Tangram
Revista de Educação Matemática

CURRÍCULO DE ESTRUTURA ALGÉBRICA GRUPO: ANÁLISE PRELIMINAR DE UM LIVRO DIDÁTICO

ALGERIA STRUCTURE GROUP CURRICULUM: PRELIMINARY ANALYSIS OF A DIDACTIC BOOK

Ana Paula Teles de Oliveira[1]

Ana Lucia Manrique[2]

RESUMO: Neste artigo temos como objetivo apresentar uma análise preliminar do capítulo sobre estrutura algébrica grupo do livro Álgebra Moderna empregado em cursos de Licenciatura em Matemática. Durante o período de nosso doutoramento em Educação Matemática, tivemos a oportunidade de analisar alguns livros didáticos que trabalham esse assunto, sendo ele o único redigido para ser utilizado apenas em cursos de Licenciatura em Matemática. Metodologicamente consiste em um trabalho documental, denominado síntese, que faz parte da nossa pesquisa intitulada “Um estudo sobre estrutura algébrica grupo: potencialidades e limitações para generalização e formalização”. Segundo Sacristán, há diferentes níveis de currículo, contudo aqui retratamos o currículo moldado aos professores que ministram esse componente curricular. Observamos que antes do conteúdo é apresentado o contexto histórico, que alguns exercícios possuem respostas e que ao evitarem o formalismo matemático, as demonstrações tornam-se confusas.

PALAVRAS-CHAVE: Estrutura algébrica grupo; Currículo; Livro didático.

ABSTRACT: In this article we aim to present a preliminary analysis of the chapter on algebraic structure group of the book Modern Algebra employed in courses of Degree in Mathematics. During the period of our doctorate in Mathematics Education, we had the opportunity to analyze some textbooks that worked on this subject, of which this one is written only to be used only in courses of Degree in Mathematics. Methodologically consists of a documentary work, called Synthesis, which is part of our research entitled "A study on algebraic group structure: potentialities and limitations for generalization and

[1]Doutora em Educação Matemática pela PUC-SP . Docente da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

[2] Docente no programa de pós-graduação em Educação Matemática da PUC-SP.

formalization". According to Sacristán, there are different levels of curriculum, however here we portray the curriculum shaped to the teachers who teach this curricular component. We observe that before the content is presented the historical context, some exercises have answers and that, by avoiding the mathematical formalism, the demonstrations become confused.

Keywords: Algebraic structure group; Curriculum; Textbook.

INTRODUÇÃO

Ao iniciarmos esse artigo refletimos sobre a afirmação feita pelos pesquisadores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) que relatam que a atenção dos pesquisadores da Educação Matemática em relação ao ensino da álgebra parece adormecida. Em 2013, duas décadas após essa declaração, realizamos uma busca no banco de teses no portal Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior (CAPES) com as palavras-chaves "ensino superior álgebra" e "álgebra licenciatura em matemática" e deparamo-nos com apenas quinze pesquisas sobre o assunto entre os anos de 1998 e 2012. Embora nessa busca haja somente quinzes pesquisas relacionadas ao ensino superior e a álgebra, ou seja, em média uma por ano, isso não descaracteriza sua importância, uma vez que é a linguagem da álgebra que permeia as áreas da matemática. Além do mais, esses autores discorrem sobre o pensamento algébrico abstrato e retratam alguns aspectos considerados imprescindíveis à linguagem simbólica - formal. Para eles o simbolismo sucinto possui a capacidade de abreviar o tempo de resolução de uma situação problema com as características do total e da estrutura da situação. Em seguida, retratam a facilidade da simplificação dos cálculos, que culminam com a possibilidade de realização de cálculos com quantidades variáveis, o que demonstra sua relevância.

É importante destacar que, como afirmam Bianchini e Machado (2010), apesar da sua abrangência, a álgebra é um obstáculo enfrentado pelos alunos durante a vida escolar. E, por isso, acreditamos ser pertinente enfatizar que Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) expressam a necessidade de repensar o ensino de álgebra.

Para tanto, focalizamos a estrutura algébrica grupo como objeto. Por se tratar de um conceito abstrato, a estrutura algébrica evidencia sua difícil compreensão, o que favoreceu a seleção do tema do trabalho.

