Tangram
Revista de Educação Matemática

Níveis de raciocínio demonstrados por alunos em tarefas de multiplicação: uma experiência no ensino fundamental

Students' reasoning levels revealed in multiplication tasks: an experience in primary

Marcos Paulo de Oliveira[1]
Alessandra Rodrigues de Almeida[2]
Miguel Ribeiro[3]

Resumo. O presente trabalho aborda a implementação de uma tarefa de multiplicação com alunos de terceiro ano do ensino fundamental. Durante a tarefa foi analisado o raciocínio dos alunos, considerando uma maior ou menor evidência na multiplicação. Usamos como referencial teórico os estudos de Vergnaud para melhor entender diferentes raciocínios associados à operação de multiplicação e fazemos uma análise qualitativa do nível de raciocínio dos alunos, percebidos através da escrita ou da explicação oral sobre a resolução a tarefa. Os resultados mostraram que grande parte dos alunos passaram para um raciocínio de transição do pensamento aditivo para o multiplicativo, mas poucos apresentaram pensamento multiplicativo de fato.

Palavras Chave: Multiplicação; Anos Iniciais; Raciocínio Multiplicativo.

Abstract. In this paper we discuss the implementation of a task on multiplication with third year students of primary school. Student's reasoning was analysed considering a higher or lower evidence of multiplicative reasoning. We used as theoretical reference Vergnaud's studies to better understand different reasoning associated to multiplication and to do so, a qualitative analyses of de students' reasoning levels was performed. Such levels was perceived in the studentes' writing and/or oral explanation during the task implamentation. The results showed that students went from an additive thinking to an approach of what can be perceived as multiplicative thinking, but only a small part of them presented multiplicative thinking in fact.

Keywords: Multiplication; Primary School; Multiplicative Reasoning.

Introdução

[1] Mestrando da Universidade Estadual de Campinas E-mail: marcosp_oliveira_@hotmail.com
[2] Docente na Pontifícia Universidade Católica-Campinas.e-mail:alessandraalmeida628@gmail.com
[3] Docente na Universidade Estadual de Campinas E-mail: cmribas78@gmail.com

A multiplicação é um dos eixos centrais do trabalho matemático nos anos iniciais do ensino fundamental. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1997), documento que fundamentou os currículos escolares, as operações (de adição, subtração, multiplicação e divisão) com números naturais aparecem como conteúdos matemáticos do primeiro ao terceiro ano.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2017), também aborda o significado das operações como objetivo para os Anos Iniciais, e determina os conteúdos pretendidos em cada um dos anos. Em relação à multiplicação com números naturais, ela aparece a partir do segundo ano com a ideia de adição de parcelas iguais; a partir do terceiro é introduzida como configuração retangular e apenas no quarto ano como proporcionalidade. A ideia de contagem aparece também no quarto ano, mas não como forma de tratar a multiplicação. Assim, tanto o PCN quanto a BNCC indicam que a multiplicação seja trabalhada não somente como adição de parcelas iguais, mas também à ideia de proporcionalidade e configuração retangular (Brasil 1997; 2017), além de que o PCN indica o trabalho associado à multiplicação comparativa e à ideia de combinatória (Brasil, 1997).

É usual que nas escolas se comece ensinando a multiplicação como a soma de parcelas iguais, em razão dessa relação direta que se pode estabelecer entre as duas operações. Porém, essas duas operações possuem diferenças em relação à sua estrutura: enquanto a adição envolve relações entre parte e todo, a multiplicação recai sobre relações fixas entre suas quantidades (Nunes; Bryant, 1997). Assim, tratar a multiplicação separadamente da adição tem implicações relacionadas com o raciocínio empregado para resolver as situações multiplicativas. Consideramos, então, importante a compreensão dos sentidos da multiplicação independentemente, além daquele ligado a adição.

