), e Terceiridade (relacionado ao efeito que o signo pode provocar para o intérprete, sendo o modelo matemático formalizado).

O signo torna-se importante para compreender o objeto matemático e as relações estabelecidas no contexto estudado, uma vez que "traduz" em uma linguagem específica (no caso, a simbólica) as conjecturas e heurísticas que o sujeito constrói mentalmente e que podemos verificar em atividades de modelagem matemática, como esta que apresentamos. Por outro lado, as autoras citadas esclarecem que no processo de modelagem matemática, os alunos utilizam modos de inferência que são a abdução, indução e dedução, sendo a indução a etapa na qual o modelo matemático é construído.

Estes modos de inferência estão inclusos nas etapas dos ciclos de modelagem matemática citado por diversos autores. Os alunos fazem as conversões de um registro para outro, que em modelagem, em geral se traduzem em registro da língua natural para registro algébrico (que é um legi-signo simbólico e marca a terceiridade, onde as regularidades são estabelecidas) e registro gráfico. É importante lembrar, como colocam Costa *et al.* (2015) que em modelagem matemática os registros podem partir de uma natureza multifuncional para um registro de natureza monofuncional, constituindo-se uma atividade complexa que demanda associações, relações e interpretação entre o conteúdo que envolve a situação-problema que será "traduzido" da linguagem natural para a linguagem algébrica, esta de natureza um tanto abstrata para a maioria dos alunos. Neste movimento, o aluno pode representar ou não de modo adequado o registro de chegada, uma vez que pode ter se equivocado com o registro de saída. Deste modo, essa complexidade no movimento de representação pode ser observada pelo apontamento de Peirce (2005, p. 61) que enfatiza que representar é "estar em lugar de,

isto é, estar em uma relação com um outro que, para certos propósitos, é considerado por alguma mente como se fosse esse outro".

No caso da pesquisa qualitativa, o registro algébrico prevaleceu entre as formas de representação sendo um legi-signo simbólico, formalismo manifestado provavelmente pela familiaridade que os alunos já possuíam com outros modelos matemáticos presentes em exercícios e situações-problema propostas nas aulas de Física. Mondini (2008, p. 7-8) coloca que "o formalismo traz para a Matemática um conjunto de regras e símbolos que nos permitem operar mecanicamente" e segue afirmando que "o formalismo estabelece a Matemática como 'a Ciência dos sistemas formais'". Esse formalismo é externado pela linguagem simbólica, composta pelas variáveis que envolvem o modelo matemático. Nos modelos apresentados pelos alunos essas variáveis foram representadas por letras e até caracteres. Ademais, o formalismo constitui uma importante escola da Filosofia da Matemática, sendo concebida por Hilbert com a finalidade de eliminar os paradoxos da Matemática, destacando como características principais as deduções e demonstrações rigorosas, de consistência, componentes de um sistema simbólico-formal constituído por uma rede de significados (LOUREIRO e KLUBER, 2015; SILVA, 2007) e manipulado segundo determinadas regras de formação e transformação, que é o que se vê na elaboração de modelos matemáticos, uma vez que as variáveis devem se relacionar entre si de modo a expressar o fenômeno e/ou situação estudada. Essas regras possuem "convenções semânticas que conferem significação aos símbolos" conforme pontua Santos (2008, p. 143). É neste sentido que Dubinsky (2000) explica que o formalismo é composto por símbolos que representam objetos e operações matemáticas que são colocados juntos de acordo com certas regras de sintaxe. Desta forma, como explica o autor, o formalismo matemático serve como uma linguagem para expressar a compreensão de determinada situação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), órgão que apoia e dissemina a Educação Matemática, coloca que as representações são importantes para modelagem e interpretação de fenômenos físicos, sociais e matemáticos. Não é diferente do que se vê nos documentos oficiais brasileiros, mas aprofunda-se em detalhes

importantes no que diz respeito ao formalismo matemático e às representações, que exigem uma linguagem específica, e que colocamos nestas considerações, a fim de que a linguagem algébrica possa ser trabalhada com maior atenção pelos professores dado o teor abstrato que traz e as possíveis falhas na conversão dos registros semióticos. As representações matemáticas e as ideias que elas incorporam fornecem um conjunto de ferramentas significativas para que os alunos expandam a sua capacidade de pensar matematicamente. O termo representação envolve processo e produto, processo porque envolve o ato de capturar um conceito matemático e/ou físico e relacioná-lo com as variáveis que permitam a interpretação e mensuração de uma determinada situação-problema. Os processos ocorrem internamente na estrutura cognitiva e se externalizam por meio dos registros semióticos que descrevem os modelos e que devem ser testados e validados.

