Tangram
Revista de Educação Matemática

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO NO ÂMBITO DAS FRAÇÕES

MATHEMATICS TEACHERS' SPECIALIZED KNOWLEDGE: AN ANALYSIS OF THE TEXTBOOK ON FRATIONS

Beatriz Fernanda Litoldo[1]

Marieli Vanessa Rediske de Almeida[2]

Miguel Ribeiro[3]

RESUMO : Considerando o grande desafio que as frações representam para os alunos, discutem-se, neste artigo, algumas tarefas no âmbito das frações, de um livro didático utilizado na Educação de Jovens e Adultos e a importância do conhecimento especializado do professor. A partir de uma abordagem qualitativa, parte-se do pressuposto de que o livro didático se caracteriza como um dos principais recursos de orientação dos professores em sua prática pedagógica. Portanto, torna-se essencial uma discussão acerca do conteúdo desse recurso. Tendo em vista o conhecimento do professor, assume-se a conceitualização do Mathematics Teachers' Specialized Knowledge. Constata-se que cabe ao professor reconhecer as potencialidades/limitações das tarefas propostas no livro didático — o que requer dele um conhecimento especializado sobre todos os temas matemáticos envolvidos nos problemas propostos — e atribuir significado a tais tarefas, de modo a possibilitar o desenvolvimento, de forma matematicamente adequada, do conhecimento, das competências e das habilidades dos alunos.

PALAVRAS-CHAVE: Livro didático. Frações. *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*.

ABSTRACT: This paper starts from the well-known students' difficulties in the topic of fractions and discusses teachers' knowledge related with some tasks included in a textbook for Youth and Adult Education. From a qualitative approach and considering that textbooks are the main resource teachers use in classroom, its, thus, essential a discussion on the content of such resource. Assuming the specificities of teachers' knowledge we assume the Mathematic Teachers' Specialized Knowledge conceptualization. We discuss aspects of teachers' knowledge associated with potentialities/constrains associated with the tasks proposed in the textbook. Also, the demands of a specialized knowledge on the different related topics and to give meaning to such tasks in order to promote the development of students' knowledge, competencies and abilities.

[1] Doutoranda no Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática da Unicamp
[2] Doutoranda no Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática da Unicamp
[3] Docente da Faculdade de Educação Unicamp

KEYWORDS: Textbook, Fractions, Mathematics Teachers' Specialized Knowledge.

INTRODUÇÃO

O livro didático é um material presente há muitos anos no contexto escolar. Sendo ele um recurso sempre em movimento, a cada período, seus conteúdos, suas abordagens e sua aproximação com a vida cotidiana buscam, na concepção de seus autores, ser mais efetivos. Esse recurso pedagógico é adotado pelos professores com a finalidade de auxiliar o trabalho docente, constituindo-se como "um meio e nunca um fim em si mesmo" (Gonçalves, 2007, p. 21). Ou seja, ele pode fazer parte do repertório de aparatos que o professor utiliza no processo de ensino e aprendizagem, auxiliando-o no planejamento de suas práticas, mas nunca pode ser a única fonte de orientação.

Mesmo com o surgimento de novas ferramentas pedagógicas — como os computadores, os *tablets* e os celulares —, o livro didático ainda se configura como o instrumento-base para o trabalho do professor no cenário escolar (Oliveira, 2007; O'Keeffe & White, 2017) e, levando em consideração sua importância no contexto do planejamento docente, tal material é considerado como um dos principais recursos educacionais utilizados por esse profissional em sua prática (Gonçalves, 2007; Oliveira, 2007; Silva & Carvalho, 2004). Ainda assim, apesar de toda essa centralidade do livro didático na prática docente, pesquisas vêm demonstrando que o conhecimento do professor é o fator que mais impacta os resultados dos estudantes (Hill; Rowan & Ball, 2005; Nye; Konstantopoulos & Hedges, 2004), sendo, portanto, essencial uma discussão sobre esse conhecimento associado ao (para o) uso do livro didático.

Um dos conceitos mais complexos da matemática, tanto para os alunos quanto para os professores, são, ainda hoje, as frações (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Getenet & Callingham, 2017; Lamon, 2007; Margolinas, 2014). Com isso, tal tema é identificado como um dos tópicos mais problemáticos e importantes na aprendizagem dos alunos durante o Ensino Básico.

Na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2017), as frações aparecem sutilmente, de forma inexplícita, a partir do segundo ano, com a introdução de termos como metade e terça parte, os quais são ampliados para quarta parte, quinta parte e décima parte no ano seguinte. No quarto ano, as frações vinculam-se ao trabalho com os números racionais. Nesse momento, a representação fracionária está atrelada à habilidade de

reconhecer as frações unitárias usuais ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$) enquanto "unidades de medida menores que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso" (Brasil, 2017, p. 288).

No 5º, 6º e 7º ano, a referência ao trabalho com as frações se torna explícita. Nessas etapas do ensino, são previstos trabalhos relacionados à representação fracionária dos números racionais e, além disso, são apresentados os significados desta (parte-todo, operador, quociente, razão e medida), a forma de realizar sua leitura, a representação da fração na reta numérica, as ideias de comparação e ordenação, a noção de fração equivalente, as operações com frações e o cálculo de porcentagens (Brasil, 2017). Por outro lado, já nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998), afirma-se que o ensino de frações no terceiro ciclo do Ensino Fundamental "tem como objetivo levar os alunos a perceber que os números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações-problema como as que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão" (Brasil, 1998, p.101). Os dois documentos citados, o PCN (Brasil, 1998) e a BNCC (Brasil, 2017), destacam a importância de trabalhar os diferentes significados nos diversos contextos. Isto é, o aluno deve ser confrontado com situações que permitam abordar e discutir a fração em todos os seus significados — parte-todo, operador, quociente, razão e medida (Kieren, 1988; Pinto & Ribeiro, 2013).

Para que o aluno construa o conceito de número racional, é imprescindível que os diferentes significados e interpretações de frações sejam por ele vivenciados no processo de ensino e aprendizagem (Kieren, 1976); porém, para que isso seja possível, é necessário que o professor detenha um conhecimento especifico associado ao conteúdo que vai ensinar. Assim, ao professor cabe, entre outros, um conhecimento dos distintos sentidos das frações bem como das diferentes formas de representações e das diversas maneiras de explorar e abordar tais significados no contexto escolar.