Para realizarmos nossa pesquisa de doutoramento, fizemos uma busca no banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior resultou em três pesquisas (ALBURQUERQUE, 2005; BUSSMANN, 2009; ELIAS, 2012) sobre o tema.

A tese de Alburquerque (2005), “O conceito de grupo: sua formação por alunos do curso de matemática”, objetiva analisar o conceito de Estrutura Algébrica Grupo entre 18 estudantes matriculados em duas turmas de Álgebra I, no segundo semestre de 2002, do curso de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, *campus* Campina Grande, sendo a pesquisadora docente nessa instituição.

Os instrumentos para coleta de dados são três sequências didáticas constituídas por questões abertas e situações problemas. Algumas das atividades basearam-se em livros como Fraleigh (1989) e Dienes e Golding (1975), isso porque a pesquisadora desejava atividades diferentes das que se encontram em livros de álgebra, que para ela, somente apresenta exercícios que verificam se um conjunto com uma operação constitui-se grupo. Elas foram aplicadas em três ocasiões distintas durante um período de quatro meses. Em cada sequência os estudantes tiveram dois momentos: o primeiro, no qual escreveram suas resoluções e o segundo composto por uma entrevista individual sobre as soluções escritas.

Nas considerações finais Alburquerque (2005) relata a grande dificuldade apresentada pelos estudantes nas soluções escritas, pois eles revelaram um número considerável de soluções inesperadas e incoerentes com as atividades das sequências, que diminuíram após as entrevistas. Além disso, argumenta que o objetivo inicial das suas intervenções na entrevista era buscar conhecimentos implícitos nas soluções dadas pelos alunos, contudo isso foi ampliado, visto que os alunos conseguiam organizar o pensamento. Ela exemplifica esse fato dizendo que inicialmente os alunos apresentam uma dificuldade no início do diálogo, porém, depois o pensamento se organiza e se materializa numa linguagem mais articulada.

A dissertação de Bussmann (2009), “Conhecimentos mobilizados por estudantes do curso de matemática sobre o conceito de grupo”, tem como objetivo investigar os conhecimentos mobilizados por sete estudantes, participantes de grupo pesquisa sobre Álgebra e o ensino de Álgebra, coordenado pela professora Angela M. P. das D. Savioli, orientadora da pesquisa.

O trabalho de Anna Sfard (1991), relacionado à formação dos conceitos matemáticos, fundamentou essa pesquisa. Bussmann (2009) afirma que para ela, apesar de nas últimas décadas terem sido realizadas pesquisas com intuito de melhorar o ensino de matemática, os resultados ainda não são satisfatórios e que a matemática é a ciência mais abstrata. Assim, declara que segundo Sfard (1991), para o desenvolvimento do conceito matemático são necessárias noções abstratas denominadas: operacional (processo) e estrutural (objeto).

Para a elaboração do instrumento de coleta de dados o pesquisador elaborou um instrumento piloto com seis questões. Três questões envolviam técnicas de verificação para identificar a possibilidade de tratar-se de grupo, enquanto as outras três faziam referência ao conceito grupo. Após uma reflexão, acrescentou outras duas sobre permutações por considerar sua importância histórica, fazendo com que o instrumento para coleta de dados fosse composto por oito questões. Todas as questões foram formuladas e adaptadas a partir de livros de álgebra, preferencialmente, aquelas não usualmente vistas pelos alunos.

Em relação aos conhecimentos mobilizados pelos alunos por meio dos registros escritos, o pesquisador citou noção de conjuntos, operações de conjuntos, definição, propriedade e exemplos de grupo, conjuntos numéricos, operações em conjuntos numéricos, propriedades das operações nos conjuntos numéricos, matrizes, funções, aplicações, transformações lineares no plano, uso de linguagem algébrica, simbologia algébrica, conjunto vazio.

Ao terminar, Bussmann (2009) concluiu que os conhecimentos mobilizados pelos alunos foram, em sua maioria, de caráter operacional e a concepção estrutural apareceu timidamente em algumas questões. Todas as fases ocorreram nos registros escritos, porém se destacou a interiorização e a condensação.

