Tangram
Revista de Educação Matemática

DOI: 10.30612/tangram.v8i1.20955

Geometría en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido espacial

Geometry in early childhood and primary school: Ten essential manipulatives for developing spatial sense

Geometria no ensino pré-primário e primário: dez manipuladores essenciais para desenvolver o sentido espacial

Ángel Alsina
Cátedra de Didáctica de las Matemáticas Mª. A. Canals/Universidad de Girona
Girona, España
E-mail: angel.alsina@udg.edu
Orcid: 0000-0001-8506-1838

Ester Bosch
Gabinet de Materials i Recerca per la Matemàtica a l'Escola/Universidad de Girona
Girona, España
E-mail: ebosch16@xtec.cat
Orcid: 0000-0001-7169-0924

Resumen: Este artículo tiene una finalidad didáctica y, para ello, en la primera parte se describen los conocimientos importantes para desarrollar el sentido espacial de 3 a 12 años: en la educación infantil, se describen los conocimientos sobre la posición en el espacio, las

Público

propiedades geométricas elementales de las figuras y las transformaciones geométricas elementales; y en la educación primaria se presentan los conocimientos sobre la posición en el espacio, la comprensión de propiedades geométricas más complejas de las figuras y las transformaciones geométricas. En la segunda parte, se presenta una selección de diez materiales manipulativos a partir de criterios de contenido, de finalidades didácticas y de tipo de material. Para cada material, se describen diversas actividades por grupos de edad: 3-6 años; 6-8 años; 8-10 años; 10-12 años.

Palabras clave: Sentido espacial. Materiales manipulativos. Juegos geométricos. Educación Infantil. Educación Primaria.

Abstract: This article is designed for educational purposes. To this end, the first part describes the important knowledge needed to develop spatial sense between the ages of 3 and 12: in early childhood education, it describes knowledge about position in space, the basic geometric properties of shapes, and basic geometric transformations; and in primary education, knowledge about position in space, understanding more complex geometric properties of shapes, and geometric transformations are presented. The second part presents a selection of ten manipulative materials based on criteria of content, educational objectives, and type of material. For each material, various activities are described by age group: 3-6 years old; 6-8 years old; 8-10 years old; 10-12 years old.

Keywords: Spatial sense. Manipulatives. Geometric games. Early Childhood Education. Primary Education.

Resumo: Este artigo tem uma finalidade didática e, para isso, na primeira parte são descritos os conhecimentos importantes para desenvolver o sentido espacial dos 3 aos 12 anos: na educação infantil, são descritos os conhecimentos sobre a posição no espaço, as propriedades geométricas elementares das figuras e as transformações geométricas elementares; e no ensino fundamental são apresentados os conhecimentos sobre a posição no espaço, a compreensão das propriedades geométricas mais complexas das figuras e as transformações geométricas. Na segunda parte, é apresentada uma seleção de dez materiais manipuláveis com base em critérios de conteúdo, finalidades didáticas e tipo de material. Para cada material, são descritas diversas atividades por faixas etárias: 3-6 anos; 6-8 anos; 8-10 anos; 10-12 anos.

Palavras-chave: Senso espacial. Materiais manipulativos. Jogos geométricos. Educação infantil. Educação primária.

Recebido em 21/07/2025
Aceito em 30/11/2025

INTRODUCCIÓN

Actualmente, la geometría se concibe como un campo de conocimiento imprescindible para que el alumnado desarrolle diversas habilidades, como el razonamiento visual o habilidades para la justificación (NCTM, 2003). De hecho, el razonamiento visual (junto con la construcción de modelos geométricos) facilita la interpretación y descripción de entornos físicos y, más en general, la resolución de problemas tanto en situaciones de la vida real como en otras áreas de las matemáticas. Este tipo de razonamiento, como se verá a lo largo de este artículo, resulta eficaz en el uso de mapas, en la planificación de itinerarios, en la creación de planos o incluso en la producción artística.

En este artículo, pues, se huye de la visión tradicional de la enseñanza de la geometría, propia de los currículos de matemáticas de las últimas décadas del siglo XX, centrada principalmente en conocer algunas figuras geométricas, denominándolas por su nombre, pero sin profundizar en sus propiedades. Fruto de este enfoque, todavía hoy se tiende a asociar la geometría exclusivamente al conocimiento de las figuras.

Romper esta visión requiere un punto de inflexión que permita dejar de “mirar” la geometría como un conjunto de nociones estáticas para pasar a concebirla como un conjunto de conocimientos dinámicos que permiten educar la percepción espacial, establecer vínculos con otras disciplinas y con el entorno, activar razonamientos visuales o estimular la creatividad y la imaginación (Alsina, 2019, 2022).

Para lograr este propósito, en primer lugar, se describen los conocimientos importantes de geometría que el alumnado de educación infantil y primaria debería aprender y, en segundo lugar, se presenta una selección de diez recursos manipulativos esenciales que contribuyen a desarrollar el sentido espacial de los 3 a los 12 años.

GEOMETRÍA Y SENTIDO ESPACIAL DE 3 A 12 AÑOS: CONOCIMIENTOS IMPORTANTES

Para describir estos conocimientos se consideran diversos marcos teóricos, como el planteamiento del geómetra alemán Félix C. Klein, que a finales del siglo XIX

clasificó la geometría en topológica, proyectiva y métrica según una serie de invariantes propios (Klein, 1939); los planteamientos piagetianos sobre la representación del espacio (Piaget e Inhelder, 1948); el Modelo de Van Hiele y Van Hiele (1958) acerca de los primeros aprendizajes en relación a las figuras; o aportaciones más recientes sobre trayectorias de aprendizaje e itinerarios de enseñanza de la geometría (Alsina, 2019, 2022; Clements, 1999).

Desde este marco, en educación infantil se consideran tres tipos de conocimientos (Alsina, 2022): 1) la posición en el espacio; 2) las propiedades geométricas elementales de las figuras; y 3) las transformaciones geométricas elementales.

La posición en el espacio en educación infantil

Para diversos autores (Alsina, 2022, Canals, 1992; Clements, 1999; Piaget e Inhelder, 1948), una de las finalidades de la geometría en el currículo de educación infantil es que los niños aprendan a desplazarse y a situarse en el entorno que les rodea:

- el lugar ¿dónde?: para describir una situación espacial, puesto que para identificar un objeto es necesario identificar dónde está (por ejemplo, dentro o fuera).
- el sentido de la dirección ¿en qué dirección?: para indicar hacia dónde se va o por dónde se va (por ejemplo, por la derecha o por la izquierda).
- la orientación ¿cómo está orientado?: para tener unos puntos de referencia (habitualmente absolutos) que permitan identificar la posición (por ejemplo, norte o sur).
- la distancia ¿a qué distancia?: para situar la posición relativa de los objetos (por ejemplo, cerca y lejos).
- la representación ¿qué objetos?: para representar la realidad a través de modelos más o menos simplificados, como por ejemplo mapas y planos.