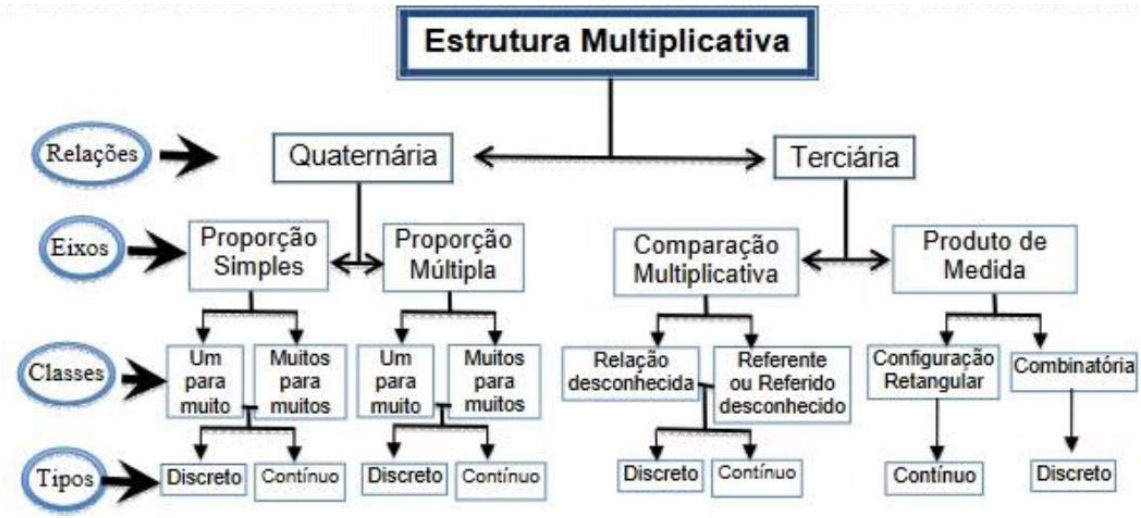
Com o presente trabalho, temos o objetivo de relatar uma experiência de ampliação conceitual da multiplicação realizada numa turma de terceiro ano de ensino fundamental. A introdução dessa operação para os alunos foi realizada a partir do tratamento como soma de parcelas iguais, e posteriormente como proporcionalidade. Durante a aplicação de uma tarefa buscamos identificar os sentidos atribuídos pelos alunos nas tarefas de multiplicação, caracterizando assim diferentes níveis de raciocínio multiplicativo.

Aspectos Teóricos

A Teoria dos Campos Conceituais - TCC (Vergnaud, 1983, 1988, 1990, 1993) aborda atividades cognitivas para o estudo da aprendizagem e do desenvolvimento de competências complexas, e têm aplicações particulares para a matemática. Esta teoria estuda as continuidades e rupturas entre os conhecimentos, o que permite entender as relações entre os conceitos matemáticos. Um dos princípios desta teoria é que os conceitos matemáticos ganham sentido com uma variedade de situações, as quais geralmente abordam mais de um conceito. Um campo conceitual, é compreendido como um conjunto de problemas, situações, relações, estruturas e conteúdos conectados entre si, cuja aquisição ocorre de forma lenta em longos períodos de tempo.

No contexto da matemática, são de grande importância os campos conceituais aditivos e multiplicativos. O campo multiplicativo é definido como o conjunto de situações que requerem as operações de multiplicação e divisão para serem resolvidas, ou uma combinação entre elas (Vergnaud, 1983, 1988), e envolve vários outros conceitos além de multiplicação e divisão, como razão e proporção, funções lineares, frações e porcentagem. O campo multiplicativo é classificado de acordo com relações, eixos e classes dessas situações. O esquema abaixo, elaborado por Magina, Santos e Merlini (2010) sintetiza a classificação das situações deste campo:

Figura 1: Esquema do Campo Conceitual multiplicativo



Fonte: Magina, Santos e Merlini (2010).

Fazendo uma correspondência entre os significados das operações tratados nos documentos oficiais (Brasil; 1997, 2017) e a forma de entender as operações no campo multiplicativo de Vergnaud, observamos que os documentos oficiais brasileiros consideram que dos quatro eixos referidos por Magina, Santos e Merlini (2010), três devem ser abordados nos anos iniciais: os eixos de proporção simples, de comparação multiplicativa e de produto de medidas. As classes de situações propostas para o terceiro ano, são do tipo discreto e envolvem os números naturais. Uma descrição detalhada do esquema é apresentada em Magina, Santos e Merlini (2010), aqui abordaremos o eixo de proporção simples.