Segundo Elias (2012), sua dissertação, “Dificuldades de estudantes de licenciatura em matemática na compreensão de grupo e/ou isomorfismo de grupos”, tem como objetivo identificar e interpretar dificuldades apresentadas por oito estudantes do curso de matemática na Universidade Estadual de Londrina na compreensão de conceitos de grupos ou/e isomorfismo de grupos. Para tanto, o pesquisador elaborou um roteiro com algumas perguntas e realizou entrevistas semiestruturadas para aplicar em estudantes que já haviam estudado os conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos. A partir de então, considerou as respostas incorretas dos sujeitos, por acreditar que elas forneceriam dados para identificação das dificuldades na compreensão desses conceitos.

De acordo com essa pesquisa, o instrumento para coleta de dados, ou seja, a entrevista semiestruturada, teve seu roteiro elaborado a partir dos trabalhos de Dubinsky et al. (1994), Dubinsky (2002), Brown et al. (1997) e Lajoie (2000). O fundamento para a identificação das dificuldades é a teoria APOS, de Ed Dubinsky, que identifica a concepção (Ação, Processo, Objeto) dos estudantes e na teoria de reificação, de Anna Sfard.

Para investigar as dificuldades, elaborou um instrumento para coleta de dados com treze perguntas, em sua maioria, retiradas de questionários empregados em pesquisas estrangeiras sobre aprendizagem de conceitos de Álgebra Abstrata. Cada questão foi entregue impressa ao estudante que pôde respondê-la individualmente, de forma verbal ou escrita. Após o levantamento das dificuldades, identificou-se o estágio da compreensão do conceito de grupo e/ou isomorfismo de grupo que o estudante se encontrava em relação às teorias APOS e reificação.

Após a análise, Elias (2012) identificou 29 dificuldades apresentadas pelos estudantes, divididas em cinco blocos: o primeiro relacionado a conjunto, o segundo a função, o terceiro a grupo, o quarto isomorfismo de grupo e o quinto seriam as dificuldades relatadas pelos próprios estudantes.

O pesquisador declara que algumas das dificuldades apresentadas na construção do conceito podem ser atribuídas a enorme quantidade de conhecimento matemático necessário e a pouca maturidade de alguns estudantes e comenta a necessidade de se refletir se o objetivo da Álgebra estava sendo realmente alcançado. Além disso, salienta que esse componente curricular no curso de Licenciatura precisa de uma abordagem diferenciada, ou seja, mais do que apenas o ensino de conteúdo.

As pesquisas (ALBURQUERQUE, 2005; BUSSMANN, 2009; ELIAS, 2012) evidenciavam que após a apresentação do assunto a grande maioria dos alunos ainda demonstrava dificuldades. Dessa forma, salientamos que se trata de um conteúdo complexo e, por isso, faz-se necessário que pesquisadores se dediquem a estudos relacionados ao ensino dessa estrutura.

Conforme Sacristán (2000), existem seis níveis no processo de construção curricular, o que nos leva a acreditar na necessidade de estudos sobre todos os níveis dessa construção. Neste trabalho, detemo-nos no currículo moldado aos professores, ou seja, aquele apresentado nos livros didáticos em que existe a codificação dos assuntos do currículo prescrito. Aqui será retratado nossa experiência nessa análise, necessária para o levantamento bibliográfico de nossa pesquisa.

Dividimos o artigo em quatro partes, sendo a primeira “Referencial teórico metodológico e metodologia”, que apresenta a metodologia da primeira parte da nossa pesquisa, que foi uma análise documental. Em seguida a seção “O livro Álgebra Moderna”, em que descrevemos informações sobre os autores e sobre a organização do livro. No tópico denominado “Estrutura algébrica grupo” analisamos esse assunto a partir de exemplo, exercício e proposição e encerramos com as “Considerações Finais”.

REFERENCIAL TEÓRICO METODOLÓGICO E METODOLOGIA

A partir de variados documentos escritos sobre um determinado tema pode-se fazer uma análise com o objetivo de confrontar ideias, encontrar semelhanças, sistematizar... Há diferentes maneiras para a realização desse procedimento, entre elas, destacam-se o estudo da arte, o estudo tipicamente histórico e meta-análise. Neste artigo será realizada uma síntese que, de acordo com Fiorentini e Lorenzato, está relacionada na meta-análise, ou seja, “uma revisão sistemática de outras pesquisas, visando realizar uma avaliação crítica delas e/ou produzir novos resultados ou sínteses a partir do confronto desses estudos, transcendendo aqueles anteriormente obtidos" (Fiorentini, Lorenzato, p.103)