Las propiedades geométricas elementales de las figuras en educación infantil

El Modelo de Van Hiele y Van Hiele (1958) ofrece una explicación completa para comprender cómo los niños de las primeras edades van desarrollando su conocimiento geométrico relativo a las figuras, a partir de la Teoría de los Niveles de Razonamiento Geométrico (Figura 1):

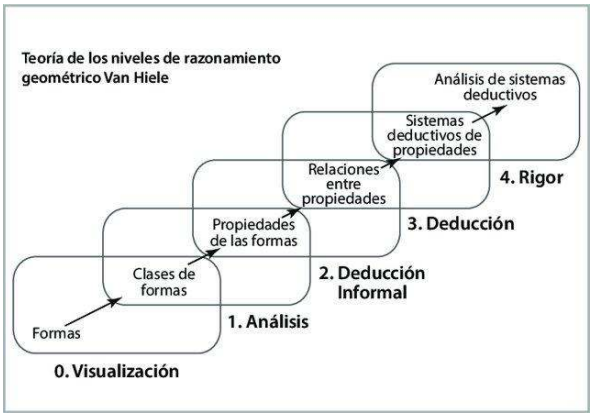

Figura 1. Teoría de los niveles de razonamiento geométrico. Fuente: Godino y Ruiz (2004, p. 299)

Los niños de educación infantil se inician principalmente en los dos primeros niveles: en el 0, las figuras se describen por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y relacionándolas con objetos conocidos (se parece a la pizarra, es como una papelera, etc.). En este nivel no existe todavía un lenguaje geométrico básico para denominar a las figuras por su nombre correcto, mientras que en el nivel 1, se perciben las componentes y propiedades geométricas de las figuras a partir tanto de la observación como de la experimentación. Pero todavía no relacionan unas propiedades con otras o unas figuras con otras.

Las transformaciones geométricas elementales en educación infantil

Para Clements (1999), los niños desarrollan la habilidad para situarse y desplazarse en el espacio fijándose primero en señales o puntos de referencia; elaborando después una ruta, es decir, una serie de señales o puntos de referencia conectados; y, finalmente, situando muchas rutas y lugares en una especie de mapa mental (o esquema mental del espacio). Así, para aprender a situarse y desplazarse en el espacio, y para aprender a representarlo, no basta con reconocer nociones

espaciales básicas y relacionarlas, sino que también son imprescindibles las operaciones geométricas, llamadas también transformaciones geométricas, que permiten cambiar la posición, como los giros (rotaciones), las simetrías (reflexiones) o bien las translaciones (deslizamientos).

Respecto a la educación primaria (6-12 años), Alsina (2019) señala tres tipos de conocimientos importantes de geometría conectados entre ellos que deberían trabajarse de forma sistemática y cíclica para desarrollar, entre otros aspectos, el razonamiento visual: 1) la posición en el espacio; 2) la comprensión de propiedades geométricas más complejas de las figuras; 3) las transformaciones geométricas.

La posición en el espacio en educación primaria

El alumnado accede a esta etapa con muchos conocimientos sobre la posición en el espacio (encima, debajo, entre, hacia adelante, hacia atrás, cerca, lejos, etc.) que se deben ir consolidando y ampliando, incluyendo otras nociones tales como “izquierda” y “derecha”. A medida que van avanzando, deben aprender a situar puntos en un eje de coordenadas o bien interpretar adecuadamente escalas para poder usar de forma comprensiva los mapas, por ejemplo.

El conocimiento del eje de coordenadas implica, primero, aprender cómo usar dos números naturales para denominar puntos sobre una cuadrícula. Más adelante, cuando se amplía el conocimiento numérico con el conjunto de números enteros, el alumnado puede ya situar puntos en los cuatro cuadrantes del eje cartesiano (Figura 2). La forma de denominar un punto en un eje de coordinadas es indicando primero la abscisa (eje horizontal) y seguidamente la ordenada (eje vertical).

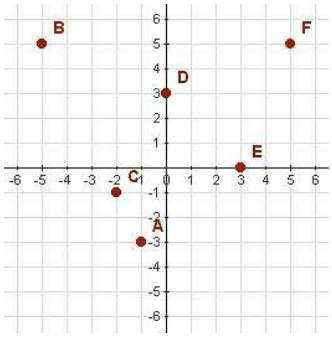

Figura 2. Puntos sobre el eje cartesiano. Fuente: Alsina (2019, p. 146)

Las escalas son otro conocimiento importante que el alumnado de los últimos niveles de primaria debería aprender para interpretar adecuadamente mapas. Las escalas son, en realidad, un tipo de relación matemática que se establece entre las dimensiones reales y las de la representación de la realidad sobre un plano o un mapa.

Las escalas se expresan en forma de razón, donde el antecedente indica el valor del plano y el consecuente el valor de la realidad. Por ejemplo, la escala 1:500 significa que 1 cm del plano equivale a 500cm (5m) en la realidad.

La comprensión de propiedades geométricas más complejas de las figuras

Este conocimiento requiere un análisis profundo de las características distintivas de las figuras: p. ej., cómo son los lados de una figura plana (iguales o no), cuántos lados tiene, qué tipo de superficie tiene un determinado cuerpo geométrico (superficie plana o curva), etc. La observación de estas distintas propiedades es la que conduce a una comprensión más compleja, aportando conocimientos para poder clasificarlas de manera cada vez más sofisticada. A continuación, se señalan algunas de las propiedades geométricas más relevantes: a) línea recta, curva y poligonal; b) otros tipos de líneas (perpendiculares y paralelas; tangentes y secantes; etc.); los polígonos y los no polígonos; los poliedros y los no poliedros (para una ampliación de la descripción de estos conocimientos, consultar Alsina, 2019).

Las transformaciones geométricas en educación primaria

Las principales transformaciones que el alumnado de be conocer son: la rotación, que se caracteriza por hacer girar un elemento (p. ej., una figura plana) en torno a un punto fijo que se denomina centro de rotación. Dicho elemento se puede hacer rotar con un mismo ángulo α alrededor de un centro O; la simetría, que cambia la orientación, mientras que la forma y el tamaño se mantienen invariantes. Hay dos grandes grupos de simetrías: la axial, que se produce alrededor de un eje cuando la totalidad de los semiplanos que se toman desde una determinada mediatriz exhiben las mismas características; la central, en cambio, se produce respecto de un punto; la

traslación, que a partir de un vector prefijado, asigna a cada punto del espacio otro punto denominado imagen, manteniendo la forma y el tamaño de los elementos que se deslizan según dicho vector; y, finalmente, la composición y descomposición de figuras, que permite generar nuevas figuras a partir de la composición de dos o más figuras o a partir de la descomposición de una figura en dos o más.

DIEZ MATERIALES MANIPULATIVOS ESENCIALES PARA DESARROLLAR EL SENTIDO ESPACIAL DE LOS 3 A LOS 12 AÑOS

Para la selección de los diez materiales se han seguido criterios de contenido, de objetivo didáctico y de tipo de material, teniendo en cuenta que con un mismo material se puedan plantear propuestas didácticas que permitan no solo practicar conceptos sino descubrirlos experimentando, visualizarlos para tener referencias, crear conexiones e investigar (Alsina y Bosch, 2022, 2023, 2024). Los diez materiales (o grupos de materiales) seleccionados son: 1) Coordenadas, planos y mapas; 2) Geoplano; 3) Tangram; 4) Geomosaico; 5) Figuras 2D y materiales para construirlas; 6) Figuras 3D y materiales para construirlas; 7) Policubos; 8) Materiales para las transformaciones geométricas; 9) Papiroflexia; 10) Juegos geométricos. Para cada tipo de material, se describen actividades organizadas por grupos de edad: 3-6 años; 6-8 años; 8-10 años; 10-12 años (Tablas 1 a 10).

1. ***Coordenadas, planos y mapas:*** se incluyen materiales que sirven para trabajar la posición, el sentido de la dirección y la distancia. Adicionalmente, se usan también otros materiales de apoyo: regletas, para trabajar las escalas; materiales variados, incluidos los robots educativos, para desplazarlos sobre los planos y visualizar el cambio de coordenadas; laberintos y brújulas; etc. (Figura 2).