Com relação à prática e ao conhecimento do professor, alguns autores pontuam em suas pesquisas que muitos docentes revelam dificuldades similares às dos alunos no conteúdo de frações (Ball, Hill, & Bass 2005; Pinto & Ribeiro, 2013; Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1993; Post, Harel, Behr, & Lesh, 1988). Por isso, entrelaçamos a temática *frações* com o debate sobre as especificidades do conhecimento do professor no contexto

específico do livro didático — as quais envolvem a compreensão, a implementação e a discussão de tarefas[4] propostas pelos livros didáticos.

Assumimos como ponto de partida que o conhecimento do professor é especializado, sendo essa especialização tanto nas dimensões do conhecimento do conteúdo (aqui números racionais na representação em fração) quanto no âmbito do conhecimento pedagógico do conteúdo. Nesse sentido, consideramos que cumpre ao docente um conhecimento específico associado a cada um dos diferentes temas, conteúdos e competências de forma ampla e profunda para que tenha condições de promover uma melhoria na aprendizagem, com compreensão, dos alunos. Assim, consideramos como parte integrante e essencial do conhecimento do professor o entendimento profundo de cada um dos conteúdos matemáticos (Ma, 1999) bem como as relações destes com os demais temas e áreas de conhecimento (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013; Ribeiro; Mellone & Jakobsen, 2013), pelo que utilizamos como constructo teórico a conceitualização do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK[5] (Carrillo *et al*., 2013).

Assim, neste artigo, temos o objetivo de discutir e refletir sobre o conhecimento especializado do professor que ensina matemática e está envolvido na compreensão (e na futura implementação) de tarefas, presentes no livro didático, sobre o tema das frações. Focamo-nos, especificamente, no conteúdo matemático envolvido e, para tanto, buscamos responder à seguinte pergunta de investigação: que conhecimento especializado do professor que ensina matemática se encontra envolvido (mobilizado e requerido) na e para a compreensão e a implementação de tarefas do livro didático no âmbito das frações?

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA NO ÂMBITO DE FRAÇÕES

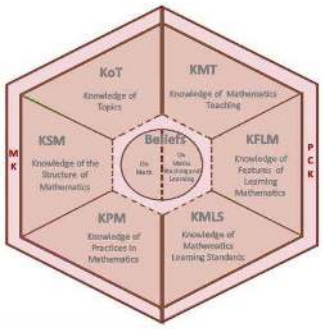
Desenvolvida com base nas ideias de Shulman (1986) sobre os conhecimentos profissionais docentes, a conceitualização do *MTSK* pretende envolver uma classificação exaustiva dos conhecimentos dos professores de matemática (Carrillo *et al*., 2013). Essa conceitualização tem como base a especialização do conhecimento do professor que ensina matemática, sendo tal saber composto por dois domínios de conhecimento — o

[4] O termo *tarefas* é utilizado neste artigo para designar qualquer tipo de proposta incluída no livro didático, tanto com relação ao texto introdutório quanto aos exemplos e aos problemas.

[5] Optamos por manter a nomenclatura em Inglês, pois esta é uma conceitualização do conhecimento do professor reconhecida internacionalmente, e a tradução desvirtuaria não apenas o sentido, mas, essencialmente, o conteúdo de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa, exposto na figura 1.

Mathematical Knowledge (MK) e o *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) — e um domínio das crenças do professor em relação à matemática e a seu ensino (Figura 1).

Figura 1 – Domínios e subdomínios do MTSK



Fonte: Carrillo et al. (2013, p. 2989)

O MK abarca o conhecimento matemático do professor e é subdividido em três subdomínios: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of the Practice of Mathematics* (KPM). O KoT envolve os procedimentos, englobando as ideias de como, por que e quando se faz bem como os conceitos, as propriedades, as definições matemáticas e os registros de representação. O KSM inclui as principais estruturas e ideias matemáticas, sendo este subdomínio composto substancialmente pelas conexões ("complexificação", simplificação e ligações transversais e auxiliares). Entre os conhecimentos que compõem o KPM, podemos destacar aqueles relacionados à criação e à produção matemática, ao papel dos símbolos e da linguagem formal, e aos modos de validação e demonstração matemática.

Por sua vez, o domínio PCK, que abrange o conhecimento de aspectos relacionados ao conteúdo matemático enquanto objeto de ensino e aprendizagem, é constituído pelos subdomínios *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM), *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) e *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS). O KFLM refere-se às características da aprendizagem matemática (teorias e modelos de aprendizagem, principais dificuldades dos alunos, etc.). O KMT envolve o ensino de matemática (teorias sobre o ensino, materiais didáticos, exemplos e analogias mais adequadas). Já o KMLS abarca, entre outros pontos, especificações curriculares, formas de avaliação, materiais de apoio e padrões mínimos de aprendizagem.

As frações, enquanto temática de estudo, são consideradas intricadas (Behr *et al*.,1983; Lamon, 2007), geradoras de incompreensões e dificuldades por parte dos alunos. Essas barreiras podem advir de situações matematicamente críticas, relacionadas à aprendizagem dos alunos (Behr *et al*., 1983; Newstead & Murray, 1998), e do conhecimento

e da prática do professor (Pinto & Ribeiro, 2013; Van Steenbrugge, Remillard, Verschaffel, Valcke, & Desoete, 2015). Para ultrapassar essas barreiras, um dos aspectos centrais é o trabalho relacionado com os múltiplos significados das frações. Torna-se, portanto, imprescindível desenvolver com os alunos os cinco significados atrelados a esse tema (parte-todo, operador, quociente, razão e medida), pois compreender apenas um deles não acarreta no entendimento dos outros nem de suas inter-relações (Kieren, 1976).

Hackenberg e Lee (2015) argumentam que uma percepção limitada dos diferentes significados relacionados às frações acarreta dificuldades de generalização e de trabalho com esse tema. Segundo os autores, o aprendizado das frações pode ser vinculado ao desenvolvimento do raciocínio algébrico. Citamos como exemplo a compreensão de frações como multiplicadores de incógnitas ou variáveis (uma possibilidade é pensar em um quinto de um comprimento desconhecido, isto é, $\frac{1}{5}$x). Esse tipo de raciocínio dificilmente será empregado, com compreensão e não como uma mera regra associada a determinada "tipologia de situação" por alunos que não entendem fração como operador.