Para a realização da nossa pesquisa de doutoramente foi necessário o levantamento dos materiais que tratavam sobre a estrutura algébrica grupo nos cursos de Licenciatura em Matemática. Para tanto, realizou-se uma busca no banco de teses e dissertações no sitio eletrônico de busca da CAPES. Além de análises de alguns livros que tratavam sobre o assunto. Os livros escolhidos foram escritos por Gonçalves (2003), Garcia e Lequain (2002), Domingues e Iezzi (2003) e Herstein (1970). Os três primeiros livros foram utilizados pelos professores que ministram esse componente curricular na UESB – *campus* Jequié e estão disponíveis aos alunos na biblioteca da instituição, e o último foi um dos livros que utilizamos em nossa formação acadêmica. Essa foi à primeira parte da nossa pesquisa.

Dos livros que analisamos, escolhemos o livro Álgebra Moderna (DOMINGUES; IEZZI, 2003), dentre os quais, é o único redigido especificamente para estudos da álgebra nos cursos de Licenciaturas em Matemática.

O LIVRO ÁLGEBRA MODERNA

O livro Álgebra Moderna foi escrito por Hygino H. Domingues e Gelson Iezzi (DOMINGUES; IEZZI, 2003). Hygino H. Domingues foi professor da Universidade Estadual Paulista (UNESP) e da PUC - SP e Gelson Iezzi professor da PUC - SP. Esse livro, segundo seus autores, é a reformulação, com ampliações, de uma edição anterior e destina-se à utilização dos cursos de licenciaturas em matemática. Com o objetivo de deixar o texto "leve e agradável" (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 3), os autores empregam uma linguagem com menos simbolismo, utilizam mais exemplos e ilustrações, introduzem cada capítulo com aspectos históricos, acreditando ser essa uma forma de motivação e usam o formalismo matemático com moderação.

Esse livro possui 368 páginas, subdivididas em apresentação, sumário, sete capítulos, respostas, índice remissivo (índice alfabético) e Bibliografia (referências). Apesar dos autores afirmarem que empregam o formalismo matemático com moderação, o capítulo I é dedicado a noções de conjuntos e demonstrações. Eles relatam que no livro existem várias demonstrações de teoremas e que a maioria dos alunos terá experiência em demonstrações no curso de álgebra. No capítulo II há uma introdução sobre a aritmética dos números inteiros. O terceiro capítulo aborda relações, aplicações e operações. Na maioria das vezes, em uma estrutura é necessário um conjunto não vazio e uma operação, e esse autor dedica 26 páginas à operação. O quarto capítulo trabalha estrutura de grupos e anéis. O capítulo V aborda tanto anéis quanto corpos.

ESTRUTURA ALGÉBRICA GRUPO

O capítulo IV, intitulado Grupos, foi escrito por Hygino H. Domingues e os exercícios propostos e resolvidos por Gelson Iezzi. Ali são dedicadas 72 páginas sobre o assunto. O capítulo inicia com uma nota histórica sobre o tema e depois apresenta a seguinte definição:

> Um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio G e uma operação $(x, y) \mapsto x * y$
> sobre G é chamado grupo se essa operação se sujeita aos seguintes axiomas:
> associatividade
> $(a * b) * c = a * (b * c)$, quaisquer que sejam $a, b, c \in G$;
> existência de elemento neutro
> existe um elemento $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$, qualquer que seja $a \in G$;
> existência de simétricos
> para todo $a \in G$, existe um elemento $a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$.
> Se, além disso, ainda se cumprir o axioma da comutatividade
> $a * b = b * a$ quaisquer que sejam $a,b \in G$,
> o grupo recebe o nome de grupo comutativo ou abeliano (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 138 -139).

Apesar de ter citado Niel Henrik Abel na parte histórica, não há qualquer menção de que o termo abeliano refere-se a esse matemático. Contudo, acreditamos que poderiam explorar o fato de que esse termo foi uma homenagem ao matemático Abel, por seus trabalhos em grupos comutativos, fazendo relações e discussões entre os assuntos trabalhados, como Abel, abelino, grupos e grupos comutativos, pois, assim, esses assuntos não seriam apresentados tão fragmentados e, talvez, minimizaria a complexidade do assunto.