Figura 2. Materiales para trabajar las coordenadas, planos y mapas. Fuente: elaboración propia.

Tabla 1

Actividades con materiales para trabajar las coordenadas, planos y mapas.

3-6	Uso de aros, cajas y otros objetos para identificar y expresar oralmente la posición relativa: dentro, fuera, delante, detrás, cerca, lejos, en medio... Colocación de objetos en la posición correcta de una tabla de doble entrada, según las coordenadas.
6-8	Uso de maquetas (incluyendo también otros recursos gráficos como fotografías o dibujos propios), para describir posiciones entre objetos. Colocación de objetos en una cuadrícula con coordenadas y verbalización de la posición. Programación de robots para seguir una secuencia sobre una cuadrícula y representación del recorrido.
8-10	Observación de objetos para describir la posición relativa usando vocabulario adecuado: paralelo, perpendicular, oblicuo, derecha, izquierda... Diseño e interpretación de planos con soportes físicos y virtuales utilizando un vocabulario correcto; adicionalmente, descripción de la situación de elementos en un plano utilizando las coordenadas cartesianas correctamente (p. ej., un edificio). Utilización de brújulas para seguir indicaciones de dirección: p. ej., cinco pasos hacia el norte, girar hacia el oeste... Programación de robots para seguir una secuencia y representación del recorrido sobre una cuadrícula.
10-12	Juegos de orientación con brújulas. Investigación del significado de las escalas de aumento y disminución utilizando las regletas numéricas para construir el mismo objeto a escala 1:2 (si tenemos un cuadrado hecho con regletas de 8, lo reducimos utilizando regletas de 4 y posteriormente realizarlo a escala 1:4 con regletas de 2) Realización de una maqueta a escala. Cálculo de las medidas reales de un mueble a partir del dibujo a escala del catálogo. Programación de robots educativos para conseguir un reto y representación del recorrido usando la secuencia de coordenadas.

2. Geoplano: permite construir formas geométricas y desarrollar habilidades espaciales en los distintos ciclos educativos (Figura 3).

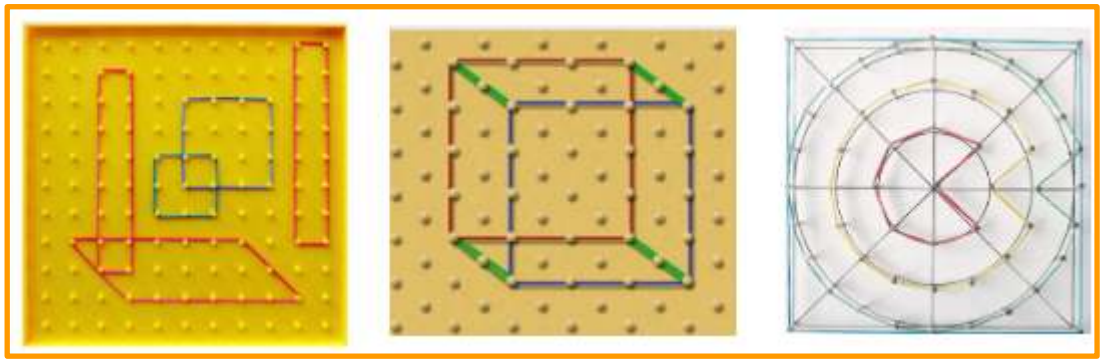

Figura 3. Ejemplos de geoplano ortométrico, isométrico y circular. Fuente: elaboración propia.

Tabla 2

Actividades con Geoplanos.

3-6	Construcción libre de figuras. Reproducción de figuras y composiciones. Construcción de letras utilizando una goma para cada segmento. Dictado geométrico utilizando las gomas elásticas para reproducir las figuras que se verbalizan. Construcción de polígonos utilizando una goma elástica para cada lado.
6-8	Construcción de líneas poligonales abiertas y cerradas. Construcción de polígonos utilizando una goma elástica para cada lado para descubrir que los vértices son la unión de dos lados. Construcción de polígonos con una sola goma para identificar los vértices y los lados. Girar el geoplano para visualizar la misma figura en distintas posiciones. Realización de formas distintas para contar los vértices y los lados. Construcción de figuras que tengan 3 vértices, 4 vértices... Observación de las similitudes y diferencias. Construcción de figuras simétricas. Dictado geométrico por parejas: un alumno verbaliza la figura de una imagen y el otro la reproduce. Dibujo de las figuras sobre un papel cuadriculado.
8-10	Representación de líneas paralelas, perpendiculares y secantes. Construcción de cuadriláteros y reproducción en una superficie reglada para visualizar las distintas figuras y comprobar que no se repite ninguna. Construcción de los distintos triángulos que se pueden realizar en el geoplano. Medición de los lados de los triángulos obtenidos y clasificación, utilizando el lenguaje apropiado. Construcción de polígonos de más de cuatro lados. Construcción de un cuadrilátero convexo y desplazamiento de la goma de uno de los lados hacía el interior. Observar que se transforma en cóncavo. Construcción de figuras simétricas, en parejas: se marca un eje de simetría y se tiene que hacer la figura simétrica a la que propone el otro alumno. Construcción de figuras que tengan un perímetro concreto. Construcción de un ángulo recto con dos gomas elásticas para visualizar la apertura de 90º. Observar y verbalizar qué ocurre con el ángulo si se modifica la longitud de la goma. Construcción de polígonos con consignas concretas: tres lados y un ángulo recto, cinco lados y dos ángulos rectos, cuatro lados y ningún ángulo recto... Uso del geoplano circular para visualizar las circunferencias, el diámetro y el radio.

	Realización de dictados geométricos. Construcción de un laberinto con entrada y salida.
10-12	Relación entre polígonos: se construye un cuadrado de 3x3 y se propone que lo transformen en otros polígonos realizando el menor número de cambios, pero verbalizando qué modificación han realizado (p. ej., modificar la misma medida de dos lados paralelos en la misma dirección, en dirección contraria, modificar un solo lado, añadir un vértice...) Investigación de las diagonales de polígonos según su número de lados. Uso de una tabla para visualizar los resultados y formular hipótesis. Investigación de cuántos triángulos rectángulos diferentes se pueden hacer en un geoplano 4x4. Construcción de rectángulos con diferentes finalidades: para practicar la medida del área que ocupa (p. ej., que tenga 18 cm^2); para relacionar la misma medida de los lados con su área, explorando los cuadrados que hay en el interior (¿qué se descubre?, ¿se cumple en todos los rectángulos?, ¿y con los cuadrados?). Introducción de tablas para contabilizar la medida de la base, altura y área para facilitar el descubrimiento de la fórmula. Construcción de un rectángulo de 2x3: observar que ocurre con el área si se aumenta una unidad cada lado. Deducción del área del triángulo a partir de un rectángulo: se construye un rectángulo y se calcula su área; se marca una diagonal con una goma y se obtienen dos triángulos iguales. Abrir un diálogo para discutir si se puede saber su área, si ocurre lo mismo en todos los triángulos, qué se puede deducir, etc. Deducción del área de un rombo inscrito en un triángulo: con gomas de distinto color se marcan las dos diagonales para visualizar que una tiene la misma medida que la base del rectángulo y la otra que la altura.