Os exemplos de proporção simples aparecem nas orientações didáticas do PCN (Brasil, 1997) para as classes de um para muitos e de muitos para muitos, que pode ser observado nos exemplos: a) "Marta vai comprar três pacotes de chocolate. Cada pacote custa R$ 8,00. Quanto ela vai pagar pelos três pacotes?"_(Brasil, 1997, p.110). b) "Dois abacaxis custam R$ 2,50. Quanto pagarei por 4 desses abacaxis?" (Brasil, 1997, p.110).

De acordo com o esquema presente na figura 1, a multiplicação como proporção se diz quaternária, ou seja, ela relaciona quatro quantidades, duas a duas do mesmo tipo com uma relação de proporção entre elas, como no exemplo (a), temos quatro quantidades: duas relacionadas ao preço dos pacotes de chocolate, e duas ao número deles. A classe de um para muitos ocorre quando uma das quantidades é unitária, e a proporção se dá de forma direta, como no exemplo (a). A classe de muitos para muitos ocorre quando nenhuma das quantidades é unitária, como no exemplo (b).

Tomando o exemplo da relação de um para muitos, podemos propor um esquema de organização para problemas deste tipo, em que a primeira coluna corresponde à quantidade de pacotes de chocolate, e a segunda ao preço total pago:

1 ---------- R$8,00

3 ---------- ? .

O tratamento da multiplicação com o sentido da proporcionalidade é uma forma de ampliar o raciocínio sobre esta operação para além de soma de parcelas iguais, e de estabelecer uma relação multiplicativa entre os valores. Como possíveis estratégias, os alunos podem estabelecer um fator escalar (x3) entre as duas fileiras, tratando a ideia de proporção, ou ainda estabelecer um fator entre a quantidade de pacotes e o preço pago (x8),

estabelecendo uma relação funcional entre as duas quantidades, outra relação muito importante na matemática.

A resolução de problemas foi utilizada nesta experiência por se configurar como uma estratégia para promover uma diversidade conceitual das operações que também proporciona outros aspectos do trabalho matemático, como o significado das questões propostas aos e pelos alunos, o contexto da produção dos alunos e o papel da escrita e da argumentação (Muniz, 2009).

Utilizamos os níveis de raciocínio propostos por Magina, Santos e Merlini (2014) para analisar as produções escritas e explicações orais sobre a tarefa. Tal classificação é organizada em 4 níveis: nível incompreensível de raciocínio, raciocínio aditivo, raciocínio de transição do aditivo para o multiplicativo, e raciocínio multiplicativo. O nível incompreensível se dá quando o aluno não explicita na escrita ou oralmente as operações que usou para resolver o problema, não sendo possível identificar o raciocínio. O pensamento aditivo ocorre quando o aluno resolve o problema por contagem das quantidades, ou por operações de adição. O raciocínio de transição do pensamento aditivo para o pensamento multiplicativo ocorre quando o aluno forma grupo de uma mesma parcela. E por último, o raciocínio multiplicativo ocorre quando o aluno usa da estrutura multiplicativa, em qualquer uma das formas entendidas para a multiplicação.

Contexto

O contexto da experiência é uma turma de 3º ano de uma escola pública do interior de São Paulo, na qual o primeiro autor realizou o estágio obrigatório em virtude da graduação na Licenciatura em Matemática. Durante as aulas diversas observou-se diferentes atividades: rodas de leitura, ateliês, tarefas envolvendo matemática, escrita de texto, entre outras, realizadas em pequenos grupos ou em discussões coletivas.

Neste texto evidenciamos a experiência decorrente do desenvolvimento de atividades com foco em matemática, mais especificamente relacionadas à multiplicação. Descrevemos a atividade do jogo do pega-varetas, aplicada em dois dias, e posteriormente, durante três dias foram aplicados os problemas, que serão descritos aqui mais detalhadamente.