Com relação aos distintos sentidos atribuídos às frações, Pinto e Ribeiro (2013) apresentam alguns contextos gerais relacionados a cada um dos sentidos das frações. A fração é considerada como parte-todo quando é usada para comparar uma parte de um todo, sendo o todo uma unidade que pode ser contínua, como um bolo, ou discreta, como números em uma cartela de jogos. Como operador, ela associa-se a situações envolvendo uma operação (o denominador é uma divisão, e o numerador, uma multiplicação) aplicada a um conjunto discreto — por exemplo, $\frac{2}{8}$ de um ano — ou ainda a transformações dimensionais, como a ampliação ou a redução. Como quociente, situa-se em contextos que envolvem a divisão no sentido de partilha equitativa, por exemplo, quando se deseja distribuir igualmente 5 maçãs a 7 crianças. Como razão, refere-se à relação entre duas partes de subconjuntos disjuntos, tal como a relação entre o número de meninos e o número de meninas em determinada sala (por exemplo, para cada 2 meninos há 7 meninas, originando uma razão de $\frac{2}{7}$, lê-se "dois para sete"). Como medida, advém de situações de comparação[6] entre grandezas (que só podem ser, obviamente, de uma mesma natureza, ou não seriam comparáveis); isso ocorre quando uma grandeza se torna unidade de medida para a outra,

[6] Entender essa ideia associa-se a uma compreensão do que é medir. Para mais informações consultar, por exemplo, Policastro, Almeida e Ribeiro (2018).

por exemplo: há uma jarra de água com capacidade de 2l (2000ml) e um copo com capacidade de 200ml; portanto, tem-se $\frac{2000}{200}$ de ml de água, e o resultado dessa medida corresponde à quantidade de copos de água com capacidade de 200ml necessários para encher uma jarra de água com capacidade de 2l.

No uso do livro didático, o conhecimento especializado do professor que ensina matemática é evidenciado (ou requerido) em diferentes momentos. Ao desenvolver uma aula sobre o que é uma fração, ao professor cumpre, entre outros, um conhecimento relativo a todos os significados da fração e aos contextos em que tais sentidos se mobilizam, o que vai além de saber a nomenclatura destes, mas se associa a um efetivo entendimento, englobando a compreensão de suas semelhanças e de suas diferenças (KoT – definições), e se vincula à consciência de como os aspectos desse tema se relacionam entre si e se comunicam com os demais temas (KSM – conexões transversais e auxiliares). Com relação às possíveis formas de representações, o conhecimento especializado do professor deverá incluir os diferentes tipos de registros e representações (KoT) — como a linguagem corrente, as estruturas pictóricas, gráficas e simbólicas, entre outros —, de maneira que a escolha da forma seja adequada aos objetivos matemáticos perseguidos.

Por exemplo, considerar a fração como parte-todo requer um conhecimento das possíveis representações relacionadas a esse sentido bem como de suas nomenclaturas, como apresentamos no Quadro 1:

Quadro 1 – Diferentes registros de representação da fração no sentido de parte-todo

	Linguagem corrente	Pictórica	Gráfica	Simbólica
Tipos de registros de representação	*Seis oitavos*			$\frac{6}{8}$
Nomenclaturas	*Numerador* e *Denominador, sendo o numerador a quantidade de partes que se considera e o denominador a quantidade de partes em que se dividiu (que compõem) o todo*			

Fonte: Elaborado pelos autores

Outro exemplo pode ser situado no contexto das operações envolvendo frações. Para esse conteúdo, além do conhecimento sobre os distintos sentidos das frações, é necessário conhecer os algoritmos para operar e as diferenças associadas às operações envolvendo números naturais e racionais na forma de fração (KoT – propriedades e procedimentos). Isso

é imprescindível para encontrar o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e o(s) contexto(s) nos quais faz sentido ou não efetuar tais operações. Nas circunstâncias mencionadas, também podemos destacar o conhecimento sobre o papel dos símbolos matemáticos, as possíveis maneiras de validação das linguagens formais e informais (KPM) bem como os diversos contextos e aplicações em que as frações são essenciais (KoT – fenomenologia).

Sendo o livro didático o recurso mais usado pelo professor (O'Keeffe & White, 2017), o conhecimento desse profissional deverá sustentar o uso desse material, de modo que sejam implementadas práticas matemáticas de elevada qualidade (Hill *et al*., 2008). Assim, em cada uma das situações sugeridas pelo livro didático, cumpre ao professor mobilizar seu conhecimento matemático especializado, associado à temática, e realizar uma análise relativa à apresentação, à compreensão e às possíveis implementações das tarefas de modo a manter seu elevado nível cognitivo, quando for o caso, ou a elevar esse nível, sempre que necessário.

Essa análise preliminar das tarefas envolve não apenas a resolução das questões propostas no livro didático pelo professor (e/ou a confrontação com as respostas no livro do professor), mas também a reflexão sobre diferentes estratégias que podem ser utilizadas pelos alunos e sobre os possíveis raciocínios empregados em cada uma destas, de forma a antecipar possíveis respostas e decisões. Trata-se de valorizar o percurso realizado pelo aluno na busca da solução do problema, e não somente de solicitar a resposta final ou validar apenas as abordagens esperadas (Ribeiro *et al*., 2013).

CONTEXTO E MÉTODO

A pesquisa que sustenta este texto segue uma abordagem qualitativa. Destacamos, neste artigo, a complexidade e as dificuldades do tema *frações* bem como a distribuição desse conteúdo nos documentos escolares ao longo da Educação Básica, a fim de discutir o trabalho das frações, particularmente em um livro didático do professor adotado para o Ensino Fundamental na Educação de Jovens e Adultos (EJA) – que podem ser considerados alunos não tradicionais (Ribeiro, 2018) –, e a relação do conhecimento especializado do professor que ensina matemática com a utilização desse material.