3. Tangram: además de utilizarlo como puzle, permite descubrir relaciones geométricas y promover el razonamiento espacial. Existen diferentes tipos de tangrams que aportan más posibilidades de propuestas: circular, Fletcher, en forma de huevo, tangram ruso... (Figura 4).



Figura 4. Tangram clásico con ejemplos de construcción de formas y otros tipos de tangram. Fuente: elaboración propia.

Tabla 3

Actividades con tangram.

3-6	Identificación del número de lados de cada figura. Ordenación de los triángulos según su tamaño. Composición de figuras libres, con plantillas y con instrucciones: p. ej., utilizando el cuadrado y los dos triángulos pequeños, etc. Visualización de las rotaciones que se pueden hacer con las piezas (girarlas sobre el plano o girarlas sobre el espacio).
6-8	Composición de figuras con instrucciones: p. ej., con cuatro triángulos. Trazar el contorno de cada pieza e investigar con qué otras piezas se pueden rellenar. Dictado de acciones: girar, rotar, unir por el lado pequeño… Construcción de figuras con todas las piezas, a partir de un modelo. Investigación de los ejes de simetría de cada pieza con un espejo: ¿son simétricas? ¿cuántos ejes de simetría tienen? Lectura del cuento “Tangram gato” y construcción de las figuras propuestas.
8-10	Composición y descomposición libre y con instrucciones: p. ej., construir un cuadrado con todas las piezas sin visualizar el modelo. Modificación de una figura hecha con un cuadrado y dos triángulos pequeños moviendo solo un triángulo. Posteriormente, describir las translaciones, giros y simetrías para cambiar para pasar de una figura a otra. Construcción de polígonos cóncavos y convexos. Investigación y ordenación de la superficie de las piezas, primero de manera intuitiva y posteriormente utilizando el triángulo pequeño como unidad de medida.
10-12	Estimación y comprobación de qué figuras tienen mayor perímetro. Ordenación de las piezas según su superficie: ¿siguen el mismo orden si se ordenan por perímetro? Comparación de las distintas piezas para buscar relaciones entre ellas. Anotar los resultados en una tabla de doble entrada, usando fracciones si es necesario. Construcción de figuras equivalentes con dos o más piezas. Expresión de equivalencias usando símbolos y números (p. ej., C= 2Tp; el cuadrado equivale a dos triángulos pequeños). Investigación de los polígonos que se pueden construir con todas las piezas: ¿cuál tiene mayor área? ¿y mayor perímetro?

4. Geomosaico: consiste en un conjunto de múltiples piezas que reproducen seis formas de distinto color (triángulo equilátero, rombo ancho, rombo estrecho, trapecio, hexágono regular y cuadrado). Estas piezas tienen la particularidad que los lados de todos los polígonos tienen la misma medida (excepto uno de los lados del trapecio que mide dos unidades) y todos los ángulos son múltiples de 30º (Figura 5).



Figura 5. Piezas del geomosaico. Fuente: elaboración propia.

Tabla 4

Actividades con geomosaico.

3-6	Contar los vértices y/o lados de las distintas figuras. Composición libre y a partir de una plantilla, con las piezas marcadas. Trabajo de la simetría por parejas. Creación libre de mosaicos.
6-8	Clasificación de las piezas según distintos criterios propuestos por el alumnado: número de lados, de vértices... Marcar el contorno de cada pieza en distintas posiciones. Constatación de que las propiedades de la figura no cambian. Reconocimiento de las piezas a través del tacto. Verbalizar el número de lados y/o vértices y posteriormente señalar la pieza descubierta. Composiciones de nuevas figuras con las piezas marcadas con color, sin color y en silueta. Simetría: búsqueda de ejes de simetría de las piezas con un espejo; creación libre de figuras simétricas a partir de un eje marcado; realización de la simetría a partir de una plantilla con el dibujo incompleto a partir del eje. Investigación: ¿con qué piezas iguales podemos rodear el hexágono? Creación de mosaicos lineales y circulares que incluyan patrones.
8-10	Clasificación de las piezas a partir de criterios más complejos propuestos por el alumnado: número de lados, de vértices, tipos de ángulos, número de ejes de simetría, si son regulares... Dictado geométrico a partir de una imagen por parejas: un alumno describe y el otro construye. Reconocimiento de piezas a través del tacto, verbalización del número de lados y/o vértices, si los lados son paralelos o no, tipo de ángulo y comunicar el nombre de la pieza usando un vocabulario correcto. Comparación de los cuadriláteros (en qué se parecen y en qué se diferencian). Construcción de polígonos de más de seis lados: ¿se pueden conseguir todos?, ¿cuántos lados podemos conseguir como máximo? Composición y descomposición de figuras. Estudio de los perímetros y las áreas finales. Ordenar las figuras según su superficie. Investigación del hexágono: ¿de cuántas maneras distintas podemos reproducir el hexágono amarillo con piezas iguales?,¿y con piezas distintas? Verbalización de los resultados y diálogo para descubrir si hay alguna propuesta repetida. Escritura de las equivalencias de las figuras utilizando símbolos y números. Búsqueda de las piezas que pueden teselar una superficie. Creación de mosaicos circulares que incluyan simetrías.
10-12	Estudio de las propiedades de todas las figuras a partir de la construcción de una tabla: nombre, vértices y lados, medida de ángulos, perímetro, área, ejes de simetría, si es regular... Análisis de las piezas necesarias para conseguir un ángulo concreto: 150º, 180º, 210º… Construcción de figuras para que cumplan unas condiciones concretas de perímetro y área, usando una pieza (el triángulo) como unidad: p. ej., conseguir que el perímetro sea 10u y el área $12u^{2.}$ Estudio de las fracciones, tomando el hexágono como unidad: ¿qué fracción representa el triángulo?, ¿qué pieza es la mitad del hexágono? Investigación de cómo crecen las figuras: p. ej., partir del triángulo y construir la misma figura un poco más grande; analizar el perímetro/área y anotar los resultados en una tabla; seguir aumentando y analizando la figura; extraer conclusiones de los datos registrados (¿sigue algún patrón?); repetir la misma actividad con las otras piezas (¿siguen el mismo patrón que el triángulo?).

5. Figuras 2D y materiales para construirlas: se incluyen polígonos de plástico, tiras transparentes de distintas formas, *geosticks*, objetos de la vida real, mecanos... (Figura 6), junto con otros materiales que, por su relevancia, se han descrito individualmente en otras secciones: tangram, geoplano, geomosaico y papiroflexia.

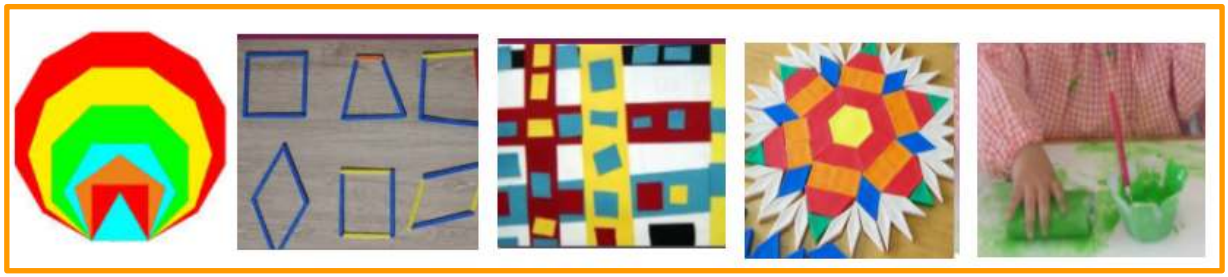

Figura 6. Formas 2D y materiales para construirlas

Tabla 5

Actividades con formas 2D y materiales para construirlas.