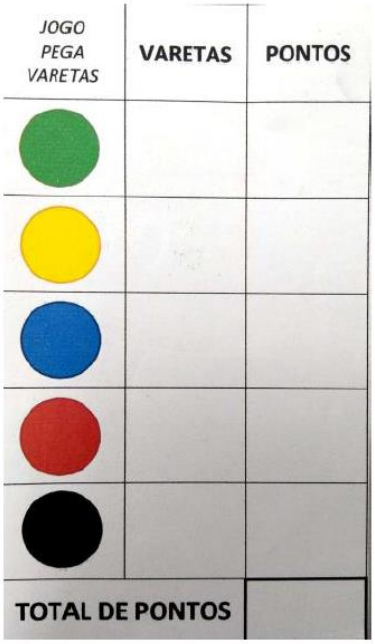
Considerando a organização cotidiana da sala em ateliês, os alunos se dividiram em grupos, e cada um deles fazia uma atividade com tema diferente: escrita, leitura e

matemática, ficando cada grupo em uma parte da sala de aula ou do pátio. A tarefa de matemática do pega-varetas foi desenvolvida no pátio e da resolução de problemas dentro da sala de aula, ambas com o acompanhamento do estagiário. Todos os alunos participaram do jogo do pega-varetas, e 15 alunos da atividade de resolução de problemas, as quais foram analisadas para compor este texto. .

Atividades

O jogo "Pega-Varetas", contém varetas com diferentes cores associadas a distintos pontos. O jogador deve jogar as varetas e o objetivo é pegar uma por vez sem mexer as demais. Ao final foi proposto que os alunos preenchessem uma tabela com a pontuação considerando cor das varetas e o total (figura 3). O jogo foi desenvolvido em grupos de quatro alunos, e o preenchimento da tabela individualmente. A multiplicação era trabalhada por meio do preenchimento da tabela, na coluna de pontos de uma determinada cor, trabalhando a multiplicação como proporção de um para muitos.

Figura 2: Tabela do jogo do pega-varetas.



Fonte: Produzido pelos Autores.

O contexto do jogo pega-varetas foi usado para a resolução de problemas abordando ideias do campo aditivo e do campo multiplicativo (figura 3). Todos os problemas permitem a resolução através da proporção de um para muitos. Além disso, o problema 2 trabalha com a ideia de acrescentar, e o problema 3 com a ideia de dobro, um caso particular dos sentidos da multiplicação como comparação ou proporção.

Figura 3: Apresentação dos problemas para os alunos.


NOME:_____ 3º ANO _____ DATA: ____/____/____

TABELA DE VALORES 1

1
5
10
20
50

PENSANDO NA TABELA 1 DO JOGO **PEGA VARETAS**, RESPONDA AS SITUAÇÕES ABAIXO:

1) **RAFAELA** PEGOU 2 VARETAS VERMELHAS, 3 AMARELAS E 5 VARETAS VERDES. QUANTOS PONTOS **RAFAELA** FEZ?

2) **RAKELLY** PEGOU AS MESMAS VARETAS QUE RAFAELA MAIS 1 PRETA E 4 AZUIS. QUANTOS PONTOS FEZ **RAKELLY**?

3) **APOLLO** PEGOU 2 VARETAS DE CADA, SÓ NÃO PEGOU A VARETA PRETA. QUANTOS PONTOS ELE FEZ?

4) QUANTOS PONTOS **DANIELLE** FARIA SE PEGASSE 7 VARETAS AMARELAS?

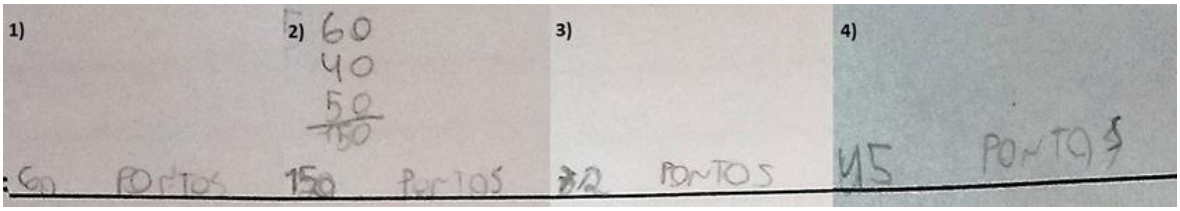
Fonte: Arquivo dos autores.

Durante a realização da atividade observou-se como os alunos resolviam as tarefas buscando compreender o raciocínio utilizado por meio da linguagem oral e das resoluções escritas. Posteriormente fizemos as análises e a classificação dos níveis de raciocínio dos alunos conforme proposta por Magina, Santos e Merlini (2014).