A escolha do livro didático *EJA Moderna* (Veridiano, Lima, Miguel, Almeida, Veronese, & Votre, 2013) deve-se à experiência de uma das autoras com esse material em uma turma de sexta série da EJA. Dentre os vários tópicos abordados no livro, optamos pelo tema *frações*, por um lado, por ele ser transversal na escolaridade (Brasil, 2017) e, por outro,

por ser um dos temas das discussões e dos trabalhos que desenvolvíamos no Grupo de Sábado (GdS)[7], do qual os três autores deste texto são participantes.

Para a análise, consideramos uma dupla abordagem. Partimos de um olhar global, que nos permitiu obter uma visão mais ampla de como as frações são consideradas nesse livro didático, por exemplo, verificamos onde esse tema se encontra no livro (está em determinado capítulo ou disperso ao longo do livro). E nos encaminhamos para um olhar local, que teve por objetivo buscar indícios do conhecimento especializado requerido pelo professor que ensina matemática nas futuras implementações das tarefas presentes no livro didático; essa perspectiva inclui procurar os focos particulares assumidos em cada uma das partes voltadas para as frações e quais as dimensões do conhecimento especializado do professor envolvidas em tais segmentos.

A análise local se deu pelo recorte de questões, cuja exploração, a nosso ver, requer do professor diferentes tipos de conhecimentos. A análise das questões do capítulo selecionado, o qual se centra no tema das frações, teve como base a conceitualização do MTSK e como foco os três subdomínios do MK. Para essa leitura, verificamos os tipos de tarefas indicadas no capítulo e discutimos os conhecimentos matemáticos envolvidos em possibilitar que o professor explore o tema das frações com e para uma efetiva compreensão.

ANÁLISE E DISCUSSÃO

A análise global do livro didático *EJA Moderna* (Veridiano *et al*., 2013) permitiu observar que esse tema é tratado apenas na unidade 2 do livro, a qual é intitulada "Alimentação". Essa unidade é composta pelo Capítulo 3, "Frações", e pelo Capítulo 4, "Números decimais e medidas". Por delimitação de espaço neste artigo, focar-nos-emos apenas no Capítulo 3 desse livro didático. Ressaltamos, no entanto, que os conteúdos desses dois capítulos conversam e se conectam, visto que a representação fracionária está intrinsicamente ligada aos números decimais e que um de seus significados corresponde à medida.

Embora se considere pertinente uma abordagem que propicie um paralelismo entre as várias formas de representação de quantidades (decimal, fracionária, pictórica, etc.), o livro apresenta uma disposição de conteúdo que inclui primeiro as frações e depois os números decimais. Na BNCC, por exemplo, que é um documento mais recente e no qual,

[7] Grupo com sede na Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Para mais informações, ver: <https://www.cempem.fe.unicamp.br/gds/grupo-de-sabado>.

portanto, o livro didático em estudo não se pautou – mas que continua em uso, conteúdos associados ao tema de frações (metade, terça parte etc.) são introduzidos a partir do segundo ano de escolaridade (Brasil, 2017). Considera-se, portanto, que o trabalho com frações deverá ocorrer de forma concomitante e complementar ao trabalho com os números decimais e somente depois o trabalho se concentra especificamente no conteúdo das frações, englobando os significados, a leitura e a representação destas na reta numérica, a fração equivalente, as operações com frações, o cálculo de porcentagens, entre outros pontos (Brasil, 2017).

O Capítulo 3 do livro subdivide o tema *frações* em cinco tópicos, a saber: "Números racionais na forma de fração", "Fração de uma quantidade", "Frações Equivalentes", "Adição e subtração de frações" e "Porcentagem". O assunto *alimentação* permeia as cinco seções citadas acima, sendo ele, na maioria das vezes, o contexto introdutório e gerador do estudo ali proposto; a abordagem inicial ocorre por meio de notícias ou situações do cotidiano vinculadas à alimentação. Como o livro analisado, em particular, é o do professor, além de conter o conteúdo a ser trabalhado com os alunos, em alguns casos, expõe soluções de problemas e sugestões para um possível plano de trabalho, ou seja, propõe respostas e orientações ao professor de como as tarefas podem ser desenvolvidas. Essas soluções e orientações são destacadas em vermelho e aparecem abaixo de cada tarefa.

A análise local permite entender que as tarefas propostas nesse livro trabalham as frações nos sentidos de parte-todo, quociente, operador e razão. Quanto aos problemas abordados, um ponto que nos chamou a atenção foi a forte relação das tarefas com o cotidiano dos alunos da EJA. O contexto apresentado sempre integrava aplicações diretas a fenômenos e/ou situações do dia a dia, o que requer um conhecimento do professor associado ao KoT (fenomenologia). Essa correlação estabelecida entre situações do cotidiano e conteúdos matemáticos é destacada e ressaltada pela BNCC (Brasil, 2017) como um aspecto importante para o desenvolvimento e a aprendizagem dos alunos.

Outro fator a salientar se refere às conexões temporais requeridas para relacionar os conhecimentos prévios e os futuros em uma visão de sequência, o que implica conexões de simplificação e "complexificação" (KSM). Essa ligação temporal fica muito evidente nas tarefas propostas, que partem do conhecimento do aluno para trabalhar o conteúdo de frações, como podemos verificar no Quadro 2:

Quadro 2 – Introdução e explicação sobre o cálculo da *fração de uma quantidade*

Leia o texto a seguir:

Obesidade no Brasil cresce em ritmo preocupante

"Considerada pela Organização Mundial da Saúde (OMS) um dos dez principais problemas de saúde pública do mundo, a obesidade vem crescendo em ritmo alarmante no Brasil.

De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), mais da metade da população adulta brasileira está acima do peso. Pesquisas indicam que o excesso de peso já atinge também uma em cada três crianças entre cinco e nove anos de idade e um quinto dos adolescentes no país [...]"

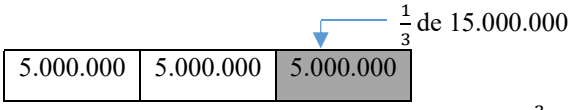
Obesidade no Brasil cresce em ritmo preocupante. Portal R7 Notícias/Saúde, 18 Jan 2011. Disponível em http://noticias.r7.com/saude/noticias/obesidade-no-brasil-cresce-em-ritmo-preocupante-20110118.html Acesso em: 02 out. 2012.