3-6	Dibujo de líneas utilizando fregonas y agua. Experimentación de líneas con cuerdas. Construcción de las figuras que se pueden construir con tres *geosticks* (tiras de colores encajables con distintas medidas). Observación de las características que comparten y las que no para descubrir que todas son triángulos Clasificar objetos reales según su forma: triángulo, rectángulo, cuadrado y círculo. Estampación de objetos sobre papel. Analizar las figuras que se obtienen.
6-8	Construcción de polígonos utilizando palillos y plastilina para descubrir el significado de vértice. Identificación y clasificación de figuras 2D en objetos de la vida cotidiana, según sus propiedades. Construcción de las formas cerradas que se pueden construir con cuatro *geosticks*. Observación de las características que comparten y las que no para descubrir que todas son cuadriláteros. Identificar con el nombre adecuado cada uno. Identificación de las figuras con el tacto. Expresión verbal de las propiedades. Creación de figuras con un cordón cerrado aumentando o reduciendo el nombre de vértices Observación, descripción y reproducción de obras de arte que contenga figuras 2D Creación de nuevas figuras a partir de la composición y descomposición.
8-10	Descripción de figuras 2D a partir del tacto. Construcción y clasificación de formas 2D con *geosticks* y en el geoplano, siguiendo distintos criterios: polígonos/no polígonos, número de vértices... Juego ¿Quién soy?: realización de preguntas para adivinar el polígono que tengo en la frente Desplazamiento sobre polígonos cóncavos y polígonos convexos para descubrir las diferencias y poder entender su significado. Investigaciones geométricas: - ¿De cuántas maneras podemos cruzar tres palos?, ¿y cuatro? - ¿Con tres palos o tiras se puede construir siempre un triángulo?, ¿por qué? - ¿Qué tipos de triángulos/cuadriláteros se pueden construir con *geosticks*?... Nombrar con el vocabulario adecuado cada uno de ellos.

	- ¿Qué cuadriláteros se forman si se cruzan dos tiras de plástico de distinta forma? Recogida de resultados en una tabla de doble entrada. - Construcción de las diagonales de un cuadrado hecho con *geosticks* y descripción de lo que se observa. Investigación de si pasa lo mismo con todos los polígonos. - ¿Cuántas veces coincide un polígono al hacerlo girar sobre sí mismo?
10-12	Descripción de formas 2D utilizando un vocabulario preciso. Desplazamiento sobre polígonos para descubrir el significado de ángulo exterior. Construcción de polígonos con papiroflexia. Utilización de instrumentos de dibujo (regla y cartabón) para dibujar figuras 2D. Superposición de dos tiras de plástico de distinto tamaño y forma para conseguir figuras concretas (p. ej., para conseguir un trapecio). Colocación de un espejo sobre una línea recta para construir distintos polígonos. Argumentación con razones geométricas sobre quién es el intruso a partir del recurso WODB (*Which one doesn't belong?*) Investigaciones geométricas: - La medida de los ángulos de los polígonos y de la suma de todos sus ángulos. - Las diagonales de los polígonos con *geosticks* o geoplanos: ¿todas son interiores?, ¿cuántas diagonales tiene? - Cálculo del perímetro y área de un polígono. Análisis de la relación que hay entre perímetro y área.

6. Figuras 3D y materiales para construirlas: se incluyen materiales para trabajar las formas 3D observándolas desde fuera (caja de cuerpos geométricos, cajas y objetos de uso cotidiano...); para construir los cuerpos 3D con las caras (polígonos encajables o imantados) o con aristas y vértices (cañas con plastilina, material Bambouchi con encaje para los vértices...); para visualizar el despliegue plano (cuerpos desplegables, polígonos de plástico...); para realizar composiciones, descomposiciones (bloques de construcción, policubos, mecanos y materiales moldeables) y materiales de uso cotidiano para descubrir las propiedades y partes de los cuerpos (plastilina, pintura, cajas, papel de envolver regalos, tijeras y cola,...). (Figura 7).



Figura 7. Ejemplos de materiales para trabajar las los cuerpos geométricos

Tabla 6

Actividades con figuras 3D y materiales para construirlas.

3-6	Juegos con cajas para descubrir el espacio interior y exterior. Observación de objetos 3D de la vida cotidiana y expresión de las características. Experimentación de los cuerpos que ruedan y que no ruedan según tengan caras planas o curvas. Clasificación según las propiedades trabajadas. Identificación y construcción de los cuerpos geométricos elementales. Visualización de los cuerpos geométricos en distinta posición haciéndolos girar tanto en el plano como en el espacio. Estampación de las caras de algunos poliedros con pintura o marcando su contorno en plastilina. Composición y descomposición utilizando materiales distintos.
6-8	Identificación de figuras 3D del entorno: la caza de figuras. Descripción verbal de las figuras 3D usando el vocabulario correcto. Clasificación de cajas de cartón usando criterios distintos. Pintar un cubo de barro y posteriormente cortarlo para descubrir el significado de superficie y volumen. Marcar las distintas caras de un prisma en papel para recortarlas y recubrir el objeto. Construcción de un cubo, un prisma y una pirámide con cañas y plastilina. Construcción libre y dirigida con el material Bambouchi o cañas para identificar los vértices como unión de las aristas. Composición en 3D con cubos del mismo tamaño a partir de un modelo. Visualización y representación de una composición 3D desde distintos puntos de vista. Realización de objetos 3D sencillos (casas, cajas, vehículos...) a partir de modelos planos recortables y con las líneas de pliegue marcadas.
8-10	Observación y comparación de los cuerpos geométricos y descripción de sus propiedades: ¿en qué se parecen y en qué se diferencian? Construcción de un mismo poliedro usando materiales distintos: Polydron, Bambouchi, barro... Estudio exhaustivo de poliedros, utilizando tablas de doble entrada para recoger los resultados: número y forma de la cara, bases y caras laterales, número de vértices y aristas, nomenclatura... Transformación de una caja con forma de prisma de base cuadrada a un prisma de base triangular. Análisis previo de lo que tienen en común y en qué se diferencian para realizar las modificaciones correctas. Investigaciones geométricas: - ¿Cuál es el número mínimo de cañas necesarias para conseguir un cuerpo geométrico cerrado?, ¿qué figura forma? - Experimentar con la disposición de seis cuadrados de plástico unidos con cinta adhesiva o con piezas encajables para deducir las que originan el cubo y las que no. - A partir de una caja en forma de prisma de base cuadrada, ¿cuántas pirámides de base cuadrada puedo conseguir? - ¿Cómo se originan los cuerpos de revolución? haciendo girar un rectángulo, un triángulo y un círculo unidos a un palo.
10-12	Clasificación de los cuerpos geométricos en dos grupos (caras planas y caras curvas) y posteriormente hacer subgrupos que tengan las mismas características para conseguir las definiciones de cada grupo y la nomenclatura correcta. Estudio exhaustivo de un poliedro o de un cuerpo de revolución, utilizando tablas de doble entrada para recoger los resultados: número y forma de la cara, bases y caras laterales, número de vértices y aristas, nomenclatura... Estimación de las caras necesarias para construir un prisma octogonal sin visualizarlo. Construcción de los sólidos platónicos con piezas encajables. ¿Qué polígonos necesitamos?,¿Qué propiedades cumplen? Investigaciones geométricas: - Despliegue plano de los poliedros con polígonos de plástico o piezas encajables

	- Figuras planas que se pueden conseguir seccionando un cubo de distintas maneras. Posteriormente, se puede repetir con un cilindro. - Relación entre los volúmenes de los poliedros con la misma base. - Relación entre el cilindro y el rectángulo que lo origina.