Resultados e Discussões

No primeiro dia foi formado um grupo com quatro alunos em que todos resolveram a tarefa individualmente. Dois deles fizeram os quatro problemas e os outros dois alunos somente os dois primeiros. Os quatro alunos apresentaram um raciocínio de transição entre o pensamento aditivo e o multiplicativo, todos percebidos por meio da explicação verbal dos alunos. O exemplo da resposta de uma das alunas é mostrado na seguinte imagem:

Figura 4: Resolução da 1ª aplicação.



60 pontos *150 pontos* *72 pontos* *45 pontos*

Fonte: Arquivo dos Autores.

Para exemplificar o raciocínio empregado pelos alunos, transcrevemos a fala da mesma aluna da foto anterior para a primeira questão: “20 com 20 é 40, com 5 é 45, com 5 é 50 e com 5 é 55 e mais, 60”. Consideramos raciocínios como este uma transição do raciocínio aditivo para o multiplicativo pois há em alguns momentos agrupamento de parcelas iguais, como na última parcela 5 somada, que corresponde a 5 vezes 1 ponto de cada vareta verde, e na resposta do problema 2, em que os pontos das quatro varetas azuis foram agrupados como 40 no algoritmo da soma.

Notamos preferência pela resolução através do cálculo mental com auxílio dos dedos para contar a quantidade de parcelas. Porém, esta estratégia mostrou-se insuficiente para quantidades grandes de parcelas, como aconteceu na solução do problema 4 da figura 3, em que o erro ocorreu devido a uma contagem de 9 parcelas 5 pelos alunos, em vez de 7.

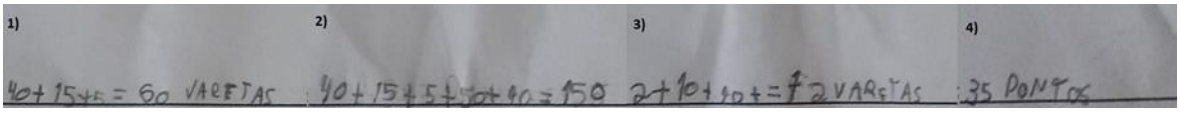
O registro escrito mostrou que os alunos consideram como resolução dos problemas somente a sua resposta final. Em função disso, nos dias seguintes, solicitamos mais explicitamente para os alunos explicarem todo o processo de como chegaram à resposta.

No segundo dia de aplicação foi organizado um grupo com 6 alunos, com formação de duas duplas e outros dois alunos optaram por trabalhar individualmente. Cinco alunos

resolveram todos os problemas, um deles não realizou a tarefa, destes cinco, percebemos quatro demonstram raciocínio de transição entre o pensamento aditivo e multiplicativo, e um aluno com pensamento multiplicativo.

Apresentamos abaixo a resolução de uma das alunas com o raciocínio de transição entre o pensamento aditivo e multiplicativo, novamente percebido pelo agrupamento das parcelas iguais:

Figura 5: Resolução da 2ª aplicação.



40+15+5=60 varetas	40+15+5+50+40=150	2+10 + 40= 72 varetas	35 pontos

Fonte: Arquivo dos Autores.

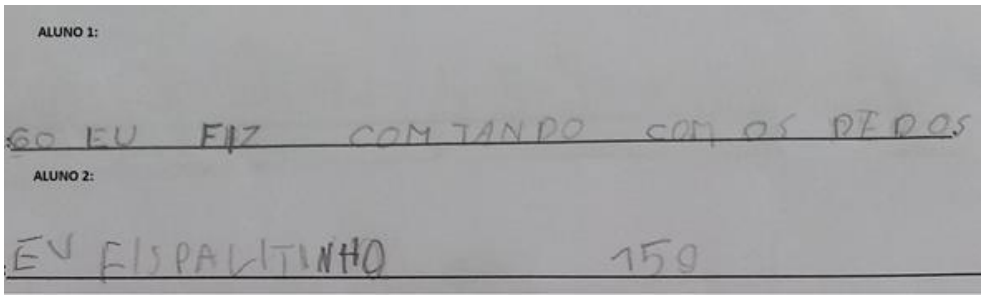
O aluno com pensamento multiplicativo teve resolução escrita do mesmo tipo do exemplo acima, porém verbalmente ele explicou como resolveu a primeira questão: “2 de 20 é 40, 3 de 5 é 15, 40 mais 15 mais 5 é 60”. Houve a omissão da parte 5x1, correspondentes à pontuação das varetas verdes, o que sugere que a multiplicação pela unidade pode ser natural para o aluno, não precisando ser explicada.