Segundo o texto, uma em cada três crianças entre 5 e 9 anos de idade está com excesso de peso. Isso significa que $\frac{1}{3}$ dessas crianças está com excesso de peso. Considerando que a população brasileira nessa idade seja aproximadamente 15 milhões, como podemos determinar a quantidade de crianças com excesso de peso?

Antes de prosseguir com a solução do problema, solicite aos alunos que o resolvam usando estratégias próprias. Peça que compartilhem o modo como resolveram com os colegas.

Para calcular $\frac{1}{3}$ de 15 milhões, dividimos 15 milhões em 3 partes iguais.

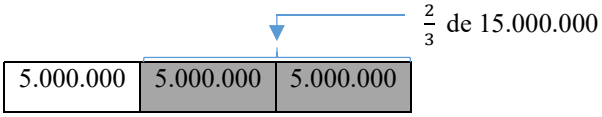
15.000.000: 3 = 5.000.000



Assim, temos que $\frac{1}{3}$ de 15.000.000 é igual a 5.000.000. E como calcularíamos $\frac{2}{3}$ de 15.000.000?

Para calcular $\frac{2}{3}$ de 15.000.000, podemos multiplicar o valor correspondente a $\frac{1}{3}$ por 2, ou seja, multiplicar 5.000.000 por 2.

15.000.000 · 2 = 10.000.000



Peça aos alunos que compartilhem, com os colegas, os diferentes modos de resolução das atividades propostas a seguir.

Fonte: Veridiano et al. (2013, p. 45)

O livro contextualiza o tema "Fração de uma quantidade" introduzindo esse conceito por meio de uma notícia sobre a obesidade no Brasil, situação muito próxima da saúde dos alunos (KoT – fenomenologia). A orientação para o professor para essa tarefa é que ele solicite aos alunos que resolvam o problema "como podemos determinar a quantidade de crianças com excesso de peso?" por meio de estratégias próprias. Essa abordagem inicial busca explorar nos alunos seus conhecimentos prévios para, posteriormente, desenvolver o trabalho proposto.

A gama de soluções que os alunos podem produzir deverá mobilizar no professor conhecimentos associados a diferentes dimensões de seu conhecimento especializado como seja, por exemplo, relativo ao KoT associado aos procedimentos, às definições; às propriedades e aos registros de representação; e à maneira como certas soluções podem contribuir para gerar as possíveis discussões que ocorrerão na sequência.

Essa tarefa demanda um conhecimento relativo ao KSM (conexões temporais) ao requerer um conhecimento sobre o conceito de parte-todo, ao representar a quantidade *15 milhões* por meio de uma tira retangular e ao dividi-la em três partes iguais, dando a cada parte o valor de 5 milhões. Para essa tarefa, assumir como ponto de partida o conceito de fração como parte-todo é um elemento de simplificação. Conhecimentos trabalhados anteriormente, como a divisão enquanto partilha equitativa (dividir 15 milhões por 3 grupos) e o sentido de multiplicação enquanto adição de parcelas iguais (2x15 milhões), referem-se ao KSM e, em particular, às conexões auxiliares, visto que esses tópicos (divisão e multiplicação) não são o foco de trabalho, mas contribuem para tal.

Assim, a tarefa demanda conhecimentos associados a conexões de simplificação e mobiliza também conhecimentos de conexões auxiliares, de modo a possibilitar o desenvolvimento e a exploração do conceito de fração enquanto operador ("fração de uma quantidade"), ou seja, elemento de "complexificação". O conhecimento desta também vai além da tarefa proposta nesse momento, visto que o trabalho envolvendo a representação geométrica (pictórica) e a algébrica irá ser retomado posteriormente, como veremos na tarefa do Quadro 5. A opção por incorporar essas formas de representação envolve a mobilização de conhecimentos prévios e futuros, relativos a uma visão sequencial dos conteúdos, associada, por sua vez, ao KMLS.

Quando analisamos cada uma das tarefas propostas no livro buscando uma estrutura, observamos um percurso que principia com a introdução do tema, a qual, na maioria das vezes, orienta o professor a solicitar que os alunos explorem, inicialmente com seus conhecimentos prévios, determinadas perguntas referentes ao tópico a ser estudado. Os problemas sobre o conteúdo trabalhado pertencem a uma seção chamada de "Atividades", a qual contém problemas com diferentes níveis de dificuldade. Esta varia do desafio mais reduzido (por exemplo, quando solicitado apenas que os alunos escrevam a fração que indica a quantidade consumida do alimento ilustrado na figura) a uma demanda cognitiva mais elevada[8] (por exemplo, quando se problematiza que dois amigos comeram uma determinada quantidade de pizza cada um $\left(\frac{3}{8}\text{ e }\frac{4}{8}\right)$, solicita-se a representação dessas quantidade por meio de um desenho, pergunta-se qual dos amigos teria comido mais pizza e se sobrou pizza,

[8] Os dois exemplos de problemas de desafio, um mais reduzido e outro mais elevado, fazem parte de uma mesma seção, a qual trabalha a fração como parte-todo.

e, caso a resposta a esta última questão seja afirmativa, pede-se que essa quantidade seja representada na forma de fração).

É necessário um entendimento das tarefas propostas no livro didático e de sua posterior efetivação. Assim, os alunos podem desenvolver um conhecimento de e sobre a fração, seus sentidos e as operações envolvidas. Isso demanda do professor um conhecimento sobre os significados de fração, os modos de defini-la e classificá-la, o que é elementar ao professor para que possa explorar as tarefas propostas com todas suas potencialidades ou, inclusive, ampliá-las.

O saber utilizado na construção e na exploração dos distintos conceitos de fração está relacionado com as dimensões que abordam a definição (relação entre duas quantidades, a e b) e os registros de representação, por exemplo, a simbologia $\frac{a}{b}$ e as propriedades atreladas a ela (a e $b \in \mathbb{Z}$, b $\neq 0$), que fazem parte do subdomínio KoT, o qual se associa ao conteúdo e a seus significados. Nessa direção, compreender de que maneira é possível estabelecer relações, correspondências e equivalências formais e informais com o conhecimento matemático que sejam válidas matematicamente dentro das tarefas direcionadas ao público da EJA e a suas particularidades gera uma concatenação com as dimensões do KPM.