7. Policubos: son piezas cúbicas de plástico de 2cm de arista de distintos colores, encajables entre sí, que sirven para visualizar, descubrir y practicar muchos conceptos matemáticos (Figura 8).



Figura 8. Ejemplos de actividades con policubos.

Tabla 7

Actividades con Policubos.

3-6	Construcciones libres de figuras o a partir de instrucciones (p. ej., limitando el número de cubos). Construcción de cadenas de uno, dos y tres policubos. Realización de composiciones y descomposiciones con estas piezas. Construcción de torres de distintas alturas y distintos colores (de un, dos, tres y cuatro pisos respectivamente). Colocación siguiendo las consignas espaciales dadas (detrás de, delante, al lado de, entre, encima, debajo...): si miramos frontalmente, ¿qué torres vemos en cada caso? Construcción de figuras con las torres anteriores a partir de la vista frontal representada con los colores de las distintas torres. Reproducción de figuras 2D y 3D según un modelo dado.
6-8	Construcción de figuras sobre el plano a partir de siluetas de dibujos. Construcción de una figura (sobre el plano o en volumen) y dar instrucciones a otro alumno para que la reproduzca sin verla. Construcción de cubos y prismas con indicaciones concretas. Conteo de los cubos necesarios para reproducir un modelo concreto. Visualización de las figuras simétricas con un conjunto de cubos y un espejo. Completar la simetría con cubos. Reproducir una figura oculta de seis piezas solo con el tacto (con figuras del mismo color para no tener en cuenta esta característica) Juego de los edificios: colocar edificios (columnas de 1,2 o 3 plantas) hechos con policubos en un cuadrícula 3x3 de manera que cada fila y columna no tengan edificios repetidos... Contabilizar y anotar cuántos edificios se ven en cada columna y fila si miras frontalmente.

8-10	Reproducción de figuras en volumen, a partir de modelos. Construcción de figuras con condiciones concretas: un cubo macizo, un cubo hueco, un cubo que tenga las caras huecas... Contabilizar los cubos que faltan para no tener agujeros. Estimación razonada de las piezas que forman una composición con piezas no visibles. Construcción de una figura con policubos y dibujo de los distintos puntos de vista reflejando los cuadrados de colores que se ven o dibujando la planta, los alzados y el perfil. Investigación de las figuras que se pueden conseguir con un número determinado de piezas (tres, cuatro…). Descripción de la colocación. Reproducción de figuras ocultas de ocho cubos dispuestas en 3D. Realización de figuras simétricas. Construcción de figuras 3D que se puedan partir en dos trozos iguales. Resolución de problemas: Con 24 cubos, ¿cuántos rectángulos distintos puedo hacer? Cálculo del perímetro y área de cada uno, considerando el cubo como unidad de volumen. Construcción de figuras diferentes con un perímetro determinado, considerando la arista del cubo como unidad de longitud. Juego de los edificios: colocar edificios (columnas de 1, 2 ó 3 plantas) hechos con policubos en una cuadrícula 3x3 en la que cada columna y fila indica el número de edificios que se ven en aquella posición.
10-12	Construcción de una figura a partir del dibujo de los distintos puntos de vista del mismo . Investigación sobre cuántas composiciones podemos obtener con cuatro cubos de un color y uno de otro, con la condición de que todos los del mismo color tienen que tocar al suelo y el del color diferente no. Analizar si todas las construcciones tienen el mismo volumen y la misma área. Representación escrita de las soluciones. Juego de los edificios: colocar edificios (columnas de 1,2 o 3 plantas) hechos con policubos en una cuadrícula 3x3 en la que cada columna y fila indica el número de edificios que se ven en aquella posición. Descubrimiento del significado de volumen y visualización de la fórmula para calcularlo. Cálculo del volumen de un cubo y utilizar este dato para calcular el volumen de las composiciones. Resolución de problemas geométricos a través de retos: - División de un cubo 3x3 en dos partes iguales. ¿Es posible? Representar las soluciones. - Construcción de una casa siguiendo las condiciones siguientes: volumen total de la casa, número de plantas y número de cubos que tocan el suelo (p. ej., construir una casa de tres plantas con 22 cubos, de los cuales cuatro tocan en el suelo). - Construcción de un hotel con 20 cubos, cada cubo es una habitación que tiene que tener como mínimo una ventana (cara exterior). De todas las posibilidades, ¿cuál es la más útil?, ¿y la más económica? (se proporcionan los precios del terreno, el techo, las ventanas y las plantas).

8. Materiales para las transformaciones geométricas: se incluyen materiales elásticos o deformables para trabajar las transformaciones topológicas (barro, globos y gomas elásticas anchas, cuadrículas curvas…); las transformaciones proyectivas (figuras geométricas y linternas); espejos, formas geométricas; y las transformaciones métricas, en especial giros, simetrías y traslaciones (objetos cotidianos y cuadrículas). En la Figura 9 se muestran algunos ejemplos.

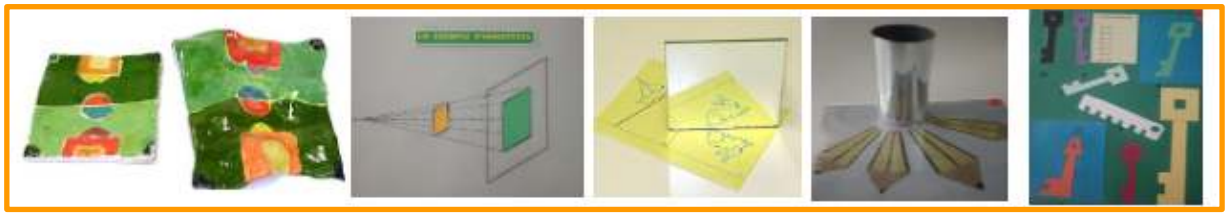

Figura 9. Materiales y actividades para trabajar las transformaciones geométricas

Tabla 8

Actividades a partir de materiales para las transformaciones geométricas.

3-6	Juegos de encaje de figuras para experimentar la importancia de los giros tanto en el plano como en el espacio y juegos de encaje de objetos y su silueta. Experimentación libre y/o dirigida con espejos y verbalización de los descubrimientos: acercar y alejar el espejo, hacer pequeños desplazamientos, usar objetos o distintivos para observar la derecha y la izquierda en el espejo... Experimentación libre con libros de espejos sobre imágenes variadas. Experimentación con las sombras y la luz natural (como son, porqué se alargan, diferencias en distintos momentos del día, aguantar objetos translúcidos de colores...) Experimentación con las sombras y focos de luz artificial (alejarse y acercarse al foco de luz, donde hay que colocarse para que la sombra sea pequeña, experimentar con objetos...). Realización de sombras chinas con las manos o con objetos. Realización de dibujos sobre material elástico y observar qué pasa cuando se estira. Juego del espejo: un alumno reproduce los movimientos de otro como si fuera su espejo. Actividades de simetría descritas en el apartado de papiroflexia.
6-8	Realización de un dibujo sobre un globo, hincharlo y observar qué pasa. Observación de los cambios y verbalización de lo que se ha mantenido. Construcción de una circunferencia de plastilina y darle distintas formas sin romperla. Representación cada una de las formas que se obtienen. Estudio de las sombras que se pueden conseguir con un cuadrado. Representación y análisis de las características que cumplen todas ellas. Desplazamiento de objetos sobre un papel cuadriculado siguiendo las indicaciones dadas verbalmente o con flechas: tres cuadros a la derecha y dos cuadros hacía abajo. Reseguir un mismo objeto o forma geométrica haciéndola girar en el plano. Construcción de figuras a partir de movimientos, giros y simetrías. Realización de giros de media vuelta, un cuarto de vuelta con las agujas del reloj y con otros objetos cotidianos. Composición y descomposición de figuras nuevas a partir de otras. Uso de espejos para buscar ejes de simetría en objetos o letras.
8-10	Realización del mismo dibujo sobre dos láminas de barro y pintarlo. Estirar uno de ellos para describir con vocabulario matemático qué propiedades se mantienen y cuáles cambian. Experimentación libre de los anamorfismos con cuerdas y objetos delante de un cilindro metálico para analizar los cambios que se producen. Estudio de las sombras que se pueden producir con los distintos polígonos y análisis de las propiedades que se mantienen y cambian. Familiarización del significado de ángulo con materiales distintos. Descripción de los movimientos realizados en un patrón de giro.