Após indicar que um grupo poderá ser representado com a seguinte notação $(G,*)$ ou G quando estiver clara a operação utilizada, enumeram várias propriedades de um grupo, como, por exemplo, a unicidade do elemento neutro, ou ainda, a unicidade do elemento simétrico de cada elemento de *G*, chamadas de propriedades imediatas. Acreditamos que o intuito seja esclarecer a afirmação dos autores de que demonstrariam cada condição no capítulo III. Observamos que esses autores utilizam alguns termos diferentes dos usados em outros livros: para o elemento inverso emprega-se elemento simétrico e, ao invés de falar a regra do cancelamento, afirmam que todo o elemento de um grupo é regular. Os autores explicam o que é um grupo aditivo e um grupo multiplicativo e que utilizaram a notação multiplicativa para indicar a operação por ser mais prática. Eles, ainda, definem grupo finito e ordem de um grupo, relacionando-o com as tábuas do grupo, citam Arthur Cayley como o provável precursor do estudo abstrato da teoria de grupo, apesar de não o citarem na parte histórica. Para nós, a falta de informações adicionais sobre Cayley e o motivo que levam os autores a afirmarem que é o provável percursor da estrutura algébrica estudada, podem levar a despersonalização desse assunto. Não encontramos qualquer comentário sobre grupo infinito e isso poderia ser explorado nesse momento, contrapondo ao grupo finito que fora explorado. A importância do grupo infinito é devido à riqueza de exemplos, que são explorados nesse componente curricular, por meio dos conjuntos numéricos. Contudo, constatamos que nesse livro os exemplos desse tipo foram metade dos apresentados.

Em seguida, expõem 14 exemplos de grupos em que os primeiros sete são grupos aditivos ou grupos multiplicativos de conjuntos numéricos, todos infinitos. Apesar de inicialmente mencionarem a notação para indicação de grupos, não a utilizam nos exemplos, o que, provavelmente, enriqueceria o texto. Os exemplos oitavo e nono são baseados em matrizes. O décimo e décimo primeiro são de classes dos restos e o décimo segundo Grupos de Permutações. O décimo terceiro forma-se a partir das simetrias do triângulo equilátero e do quadrado. Para o triângulo utiliza as rotações de 0º, 120º e 240º em torno do baricentro no sentido anti-horário e as reflexões de 180º em torno da mediana e afirmam que essas são todas as simetrias. A partir da tábua dessas simetrias, com todas as composições possíveis, esclarecem tratar-se de um grupo não abeliano. Para o quadrado utilizam as rotações de 0º, 90º, 180º, 270º, centralizadas em seu centro, sentido anti-horário, e as reflexões de 180º em torno das mediatrizes dos lados do quadrado. De acordo com os autores, essas são todas as possibilidades. A partir da tábua de todas as simetrias e suas composições esclarecem tratar-se de um grupo não abeliano. O último exemplo é dos Grupos Driedrais, ou seja, a generalização de simetrias para qualquer polígono.

Observamos que antes de apresentar os exemplos, há a definição de grupo finito e ordem de um grupo. Contudo, poderiam definir, também, grupos infinitos, aproveitando os exemplos para explicar esses conceitos.

Ao iniciarem subgrupos, expõem primeiramente conjuntos numéricos, como o grupo aditivo dos reais, tendo o subgrupo aditivo dos inteiros, seguido de um exemplo a partir do grupo de permutação. E, assim, definem subgrupo de um grupo.

Dessa forma, aparece a primeira proposição, que indica como identificar que um conjunto de um grupo é um subgrupo, definida no Quadro 1.

Quadro 1: Primeira proposição apresentada no capítulo sobre grupos

Proposição 1: Seja $(G,*)$ um grupo. Para que uma parte não vazia $H \subset G$ seja um subgrupo de G, é necessário e suficiente que $a * b'$ seja um elemento de H sempre que a e b pertencem a esse conjunto.
Demonstração:
($\rightarrow$) Indiquemos por e e e_h respectivamente, os elementos neutros de G e H. Como

$$e_h * e_h = e_h = e_h * e$$

e todo elemento do grupo é regular em relação a *, então $e = e_h$.