A representação escrita dos alunos mudou um pouco em relação ao dia anterior, pois eles já detalharam o algoritmo (e outros registros) que fizeram para obter as respostas. Porém, isso ainda indica que para eles é suficiente escrever a conta para explicar suas resoluções.

A terceira aplicação ocorreu em um grupo com 5 alunos organizados em duas duplas e um aluno que realizou a tarefa individualmente. Em três dos alunos observamos o raciocínio de transição do pensamento aditivo para o multiplicativo, alguns percebidos pela escrita e pela explicação oral, e outros somente pela expressão oral. As produções (verbais e escritas) de um aluno não permitiu identificar o raciocínio envolvido em sua resolução, e uma das alunas mostrou raciocínio multiplicativo.

Desta vez os alunos registraram as explicações das estratégias que utilizaram para resolver os problemas, mas sem explicitar as operações feitas (algoritmos ou outros). Colocamos dois exemplos dessas explicações de alunos diferentes na imagem abaixo:

Figura 6: Resolução da 3ª aplicação.



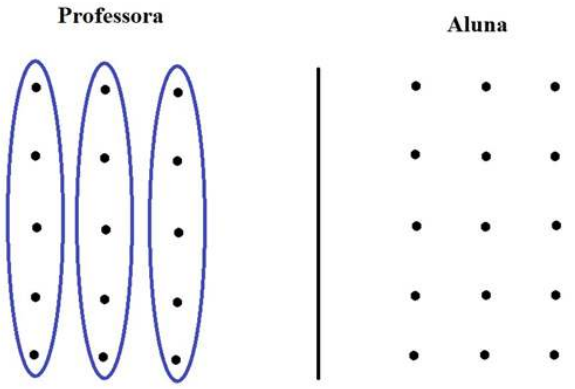
Aluno 1: 60. Eu fiz comtando com os dedos.

Aluno 2: Eu fis palitinho. 150.

Fonte: Arquivo dos Autores.

O raciocínio multiplicativo de uma aluna foi percebido durante as resoluções, quando usou o verso da folha para fazer uma disposição retangular com os números que estava multiplicando, e depois de obter o resultado apagava a resolução; assim, na segunda questão, por exemplo, para calcular quantos pontos eram referentes às quatro varetas vermelhas, ela fazia uma disposição com quatro bolinhas na vertical e dez na horizontal, e contava o total de bolinhas, mostrando o significado da multiplicação como disposição retangular. A professora da turma nos informou que não houve o tratamento anterior da multiplicação como disposição retangular, mas que ao fazer a soma de parcelas iguais, dispunha os elementos de forma que cada parcela fosse uma coluna vertical, como mostrado na figura 7 para o exemplo 3x5.

Figura 7: Esquema da professora e esquema da aluna.



Fonte: Produzido pelos autores.

Dos alunos analisados, 11 apresentação raciocínio de transição entre pensamento aditivo e multiplicativo, dois apresentaram raciocínio multiplicativo e dois apresentaram o nível incompreensível. Primeiramente discutimos os dois casos de alunos com nível incompreensível. Para ambos o observamos que não houve envolvimento com a atividade, e mesmo com o número reduzido de alunos em contato com o estagiário e uma interação mais próxima não foram suficientes para a participação deles. Este fato chama a atenção para se pensar em diferentes estratégias de ensino e de organização da sala para buscar participação mais ativa destes alunos.