	Investigación de cuántos ejes de simetría tiene un polígono observando cuántas veces coincide en la misma posición al hacerlo rodar sobre sí mismo. Experimentación con la colocación de un libro de espejos sobre una línea recta para conseguir polígonos distintos. Realización de dibujos simétricos a partir de un eje de simetría. Representación del resultado de realizar una deformación, una traslación, un giro y una simetría de la misma figura.
10-12	Identificación de las figuras que se pueden conseguir y las que no con una deformación. Creación de anamorfismos reproduciendo un mismo dibujo sobre una cuadrícula recta con coordenadas marcadas y una con una cuadrícula curva pero que mantenga las mismas coordenadas. Predicción de la posición que tendrá un módulo concreto en un patrón de giro. Investigación sobre qué se obtiene al hacer girar en el espacio (sobre un eje vertical) un rectángulo y un triángulo. Construcción de las distintas figuras que se producen en una cadena de cambios (de giros y simetrías consecutivas). Representación del resultado de realizar una deformación, una traslación, un giro y una simetría de la misma figura. Identificación del tipo de transformación que se ha realizado a partir de las representaciones de las mismas. Experimentación sobre la colocación de un libro de espejos sobre un dibujo para conseguir imágenes concretas.

9. Papiroflexia: se muestran algunas propuestas a partir de una hoja de papel sin cortar ni pegar, solo doblando (Figura 10).

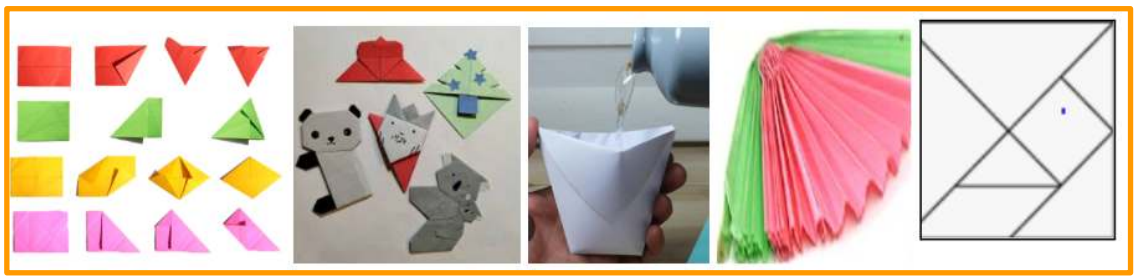

Figura 10. Ejemplos de actividades para trabajar la geometría doblando papel.

Tabla 9

Actividades con Papiroflexia.

3-6	Rasgado libre de papel sin tijeras ni doblado. Observación de cómo son las figuras que se obtienen. Diferenciación de las líneas rectas o curvas. Realización de un solo pliegue en el papel y observación de cómo es la línea que se obtiene: ¿pasa siempre lo mismo?, ¿y si se vuelve a doblar el papel?, ¿se pueden conseguir dos líneas rectas que no se crucen? Plegado de una hoja de papel diversas veces, sin ninguna consigna. Pintar o marcar las formas que se obtienen.

	Identificación de los vértices y los lados de un papel de forma cuadrada. Llevar uno de los vértices al vértice opuesto; marcar la línea y observar cómo son las formas que se obtienen. Repetición con los otros vértices. Realización de la misma actividad con un rectángulo y diálogo a partir de las observaciones. Recorte con tijeras de tiras verticales o horizontales en una hoja de papel sin marcar las líneas. Comparación de la forma y medida. Realización de las primeras figuras de papiroflexia (un sombrero, una papelina) dependiendo de la habilidad en motricidad fina de los alumnos. Trabajar la simetría doblando una hoja de papel y realizar un dibujo en una de las partes para después marcar el dibujo en la otra parte.
6-8	Plegado de una hoja de papel cuadrada utilizando la técnica vértice a vértice, primero los vértices opuestos y después los consecutivos. Observación y análisis de los resultados. Realización de la misma actividad con un rectángulo y diálogo a partir de las observaciones. Realización de los primeros pliegues en forma de acordeón: ¿cómo son las líneas que nos quedan? Construcción de un abanico. Construcción de un cuadrado a partir de una hoja rectangular, guiando con buenas preguntas para observar cómo se puede conseguir que los lados tengan la misma medida. Conviene no proporcionar la técnica sin descubrirla. Creación de un punto de libro esquinero partiendo de una hoja cuadrada. Repetir la misma actividad, pero marcando los cuadrados obtenidos en cada paso de un color y los triángulos en otro. Verbalización de la descomposición y composición de figuras que se van formando. Construcción de un vaso de papel a partir de un cuadrado para verbalizar el vocabulario correcto (lado, vértice, punto medio, línea recta, segmento...). Trabajo de la simetría doblando papel y cortando simultáneamente las dos partes obtenidas con formas libres o dirigidas.
8-10	Construcción de un cuadrado a partir de una hoja de papel con los lados rasgados (no rectos). Guiar con buenas preguntas: ¿cómo se puede conseguir un lado recto?, ¿y un ángulo recto?, ¿qué pasa si se hacen coincidir los extremos de la línea recta?... Creación del juego del comecocos doblando papel. Estudio de las formas que se forman con todos los pliegues: recuento de triángulos y cuadrados pequeños que se forman, identificación de cuadrados de otras medidas, número de triángulos que se necesitan para formar un cuadrado... Marcar otros polígonos a partir de las líneas de los pliegues (pentágonos, hexágonos, figuras cóncavas y convexas...). Construcción de un abanico *pai-pai* para utilizarlo para trabajar la distinta amplitud de los ángulos. Construcción de un barco de papel u otra figura sencilla para verbalizar el vocabulario matemático correcto (vértice, lado, ángulo, diagonal...). Investigación de cuántas maneras distintas se puede dividir una hoja cuadrada en cuatro partes (qué tienen en común y en qué se diferencian). Representación de las distintas maneras obtenidas. Doblar una hoja cuadrada por la mitad distintas veces para conseguir una cuadrícula de cuadrados. Utilizar estas líneas para recortar seis cuadrados que puedan formar un cubo. Investigar qué se tendría que mantener y qué se tendría que cambiar para construir un prisma de base cuadrada: ¿cómo serían las caras laterales?, ¿y las bases? Trabajo de la simetría doblando papel varias veces y cortar simultáneamente las partes obtenidas con cortes para obtener un dibujo que se repita en cada una de las partes.
10-12	Transformación de los polígonos a partir de una hoja de papel cuadrada: si se recorta una esquina con una línea recta ¿en qué figura se convierte?, ¿y si se recortan las cuatro? Seguir la actividad recortando las ocho esquinas de un octógono para observar y estudiar la forma que se obtiene: ¿y si se continúa realizando la misma operación muchas veces a qué figura se tendería?