Tomemos agora um elemento $b \in H$ e indiquemos por b' e b_h' seus simétricos em G e H, respectivamente. Como, porém,

$$b_h' * b = e_h = e = b' * b$$

então $b_h' = b'$ (novamente pelo fato de todos os elementos do grupo serem regulares para sua operação). Por fim, se $a,b \in H$, então $a * b' \in H$.
($\leftarrow$) Como, por hipótese, H não é vazio, podemos considerar um elemento $x_0 \in H$. Juntando esse fato a hipótese: $x_0 * x_0' = e \in H$. Considerando agora um elemento $b \in H$, da hipótese e da conclusão anterior segue que:

$$e * b' = b' \in H$$

Mostremos agora que H é fechado para a operação *. De fato, se $a, b \in H$, então, levando em conta a conclusão anterior, $a, b' \in H$. De onde (novamente usando a hipótese):

$$a *(b')' = a * b \in H$$

Falta mostrar a associatividade em H, mas isso é trivial, pois, se $a, b, c \in H$, então $a, b, c \in G$ e, portanto, $a * (b * c) = (a * b) * c$ (já que esta propriedade vale em G) (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 154).

Fonte: Livro Álgebra Moderna (2003, p.154)

Ao observarmos a demonstração da Proposição 1, notamos que, apesar da afirmação dos autores de amenizarem o rigor matemático para que texto fique mais leve e agradável, utilizam expressões e não esclarecem o que demonstram ou representam. No Quadro 2 descrevemos os momentos em que isso ocorre. Destacamos que nessa proposição por hipótese, *G* é um grupo e *H* é um subconjunto não vazio de *G*.

Quadro 2: Conclusões que poderiam ser escritas na Proposição 1 do livro Álgebra Moderna

Representação	O significado que os autores deixaram de escreverem
$(\rightarrow)$	Hipótese: *H* é subgrupo de *G*. Tese: $a * b' \in H$, para todo $a, b \in H$.
$e = e_h$	O elemento neutro do grupo *G* é o elemento neutro do subgrupo *H*.
$b_h' = b'$	O elemento inverso de *b* pertencente a *H* é o elemento inverso de *b* pertencente a *G*.
$(\leftarrow)$	Hipótese: $a * b' \in H$, para todo $a, b \in H$. Tese: *H* é subgrupo de *G*.
$x_0 * x_0' = e \in H$	*H* tem elemento neutro. E o elemento neutro *H* é o elemento neutro de *G*.
$e * b' = b' \in H$	Todo elemento de *H* tem inverso. E o inverso de cada elemento é o do grupo *G*.

Fonte: Própria

Ao utilizarem os símbolos (→) e (←) será que se esclarece o que temos nessa proposição como hipótese e tese? Consideramos importante esclarecer isso, uma vez que auxilia na compreensão da demonstração. Percebemos, também, a ausência de conclusões, como por exemplo, (←) em que a demonstração revelaria que *H* é subgrupo de *G*. Ao definir um subgrupo, os autores, ignoraram as duas condições: a primeira, descrita como *H*, é fechada para a operação *, identificável ao escreveram "Mostremos agora que *H* é fechado para a operação *" e a segunda atesta que *(H,*)* é um grupo. Em relação à definição de grupo, encontramos três requisitos: o primeiro vincula-se a associatividade, indicada em "Falta mostrar a associatividade em *H*...". O próximo requisito refere-se à existência do elemento neutro, em que não se esclarece em que momento ela foi provada. Contudo, ao terminarem essa demonstração, no mesmo parágrafo expõem o último requisito, ou seja, a existência de simétricos, visto em "Juntando esse fato a hipótese: $x_0 * x_0' = e \in H$. Considerando agora um elemento $b \in H$, da hipótese e da conclusão anterior segue que: $e * b' = b' \in H$." Os autores afirmam mais de uma vez que os elementos de *H* são regulares nessa demonstração, o que nos leva a concluir que se preocupavam com processo dos cálculos e não com o objetivo de cada parte dela. O fato de evidenciarmos em cada parte da demonstração o objetivo que queremos alcançar e a sua conclusão, revela cada passo utilizado na lógica, esclarecendo o processo para o entendimento da demonstração completa da proposição.

Após a proposição, os pesquisadores apresentam alguns exemplos em que a empregam para verificar o que são subgrupos. Ao terminarem-na, há uma seção com 47 exercícios sobre grupos e subgrupos, além de três exercícios complementares.

Um aspecto interessante é que esse livro apresenta respostas em alguns exercícios, como observamos no Quadro 3.