Observamos que uma concentração de alunos com o raciocínio de transição entre o pensamento aditivo e multiplicativo. Consideramos este fato esperado para uma turma de terceiro ano que começou a ter contato com estruturas multiplicativas naquele ano, iniciando pela soma de parcelas iguais. No entanto considera-se necessário manter o trabalho com problemas que tratam da estrutura multiplicativa para uma ampliação conceitual dos alunos e melhor entendimento da operação. O fato de não haver entre os alunos algum resolvendo os problemas com pensamento puramente aditivo mostra que as estratégias utilizadas pela professora têm sido eficazes para introduzir a operação de multiplicação e a expansão do Campo Conceitual Multiplicativo.

Entre os dois alunos que desenvolveram um raciocínio multiplicativo nas atividades, um deles já havia demonstrado fazer operações de multiplicação numa atividade anterior, mostrando uma aprendizagem rápida da multiplicação. A outra aluna não mostrava o mesmo

desempenho no início das atividades, ressaltando a importância desta experiência para o processo para sua aprendizagem e consolidação do raciocínio presente no esquema utilizado.

As resoluções escritas dos alunos também é outro ponto importante de se observar. Embora os alunos tenham elaborados registros diversos, a partir da orientação do estagiário com os três grupos nos dias de aplicação, observou-se a que da escrita do resultado final (grupo 1), passou-se para a escrita das operações realizadas (grupo 2), e para o registro de algumas estratégias utilizadas para realizar as operações (grupo 3). Porém, não observamos a explicação das resoluções e raciocínios como na linguagem verbal. O sentido mostrado pelos alunos para a escrita na matemática está vinculado somente aos números, o que mostra uma necessidade de trabalhar a escrita em atividades matemáticas.

Conclusão

Como experiência de estágio, as atividades foram bem enriquecedoras no sentido de desconstruir a concepção simplista de multiplicação para um (futuro) professor, mostrando que a matemática elementar trabalhada no início da escolarização é também muito complexa. Ainda considerando o aspecto didático, propiciar diferentes formas de abordagem da multiplicação, nas atividades apresentada neste texto, e em outras desenvolvidas na escola, e adotar diferentes estratégias para desenvolvê-las, bem como a escuta do aluno, que só pôde ser percebida no contato direto com eles durante as atividades, trouxe importantes aprendizagens para a formação profissional enquanto docente.

A partir da tarefa de resolução de problemas, pudemos perceber alguns pontos que precisam continuar a ser abordados e investigados nas atividades sobre do campo multiplicativo: necessidade de atividades que foquem de fato em estruturas multiplicativas, para construir a ideia de multiplicação com os alunos; o tratamento dos diferentes sentidos da multiplicação de modo a ampliar o seu entendimento; necessidade de trabalhar a escrita em problemas de matemática, não se resumindo às operações aplicadas; e importância do trabalho em grupos pequenos com interação do mediador e entre os alunos.

Referências

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1997) *Parâmetros curriculares nacionais: matemática.* Brasília: MEC/SEF, Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2018.

_____. Ministério da Educação. (2017) *Base nacional comum curricular*. Brasília, DF: MEC, Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2018.

Magina, S.; Santos, a.; Merlini, V. (2010) Quando e como devemos introduzir a divisão nas séries iniciais do ensino fundamental? Contribuição para o debate. *Em Teia: revista de educação matemática e tecnológica iberoamericana,* Recife,(v. 1, n. 1), (p. 1-23).

_____. (2014) O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. *Ciência & Educação* (Bauru), (v. 20, n. 2).

Muniz, C. A. (2009) Diversidade dos conceitos das operações e suas implicações nas resoluções de classes de situações. In: Guimarães, G.; Borba, R. (Org) *Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização*. V. 6. Recife: SBEM,(p. 101-118).

Nunes, T.; Bryant, P. (1997) *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Vergnaud, G. (1983) Multiplicative structures. In: LESH, R.; Landau, M. (Eds.). *Acquisitions of mathematics concepts and procedures.* New York: Academic Press, (p. 127-174).

_____. (1988) Multiplicative structures. In: Hiebert, H.; Behr, M. (Eds.). *Research agenda in mathematics education:* number concepts and operations in the middle grades. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1988, p. 141-161.

_____. (1990) La Teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathèmatiques,* (v. 10, n. 2), (p. 133-170),

_____. (1993) Teoria dos campos conceituais. *Anais do 1º seminário internacional de educação matemática do Rio de Janeiro*, (p. 1-26).

Recebido: 15/01/2017

Aceito:22/02/2018