	Comprobación de que los ángulos de un triángulo miden 180º pintando los ángulos de distinto color y hacerlos coincidir sobre la base del mismo triángulo. Trabajar la simetría doblando el papel y calcando el dibujo a partir de un mismo dibujo, pero cambiando la dirección del eje de simetría. Construcción de ángulos de 30º, 45º, 60º, 90º y 180º doblando papel, para utilizarlos para construir y medir otros ángulos a partir de la composición y descomposición. Construcción de un tangram de papel. Observación de la colocación de las piezas del tangram sobre el cuadrado y reproducirlo doblando el papel.

***10. Juegos de mesa geométricos**:* permiten hacer razonamientos espaciales, descubrir formas geométricas y sus propiedades, trabajar la posición, dirección y el sentido de los desplazamientos, observar las consecuencias de las transformaciones geométricas, mejorar la visualización espacial, etc. (Figura 11).



Figura 11. Ejemplos de juegos de mesa para trabajar el sentido espacial

Tabla 10

Actividades con Juegos geométricos.

3-6	*Los tres cerditos:* Posición en el espacio, dentro, fuera y percepción visual. *Camelot Jr:* Orientación espacial y posición. *Juegos de bloques de construcción:* Volumen, posición y construcción 3D. *Kapla:* Construcción 3D. *Tactilo basic*: Reconocimiento de formas a través del tacto. *Formas color*: Identificación y composición de formas. *Jurássic zoom:* Posición y visualización espacial.
6-8	*Color code:* Ordenación de piezas superpuestas para conseguir una figura correcta. *Batalla de genios*: Retos de geometría 2d y 3D. *Battle building blocks*: Construcciones 3D. *Damas y damas chinas*: Visualización espacial, dirección. *Tantrix*: Posición, propiedades topológicas y circuitos. *Juego de Barcos*: Coordenadas y posición espacial. *Katakote*: Composición y descomposición de formas a partir de retos. *Ze Mirror:* Simetrías con espejos. *Shapes Up:* Composición y descomposición de formas y superficie.

	Pattern party: Composición de figuras y patrones.
8-10	*Morada maldita*: Comparación de figuras, observación de cambios. *Blokus*: Superfície, lados y vértices. *Quoridor:* Posición, itinerarios y visualización espacial *Ajedrez*: Razonamiento y visualización espacial. *Katamino:* Resolución de problemas espaciales, percepción visual, simetrías y giros *Rush hour*: Posición, dirección y resolución de problemas espaciales. *IQ circuit:* Razonamiento espacial, circuitos. *Triteringa:* Razonamiento espacial, conexiones, circuitos con condiciones. *Carcassonne:* Itinerarios, circuitos y propiedades topológicas.
10-12	*Cazamanzanas:* Posición, cambios de dirección, modificación de itinerarios y pensamiento computacional. *Utopía/Juego de los edificios:* Colocación de edificios para que cumplan condiciones numéricas desde distintos puntos de vista *Ricochet robots:* Pensamiento computacional, itinerarios, economizar movimientos. *Trekking:* Itinerarios, planos y dirección. *Juego de la L*: Superfície, simetría y orientación espacial. *Kappla challenge:* Construcción 3D a partir de retos. *Swish:* Visualización espacial y composición de formas.

CONSIDERACIONES FINALES

En este artículo se han ofrecido estrategias y recursos para llevar a cabo una enseñanza eficaz de la geometría de 3 a 12 años para que, además de favorecer un conocimiento profundo de las propiedades geométricas de las figuras, promueva el desarrollo de habilidades como la visualización, el razonamiento y la modelización geométrica para resolver problemas tanto en situaciones de la vida real como en dentro de las matemáticas (NCTM, 2003).

Para lograr esta finalidad, en la primera parte, se han descrito los principales conocimientos sobre geometría que el profesorado de infantil y primaria debe conocer, referentes a la posición en el espacio, las propiedades geométricas de las figuras y las transformaciones geométricas (Alsina, 2019, 2022; Canals, 1992; Clements, 1999; NCTM, 2003; Piaget e Inhelder, 1948; Van Hiele y Van Hiele, 1958). Para impulsar la comprensión de estos conocimientos geométricos y promover el desarrollo del sentido geométrico de los 3 a los 12 años, en la segunda parte se ha presentado una selección de diez materiales manipulativos esenciales. Estos materiales, como se ha indicado, se han seleccionado a partir de criterios de contenido, de finalidades didácticas y de tipo de material. Para cada material se han propuesto múltiples actividades organizadas por niveles, con el propósito de que el profesorado de infantil y primaria pueda elegir las que considere más adecuadas y aplicables en su contexto.

En las actividades descritas para cada material y grupo de edad, se ha enfatizado la necesidad de llevar a cabo una gestión basada en el planteamiento de retos, la formulación de buenas preguntas, la interacción y el diálogo o la representación. Con ello, se ha pretendido destacar que las maestras y los maestros tenemos un rol protagonista en la enseñanza de la geometría a través de materiales, y que este papel pasa por promover la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación o la representación. Es por ello que, en la esencia de cada material presentado y de cada actividad descrita, están las acciones de pensar, razonar, argumentar, justificar, comprobar, explicar, representar… puesto que son las verdaderas herramientas de las matemáticas para que el alumnado utilice de manera compresiva y eficaz el conocimiento geométrico (Alsina y Bosch, 2025; NCTM, 2003).

REFERENCIAS

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Graó.

Alsina, Á. (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática,* *3*(2), 127-159. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018

Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años).* Graó.

Alsina, Á. y Bosch, E. (2022). Numeración y cálculo en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido numérico. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática,* *5*(3), 132–167. https://doi.org/10.30612/tangram.v5i3.16420

Alsina, Á. y Bosch, E. (2023). Estadística y probabilidad en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido estocástico. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática,* *6*(3), 24-59. https://doi.org/10.30612/tangram.v6i3.17587

Alsina, Á. y Bosch, E. (2024). Álgebra en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido algebraico. *TANGRAM - Revista De Educação Matemática,* *7*(3), 2–31. https://doi.org/10.30612/tangram.v7i3.18851

Alsina, Á. y Bosch, E. (2025). Del GAMAR a la Escuela: Principios sobre el uso de materiales manipulativos en el aula de matemáticas. *NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 119,* 73-89.

Canals, M. A. (1992). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola.* Vic: Eumo Editorial.

Clements, D.H. (1999). Geometric and spatial thinking in young children. En J.V. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 66-79). National Council of Teachers of Mathematics.

Godino, J y Ruiz, F. (2004). Didáctica de la Geometría para maestros. En J. Godino (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas para Maestros* (pp. 291-322). Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.

Klein, F. C. (1939). *Elementary mathematics from an advanced standpoint. Geometry.* Dover Publications.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas “Thales”.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant.* PUF.

Van Hiele, P.M. y Van Hiele, D. (1958). A method of initiation into geometry at secondary schools. En H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry* (pp. 67-80). J. B. Wolters.