Quadro 3: Exemplo de exercício e a respectiva resposta

Exercício	7. Verifique se $\mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}$ é grupo em relação a cada uma das seguintes leis de composição: a) $(a, b) * (c, d)= (a+c, b+d)$ b) $(a, b) \Delta (c, d)= (a.c, b.d)$ (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 156).
Resposta	7. a) sim b) não, pois $U_{.}$ $\mathbb{Z}$ X $\mathbb{Z}$ = {(1, -1), (1, 1), (-1, 1), (-1, -1)} (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 355).

Fonte: Livro Álgebra Moderna (2003, p. 156, 355))

Observamos que o objetivo dos exercícios não é a demonstração, uma vez que empregam a palavra "verifique" e reforçam com a resposta dada ao item a) 'sim'. Consideramos a explicação dada ao item b) confusa, visto que para não ser grupo faz-se necessário deixar de verificar uma das seguintes condições: associatividade, existência do elemento neutro, existência de simétricos e a explicação oferecida não informa qual das condições não é válida. A nossa experiência permite-nos identificar que a propriedade não é válida devido à propriedade dos elementos simétricos. Observamos que os autores justificam com a notação $U_{.}\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, definida, assim, no capítulo III:

> Se * é uma operação sobre E com elemento neutro e, indica-se por $U_*(E)$ o conjunto dos elementos simetrizáveis de E para a operação *:
> $U_*(E) = \{x \in E \mid \exists\ x' \in E: x' * x = e = x * x'\}$ (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 118) .

De certa forma, por meio dessa definição, revelam a existência de quatro elementos simétricos. Isso nos leva a questionar qual é o objetivo desse exercício: Saber quais são as condições para um conjunto ser grupo, ou fixar a notação feita no terceiro capítulo? Acreditamos que para responder essa dúvida poderiam utilizar a notação, porém precisariam esclarecer qual propriedade não é verificada além de explicar porque esse conjunto comprova essa afirmação.

Esse capítulo é subdivido em seis tópicos. Observamos que, embora não haja um padrão sobre o que será escrito, os autores iniciam cada tópico com pelo menos um parágrafo sobre o assunto que será tratado, o que permite ao leitor identificá-lo facilmente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Destacamos as palavras de Bianchini e Machado (2010), que declaram que apesar da sua abrangência, a álgebra é um obstáculo enfrentado pelos alunos durante a vida escolar. E, por isso, acreditamos ser pertinente enfatizar que Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) expressam a necessidade de repensar o ensino de álgebra, e no caso específico, a estrutura algébrica grupo.

Como Sacristán (2000) explica, existem seis níveis no processo de construção curricular, o que nos leva a acreditar na necessidade de estudos sobre todos os níveis dessa construção. Ao detemo-nos no currículo moldado aos professores, refletíamos em como a estrutura algébrica grupo foi apresentada no livro Álgebra Moderna ((DOMINGUES; IEZZI, 2003).

Um fato notável e relevante é que os autores redigiram esse livro especificamente para estudos da álgebra nos cursos de Licenciaturas em Matemática. Os alunos de um curso de Bacharelado são distintos dos discentes de Licenciatura, uma vez que a obtenção dos diplomas darão direitos diferentes. Sendo assim, sentimos a necessidade de serem apresentados aspectos específicos a cada formação, mesmo que o componente curricular seja o mesmo.

Durante nossa pesquisa, concluímos a relevância da apresentação do contexto histórico, para que a matemática não fique descontextualizada e até despersonalizada.

Apesar dos autores dedicarem um tópico especifico para exploração deste contexto, ressaltamos que poderiam tê-lo explorado de forma mais aprofundada e, quando possível, relacioná-lo à teoria. Sentimos falta desse aprofundamento, por exemplo, quando os autores definem um grupo abeliano e deixam de relacioná-lo ao matemático N. H. Abel, que fora mencionado anteriormente. Sugerimos relacionar os termos que aparecem no texto, como Abel, abelino, grupos não comutativos e grupos comutativos, pois, assim, esses assuntos não seriam apresentados de forma fragmentados, o que poderia minimizar a complexidade do assunto. Ou, ainda, quando citam A. Cayley alegando ser "provavelmente o precursor do estudo abstrato da teoria dos grupos" (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p.140) sem fazer, contudo, qualquer referência na nota histórica. Aqui, acreditamos ser possível explorar, no contexto histórico, o motivo pelo qual os autores acreditam que Cayley é o provável precursor do estudo dessa estrutura.