Uma das tarefas que nos chamou a atenção está no tópico "Fração de uma quantidade" e pode ser observada no Quadro 3.

Quadro 3 – Tarefa sobre o 13.º salário

Leia e responda:
No Brasil, a legislação trabalhista estabelece que os trabalhadores devem receber uma gratificação em dinheiro, no final do ano, conhecida como décimo terceiro salário. Para aqueles que trabalharam o ano todo, o valor do décimo terceiro salário corresponde a 1 salário de dezembro. Entretanto, um trabalhador que foi registrado no início de agosto receberá um valor proporcional. Para calcular quanto receberá, deve-se dividir o valor do salário de dezembro em 12 partes iguais e depois obter a soma de 5 partes que correspondem aos meses de agosto a dezembro. Assim, o valor bruto (sem os descontos) a receber será equivalente a $\frac{5}{12}$ de seu salário de dezembro.
a) Se o salário de dezembro desse trabalhador é de 2.880 reais, qual será o valor bruto de seu décimo terceiro salário? R$ 1.200,00
b) Calcule o valor bruto do décimo terceiro salário de um trabalhador contratado no início do mês de março cujo salário no mês de dezembro era de 4.320 reais. R$3.600,00

Fonte: Veridiano et al. (2013, p. 45)

O livro didático propõe o cálculo do 13.º salário, realidade de muitos estudantes da EJA (KoT – fenomenologia). No entanto, o que nos chama a atenção é a explicação fornecida pelo livro didático no enunciado da questão. O material indica como estratégia para o professor resolver o problema dividir o salário em 12 partes iguais e depois obter a soma de 5 partes correspondentes. O entendimento e a potencialização dessa estratégia associam-se

a um conhecimento do professor relacionado com o KoT, no nível dos procedimentos, do registro de representação e da definição, o que se vincula ao sentido de fração enquanto operador. Nessa questão, a expressão "dividir o valor [...] em 12 partes iguais e depois obter a soma de 5 partes" requer a compreensão de que o procedimento da soma de 5 partes iguais nada mais é do que a operação da multiplicação como adição de parcelas iguais e não como partes (5) de um todo (12). Apreender essa relação potenciará a discussão com os alunos, de modo que essa ideia não seja apenas mais uma regra a aplicar em determinada situação "típica" envolvendo dinheiro ou porcentagens.

Para trabalhar essa questão, também é essencial que o professor detenha um conhecimento que lhe permita não apenas obter a resposta ao problema da forma esperada (KoT – procedimentos), mas também encontrar outras formas possíveis (KPM), de modo a estar mais atento e desperto para caminhos alternativos e não *standard* dos alunos ou a entender efetivamente seus erros e os motivos que os possam sustentar (Jakobsen *et al*., 2014). No caso da tarefa exposta, cumpre ao docente o conhecimento que lhe permite ter consciência das (im)possibilidades de usar a estratégia apresentada no livro do professor para não comprometer o entendimento dos alunos sobre a fração de uma quantidade. No exercício do Quadro 3, a fração como operador perde significado, visto que não é necessário operar com a fração $\frac{5}{12}$, ou seja, a resolução apresentada não requer o uso explícito de $\frac{5}{12}$ como forma de obter a resposta, tornando questionável a necessidade da utilização de fração nesse problema.

Por meio desse exemplo, é possível verificar que o conhecimento especializado do professor lhe permite prever diferentes possibilidades de resolução antes de propor o problema aos alunos bem como optar por uma das formas de explorar uma solução a este que efetivamente permita atribuir sentido ao que se faz e ao por que se faz. Desse modo, os problemas propostos em sala de aula podem verdadeiramente estar relacionados com a realidade e não se configuram uma mera "contextualização", isto é, uma tentativa de se adequar ao cotidiano dos alunos da EJA.

É essencial que o professor antecipe um leque diversificado de possíveis respostas dos alunos e pense em soluções inesperadas para que possa se preparar para a implementação futura, formando o conhecimento das possíveis estratégias de resolução do problema (KPM). Ao se deparar com um problema dessa natureza, ele deve (re)conhecer diferentes propriedades e possíveis maneiras de encontrar a solução de um problema e buscar

compreender e explorar os distintos sentidos de frações (parte-todo, operador, quociente, razão e medida) e ainda ter o entendimento sobre as conexões entre diferentes formas de perceber as frações (KoT) e suas relações com o contexto do mundo real (KPM).

Outra tarefa que se destaca encontra-se no espaço das "Frações equivalentes" e está exposta no Quadro 4.

Quadro 4 – Tarefa sobre *fração equivalente*

Veja como uma aluna pensou para obter frações equivalentes a $\frac{5}{10}$. Como 5 é a metade de 10, toda fração que tiver o numerador igual à metade do denominador será equivalente a $\frac{5}{10}$. a) Essa aluna está correta? Justifique. Escreva 5 frações que sejam equivalentes a $\frac{5}{10}$. Respostas possíveis: $\frac{1}{2}, \frac{50}{100}, \frac{25}{50}, \frac{10}{20}$ e $\frac{30}{60}$

Fonte: Veridiano et al. (2013, p. 48)

Nessa tarefa, parte-se de um exemplo e pede-se que o aluno pense a respeito da situação e tente generalizar. Isso exige do professor um conhecimento a respeito das possíveis respostas dos alunos e a capacidade de justificar matematicamente a validade do enunciado "toda fração que tiver o numerador igual à metade do denominador será equivalente a $\frac{5}{10}$ " (KoT).

No tópico "Adição e subtração de frações", utilizam-se algumas representações geométricas para explicar a soma de frações de denominadores diferentes, optando por trabalhar, aparentemente, com frações equivalentes e não com o Mínimo Múltiplo Comum (Quadro 5). Essa abordagem parte do pressuposto de que são claras para o docente as diversas formas possíveis de determinar a adição ou a subtração de quantidades representadas em forma de fração com denominadores diferentes (KoT). Apesar da utilização de uma abordagem geométrica em algumas tarefas do livro didático, as representações expostas restringem-se às figuras geométricas mais usadas (quadrado, retângulo e círculo) e são associadas, em essência, ao sentido de parte-todo, levando a um entendimento parcial e limitado das frações e de seus múltiplos significados (Pinto & Ribeiro, 2013).