As representações elaboradas pelos alunos precisam ser refinadas e possuir coerência com o fenômeno estudado, expressando uma relação biunívoca interna do sistema algébrico que compõe o modelo matemático, onde as variáveis devem apresentar uma operacionalidade, espelhando sua aplicabilidade, uma vez que os modelos matemáticos vão se tornando complexos com as situações-problemas propostas pelo professor, no sentido, de que os alunos caminhem para conhecimentos avançados que exigem análises mais apuradas. Husserl (2012) nos lembra que símbolo com conteúdo tem um papel representacional dos objetos, e que representar está ligado à capacidade de intuir, por isso ser importante representar adequadamente o modelo matemático. Nesse sentido, é que o NCTM afirma que à medida que o repertório de representação dos alunos se expande, é necessário que os alunos reflitam sobre o uso deles e compreendam seus aspectos fortes e fracos, uma vez que os modelos matemáticos podem ser aperfeiçoados. Também é importante que os alunos aprendam diferentes formas de representação, dada a pluralidade de linguagens e símbolos presentes no cotidiano, decorrentes das interações sociais e da cultura, que inevitavelmente são trazidos para a sala de aula e manifestados verbalmente ou por meio da escrita, sendo necessário analisar a adequação ou não de utilizar determinados símbolos nos modelos matemáticos. O aspecto da multiplicidade/adequação de símbolos na estrutura do modelo matemático pode ser observado nos resultados da atividade relatada neste trabalho. Aliás, o NCTM coloca que o termo modelo

matemático, significa uma representação matemática dos elementos e relações de um fenômeno e que são usados para esclarecer e interpretar o fenômeno e resolver problemas, como bem ficou delineado na atividade das escalas termométricas. O NCTM recomenda, ainda, que os alunos criem modelos matemáticos de contextos variados.

É natural que os alunos apresentem dificuldades de representação e no estabelecimento de relações entre as particularidades do fenômeno e as variáveis, e para tanto, o professor deverá promover outras atividades de modelagem matemática a fim de que se habituem com o universo das representações, seus significados e a linguagem algébrica.

Consideramos os resultados satisfatórios uma vez que os alunos procuraram realizar assertivamente a conversão entre os registros semióticos, embora as variáveis utilizadas por alguns grupos com o uso de caracteres possam levar à aplicação incorreta do modelo matemático. Portanto, o formalismo matemático e sua representação algébrica presentes nos modelos matemáticos devem ser mais refinados de modo que possam ser mais claros, pois também desempenham um papel explicativo, traduzindo para a linguagem matemática os elementos que constituem a situação-problema. Outro aspecto importante relativo ao processo de modelagem é persistir para que os alunos testem e validem os modelos matemáticos, pois derivam de situações particulares com características específicas. As representações são elaboradas mentalmente e expressas pela linguagem algébrica, que caracteriza o formalismo. Por fim cabe reiterar, que modelar não significa simplesmente escrever uma expressão matemática ou uma lei matemática, mas verificar se está adequada ao fenômeno estudado, se há funcionalidade e vinculação.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, A. Por uma Educação Matemática Crítica: a Modelagem Matemática como alternativa. **Educ. Matem. Pesq**., São Paulo, v.12, n.2, pp. 221-241, 2010.

_____; ARAÚJO, J. L; BISOGNIN, E. **Práticas de modelagem matemática:** relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011.

BARBOSA, A. A. S. **Modelagem matemática:** relatos de professores. 2012. 378 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Curitiba, 2012.

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática:** concepções e experiências de futuros professores. 2001. 256f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BARBOSA, J. C. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 69-85, 2009.

BARQUERO, B., BOSCH, M.; GASCÓN, J. Incidencia del «aplicacionismo» en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 32, n. 1, p. 83-100, 2014.