Um ponto que nos fez refletir, foi a afirmação de que o formalismo matemático seria empregado com moderação. Questionamo-nos se privar futuros professores dessa linguagem tão específica seria conveniente. Isso foi reforçado ao analisarmos a demonstração da Proposição 1, em que notamos que ao utilizarem alguns símbolos sem esclarecerem o que demonstravam ou representavam torna-a confusa. Por isso, sugerimos que formalização matemática quando empregada seja detalhada, para que a complexidade do assunto seja minimizada. Outro ponto foi à utilização de termos diferentes utilizados pelos matemáticos, como para o elemento inverso emprega-se elemento simétrico e, ao invés de falar a regra do cancelamento, afirmam que todo o elemento de um grupo é regular. Não conseguimos identificar quais seriam os ganhos da troca de termos, e se realmente não existir qualquer benefício, por que privar os alunos de conhecerem os termos da linguagem matemática? Outro fato é a exploração do termo infinito, utilizados em outros componentes curriculares, como Cálculo. A utilização desse termo para grupos infinitos amplia esse conceito.

Inquietou-nos observar que os autores definiram operação como sendo uma aplicação binária e fechada, o que parece ter ocorrido somente para se apresentar as estruturas algébricas, deixando de explorar esse conceito, um tema tão comum tanto no ensino fundamental quanto no médio, ao, por exemplo, estudar a aplicação raiz quadrada que não é fechada e nem binária no conjunto dos números naturais, ou a exponencial, que não é binária. Acreditamos que isso pode ser uma perda, visto que o termo operação é sempre utilizado na educação básica e ensino médio e a formalização deste conceito poderia possibilitar ao aluno relacionar o conhecimento adquirido em seus estudos anteriores com o assunto em questão.

Em relação aos exercícios com respostas, ressaltamos que o objetivo da atividade precisa ser claro, para, assim, auxiliar a aprendizagem da estrutura algébrica grupo, sem promover dispersão da proposta. No exercício sete item b), observamos que como resposta, ao invés de se destacar as propriedades necessárias para ser grupo, utilizam uma notação dada pelos autores, deixando de lado a estrutura grupo algébrica para focalizar em conjunto dos elementos simetrizáveis. Sugerimos usar a notação, contudo, precisariam esclarecer qual propriedade não é verificada além de explicar porque esse conjunto comprova essa afirmação.

Nosso estudo revelou a necessidade de novos pesquisadores que prestem atenção aos aspectos do currículo moldado aos professores, que auxiliem o estudo da estrutura algébrica grupo.

REFERÊNCIAS

ALBURQUERQUE, I. M. B. *O conceito de grupo: sua formação por alunos do curso de matemática.* 2005. 333 p. Tese (Doutorado em Educação Brasileira). Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará. Fortaleza. 2005. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br:8080/ri/bitstream/123456789/3111/1/2005_Tese_IMBAlbuquerque.pdf. Acesso em 11 abr. 2013.

BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. *A Dialética entre Pensamento e Simbolismo Algébricos*. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.12, n.2, pp. 354-368, 2010. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4198/3310. Acesso em: 28 dez. 2016.

BUSSMANN, C. J. C. *Conhecimentos Mobilizados por Estudantes do Curso de matemática sobre o Conceito de Grupo*. 2009. 90 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina. Londrina. 2009. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000151199. Acesso em: 11 abr. 2013.

DOMINGUES, H. H.; IEZZY, G. *Álgebra moderna.* 4 edi. São Paulo: Editora Atual. 2003.

ELIAS, H. R. *Dificuldades de Estudantes de Licenciatura em Matemática na compreensão de grupo e/ou isomorfismo de grupos.* 2012. 152 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Centro de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Londrina. Londrina. Disponível em*:* http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000170670. Acesso em: 11 abr. 2013.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*, 3ª Edição. Campinas, São Paulo: Autores Associados. 2009

FIORENTINI, D.; MIORIM, M.; MIGUEL, A. *Contribuição para um repensar a educação algébrica elementar.* Pro-posições, v. 4, n. 1[10], p. 78-91, mar. 1993.

SACRISTÁN, J. G. *O currículo: uma reflexão sobre a prática*. Porto Alegre: Artmed, 2000.

Enviado:30/12/2017

Aceito: 22/03/2018