Apesar disso, algumas das tarefas possibilitam a realização de conexões entre a representação geométrica (pictórica) e a algébrica (KSM). Isso ocorre, em particular, no exemplo que apresentamos no Quadro 5. Nessa explicação, é possível fazer uma associação a um KoT sobre possíveis maneiras de representar a adição de $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Quadro 5 – Cálculo de adição de frações de denominadores diferentes

Em um projeto de Horta comunitária, $\frac{1}{3}$ do terreno foi destinado à plantação de tomates, e $\frac{1}{4}$ à de alfaces. Que fração do terreno foi utilizada para estas duas plantações juntas? Para resolver esse problema devemos adicionar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$.

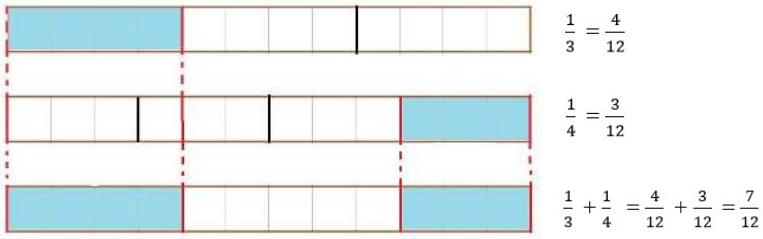
Como essas frações não tem denominadores iguais, devemos encontrar uma fração equivalente a $\frac{1}{3}$ e outra equivalente a $\frac{1}{4}$ que tenham denominadores iguais. Veja algumas frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$:

- $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{6}{18}$
- $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \frac{6}{24}$

Observe que as frações $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$ têm denominadores iguais. Como $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ e $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, então:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

Veja como podemos representar essa situação por meio de uma figura.



Desse modo, concluímos que foram usados $\frac{7}{12}$ do terreno nos dois cultivos.

Para efetuar a subtração entre duas frações que não têm denominadores iguais, fazemos como na adição. Determinamos frações equivalentes que têm denominadores iguais e efetuamos a operação.

Fonte: Veridiano et al. (2013, p. 50)

Ainda que o livro didático não aborde explicitamente o MMC, essa noção dá forma à determinação do número mínimo de parte iguais, na qual se terá que dividir a unidade para que as duas quantidades que se pretende adicionar possam ser comparadas de forma direta, determinando frações equivalentes. Esse procedimento (KoT), associado aos porquês de determinar o 12 sem recorrer à regra, implica que o professor não só efetivamente conheça o significado do MMC e o correspondente de 12, no caso particular, mas também saiba o que sustenta efetuar as divisões da unidade em determinada forma e a razão disso (KPM).

Esse conhecimento permitirá ao professor explorar com os alunos o sentido de operar com frações, o que demanda ampliar as potencialidades do exercício. Para tal, não se deve considerar como ponto de partida a resposta final (o denominador tem de ser 12), mas sim elaborar o raciocínio de modo que os alunos possam resolver o problema. Nesse movimento, o essencial é o raciocínio e o percurso efetuado, e não a resposta final (Ribeiro *et al.*, 2013), apesar de esta ser aquilo que se busca.

Esse tipo de situação demanda também do professor um conhecimento especializado que parte do KSM. É necessário que ele conheça e entenda as diferentes maneiras de representar uma mesma situação e suas conexões com a matemática avançada. Por exemplo, ele precisa conhecer e elencar resultados matemáticos que garantam que entre quaisquer números (dois ou mais) sempre haverá um MMC. Ademais, o docente também deve

conseguir ilustrar aspectos do que muitos consideram/denominam matemática elementar (ou escolar), o que envolve compreender por que, na representação da fração da forma simbólica $\frac{a}{b}$, é necessário que a e b sejam números inteiros e que b seja diferente de zero.[9]

COMENTÁRIOS FINAIS

Um entendimento do tema de frações é necessário ao aluno em seu cotidiano como forma auxiliar na compreensão do universo dos conjuntos numéricos (Brasil, 1998, 2017). O livro didático analisado, apesar de propor tarefas relacionadas com o cotidiano dos alunos, o que é bastante pertinente para a EJA, acaba tendo como foco a relação parte-todo em frações, visto que esse sentido permeia todas as explorações dos tópicos estudados nesse capítulo ("Fração de uma quantidade", "Frações equivalentes", "Adição e subtração de frações" e "Porcentagem"). Essa limitação das formas de entender uma fração, se não for sanada pelo conhecimento do professor sobre o tema[10], impossibilitará o desenvolvimento de uma compreensão e de um aprendizado melhor sobre o conceito dos números racionais em sua representação na forma fracionária (Carrillo *et al*., 2013; Pinto & Ribeiro, 2013).

Quanto ao conhecimento especializado que o professor que ensina matemática precisa ter para entender e implementar as tarefas sobre frações presentes no livro didático, é importante distinguir os sentidos das frações — parte-todo, operador, quociente, razão e medida. Além disso, esse profissional deve reconhecer as representações delas, como as referidas no Quadro 1, seus procedimentos de adição e subtração, suas conexões com outros conteúdos matemáticos e com linguagens algébricas, geométricas, numéricas (auxiliares e transversais), bem como seus contextos de aplicação. Assim, deterá um conhecimento sobre as melhores formas para a abordagem do assunto.

No trabalho com o livro didático, é necessário que o professor conheça diferentes maneiras de resolver um mesmo problema e seja capaz de reconhecer conceitos implícitos nas tarefas do livro (KoT), como o MMC no Quadro 5 e o sentido de operador no Quadro 3. Além disso, é demandada uma visão avançada da matemática elementar e das conexões entre as frações e outros conteúdos que os alunos podem usar para resolver os problemas propostos, como no Quadro 2 (KSM). Destacamos que, em nossas análises, o KPM foi o

[9] Note que trabalhando em outros conjuntos podemos definir fração de forma distinta; porém, essa definição acarretará implicações nas próprias propriedades do conjunto com as quais passamos a trabalhar (por exemplo, ser grupo, corpo, espaço vetorial ou quase-grupo).