BATISTA, M. C.; FUSINATO, P. A. A utilização da modelagem matemática como encaminhamento metodológico no ensino de física. **REnCiMa**, v. 6, n. 2, p. 86-96, 2015.

BIEMBENGUT, M. S. Modelagem Matemática e resolução de problemas, projetos e etnomatemática: pontos confluentes. **Alexandria**, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.7, n.2, p.197-219, nov. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 23 jul. 2017.

_____. **LDB - Lei nº 9.394/96**. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 2000.

CAMPOS, L. S.; ARAÚJO, M. S. T. Articulação do ensino de Física com o ensino de Matemática através da modelagem matemática e das atividades experimentais. **Revista Metáfora Educacional**, Feira de Santana – Bahia, n. 19, p. 21-52, 2015.

COSTA, H. R. A modelagem matemática através de conceitos científicos. **Ciênc. cogn.**, Rio de Janeiro , v. 14, n. 3, p. 114-133, nov. 2009 .

COSTA, L. M. *et al.* A conversão entre diferentes registros de representação semiótica em uma atividade de modelagem matemática. **VIDYA,** v. 35, n. 1, p. 71-90, jan./jun., 2015 - Santa Maria, 2015.

DUBINSKY, E. Meaning and formalism in mathematics. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, n. 5, p. 211-240, 2000.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em**

Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, p. 11-34, 2003.

FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade:** um projeto em parceria. São Paulo: Edições Loyola, 2002.

GONÇALVES, H. J. L.; SANTOS, Paulo G. F.; PERALTA, D. A. Interdisciplinaridade no Ensino de Matemática: a Necessária Superação de Modismos. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 19, n. 42, p.5-13, 2014.

HUSSERL, E. **Investigações Lógicas:** investigações para a Fenomenologia e a Teoria do Conhecimento. Rio de Janeiro: Forense, 2012.

LAWSON, D.; MARION, G. **An Introduction to mathematical modelling**. Disponível em: https://people.maths.bris.ac.uk/~madjl/course_text.pdf. Acesso em: 18 jul. 2017.

LOUREIRO, D.Z.; KLUBER, T. **As escolas do Formalismo, Logicismo e Intuicionismo:** Um olhar para o Ensino de Matemática. Disponível em: http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/958/396. Acesso em: 5 abr. 2018.

MACIEL, G. S. **A importância da modelagem matemática como instrumento indispensável para o Ensino de Física:** uma reflexão aplicada ao Ensino Médio. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1151/2012_00932_GEDEILTON_SANTOS_MACIEL.pdf?sequence=1. Acesso em: 28 jul. 2017.

MONDINI, F. **O logicismo, o formalismo e o intuicionismo e seus diferentes modos de pensar a Matemática**. Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/287-1-A-gt2_mondini_ta.pdf. Acesso em: 5 abr. 2017.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Standards for school mathematics:** representation. Disponível em: http://www.ms.uky.edu/~lee/ma310sp09/Standards_for_School_Mathematics_Representation.pdf. Acesso em: 28 jul. 2017.

PEIRCE, C. S. **Semiótica.** São Paulo: Perspectiva, 2005.

_____. **Semiótica.** 4 ed. São Paulo: Perspectiva, 2010.

SANTOS, L. H. L. Notas críticas sobre o realismo matemáticos, à moda de Wittgenstein**. Analytica**, Rio de Janeiro, v. 12, n. 1, 2008, p. 131-147.

SILVA, J. J. **Filosofias da Matemática**. São Paulo: Editora Unesp, 2007.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W. **Modelagem matemática e semiótica:** algumas relações. Disponível em: http://www.uel.br/grupo-pesquisa/grupemat/docs/CC07_cnmem2009.pdf. Acesso em: 20 jan. 2018.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática crítica:** a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001.

SOUZA, E. S. R. ; SANTO, A. O. E. **Modelagem matemática no ensino de física:** recursos didáticos. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/fisica/artigos/modelagem_matematica.pdf. Acesso em: 28 jul. 2017.

WOLFF, J. F. S; SERRANO, A. **O significado da modelagem utilizada no ensino de física conforme lido a partir de referenciais da educação matemática.** Disponível em: http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/viiienpec/resumos/R1290-1.pdf. Acesso em: 18 jul. 2017.

Enviado:02/02/2018

Aceito:21/04/2018