[10] O professor poderia, por exemplo, tratar de diferentes sentidos e significados de fração, discorrer sobre como fazer adição ou representar duas quantidades em fração com denominadores distintos.

subdomínio menos identificado associado as tarefas propostas no livro didático, provavelmente por estar relacionado a um conhecimento mais formal. Discutir o conteúdo desse subdomínio do conhecimento do professor requer, portanto, abordagens complementares envolvendo, por exemplo, a análise da prática do professor, os documentos oficiais (por exemplo, a BNCC – Brasil, 2017), as problemáticas recorrentes identificadas na pesquisa e os conhecimentos, os raciocínios e as representações desenvolvidas pelos alunos (Ribeiro, 2017).

Notamos que, embora o contexto da EJA seja particular e esteja em crescimento, de modo que há muitas potencialidades de contribuir para a melhoria da formação, da qualidade de vida e da empregabilidade desses alunos não tradicionais (Ribeiro, 2018) e a análise seja sobre um único livro didático, a investigação permitiu salientar alguns dos aspectos essenciais ao conhecimento do professor para tomar decisões informadas e manter ou ampliar as potencialidades das tarefas propostas no livro, explorando-as com atribuição de significado.

Esta discussão levou a alguns questionamentos que elencamos a seguir e que têm por intuito fomentar a reflexão sobre as especificidades do conhecimento do professor, algumas das questões associam-se ao conhecimento no âmbito dos racionais em sua representação em fração e às demandas de uma utilização efetiva do livro didático, que poderá ajudar também a pensar em formas de contribuir para a melhora deste. Assim, algumas das indagações que deixamos em aberto para trabalhos futuros são: que conhecimento especializado mobiliza o professor que ensina matemática ao adaptar tarefas de livros didáticos com o intuito de utilizá-las na exploração de todos os sentidos das frações? Que conhecimento especializado revelam professores que ensinam matemática ao usar o livro didático quando têm por objetivo que seus alunos efetivamente entendam o que fazem e por que o fazem? Que conhecimento especializado está envolvido na elevação de nível dos problemas propostos nos livros didáticos?

REFERÊNCIAS

Ball, D., Hill, H. H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, (Fall), 14–46.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh & Landau, M. (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91–123). New York: Academic Press.

Brasil. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental - Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular* (Terceira Versão). Brasília-DF: Ministério da Educação.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In *CERME 8 Proceedings* (pp. 2985–2994). Antalya, Turquía.: ERME.

Gatenet, L., & Callingham, R. (2017). Teaching fractions for understanding. In A. Downton, S. Livy, & J. Hall (Eds.), *40 years on: We are still learning! Proceedings of the 40th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 277–284). Melbourne.

Gonçalves, R. G. (2007). *O emprego do livro didático de matemática no ensino fundamental da rede pública estadual* (Monografia). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma - SC.

Hackenberg, A. J., & Lee, M. Y. (2015). Relationships between students' fractional knowledge and equation writing. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(2), 196–243.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, *26*(4), 430–511.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, *42(2)*, 371–406.

Jakobsen, A., Ribeiro, M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, pp. 135–150.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In *Number and measurement: Papers from a research workshop.* (pp. 101–144). Columbus - Ohio: ERIC/SMEAC.

Kieren T.E. (1988). Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal development. In: Hiebert J., Behr M. (eds.) (1988). Number concepts and operations in the middle grades. Reston (Va): NCTM-Lawrence Erlbaum Ass. 162-181.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework. In *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* (pp. 629–668). Charlotte - NC: Information Age Publishing.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Hillsdale, NJ: Earlbaum.

Margolinas, C. (2014). Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment. *Journal of Research in Mathematics Education*, (3), 186–188.

NCTM. (1991). *Professional Standards*. Reston.

Newstead, K., & Murray, H. (1998). Young students' constructions of fractions. (Vol. 3, pp. 295–303). Presented at the Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education:, Stellenbosch - South Africa.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *26*(3), 237–257.

O'Keeffe, L., & White, B. A. (2017). A snapshot of the role of the textbook in English secondary mathematics classroom. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *18*(3), 318–332.

Oliveira, E. M. Q. (2007). *O uso de livro didático de matemática por professores do ensino fundamental.* (Dissertação (Mestrado em Educação)). Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Recife - BR.

Pinto, H., & Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos - o sentido de número racional. *Da Investigação Às Práticas*, *3*(1), 85–105.

Policastro, M. S., Almeida, A. R., & Ribeiro, M. (2018). Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa. *Revista Espaço Plural*, s.p (aceito).

Post, T., Harel, G., Behr, M., & Lesh, R. (1988). Intermediate teachers knowledge of rational number concepts. In et al. Fennema (Ed.), *Papers from First Wisconsin Symposium for Research on Teaching and Learning Mathematics* (pp. 194–219). Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research.

Post, T. R., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 327–362). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Ribeiro, M. (2017). Das generalidades às especificidades do conhecimento do professor que ensina Matemática: metodologias na conceitualização (entender e desenvolver) do conhecimento interpretativo (p. Aceite para publicação). Brasil: SBEM.

Ribeiro, M. (2018). Métodos de ensino-aprendizagem, avaliação e feedback: perspectivas e visões de estudantes maiores de 23 anos. In *Dos "Novos Públicos" do Ensino Superior aos Estudantes não-tradicionais no Ensino Superior.*

Ribeiro, M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Give sense to students' productions: a particular task in teacher education. (pp. 273 – 281). Presented at the Proceedings of the International Symposium, Elementary Mathematics Teaching (SEMT), Prague: Charles University.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(4), 4–14.

Silva, R. C., & Carvalho, M. A. (2004). O Livro Didático como Instrumento de Difusão de Ideologias e o Papel do Professor Intelectual Transformador. In *Educação, Práticas Pedagógicas e Políticas de Inclusão Social* (Vol. 1, pp. 1–11). Teresina: EDUFPI.

Van Steenbrugge, H., Remillard, J., Verschaffel, L., Valcke, M., & Desoete, A. (2015). Teaching Fractions in Elementary School: An Observational Study. *The Elementary School Journal*, *116*(1), 49–75.

Veridiano, M. C. S., Lima, D. M., Miguel, J. C., Almeida, J. J. P., Veronese, P. C. de F., & Votre, M. M. (2013). *EJA Moderna: Educação de Jovens e Adultos: anos finais do ensino fundamental.* (1º). São Paulo - SP: Moderna.

Recebido:16/01/2018

Aceito:17/03/2018