Ritmos geométricos como propuesta para desarrollar el sentido geométrico y de la medida en estudiantes de secundaria

Geometric rhythms as a proposal to develop geometric and measurement sense in middle school students

Ritmos geométricos como proposta para desenvolver o senso geométrico e de medida em estudantes do oitavo ano do ensino fundamental

Julia Reina-Martín[1], Silvia N. Moral-Sánchez[2]

Citação: Reina-Martín, J.; Moral-Sánchez, S. N. (2026). Ritmos geométricos como propuesta para desarrollar el sentido geométrico y de la medida en estudiantes de segundo año de secundaria. *Tangram: Revista de Educação Matemática, Volume 9*, e026018. https://doi.org/10.30612/tangram.v9i1.20457

Editor: Adriana Fátima de Souza Miola

Recebido: 17/10/2025
Aceito: 26/02/2026
Publicado: 25/05/2026

Texto sobre copyright.

Diagramação

Três Criativos
Agência Design

1. Universidad de Málaga, Graduada en Matemáticas por la Universidad de Málaga. Graduada en Enseñanzas Artísticas Superiores de Música en la especialidad de Interpretación de Flauta Travesera por el Conservatorio Superior de Música de Málaga. Máster en Profesorado en la especialidad de Matemáticas por la Universidad de Málaga. Máster en Matemáticas por la Universidad de Málaga (España).
2. Universidad de Málaga, Doctora en Educación Matemática por la Universidad de Almería (España). Profesora de Didáctica de la Matemática por la Universidad de Málaga (España).

*Autor correspondente: silviamoral@uma.es

Resumo: Este artigo propõe um design didático seguindo a abordagem STEAM para o oitavo ano do Ensino Fundamental. Consiste em uma situação de aprendizagem na qual o senso espacial e o de medida são trabalhados a partir da geometria plana, estabelecendo conexões interdisciplinares com a música e, assim, fomentando o trabalho colaborativo, a criatividade e a motivação dos alunos. Os objetivos deste artigo são apresentar tal design e analisar sua eficácia a partir dos resultados da intervenção em relação aos erros e dificuldades encontrados.
Palavras-chave: Sentido espacial. Sentido de medida. Figuras planas. STEAM.

Abstract: This article proposes a didactic design following the STEAM approach of middle school. This consists of a learning situation

in which spatial sense and measurement sense are worked on from plane geometry, establishing interdisciplinary connections with music and thus promoting collaborative work, creativity, and student motivation. The objectives of this article are to propose said design and analyse its effectiveness based on the results of the intervention regarding the errors and difficulties encountered.
Keywords: Spatial sense. Measurement sense. Plane figures. STEAM.

Resumen: Este artículo propone un diseño didáctico siguiendo el enfoque STEAM para Educación Secundaria Obligatoria. Este consiste en una Situación de Aprendizaje (SdA) en la que se trabajan el sentido espacial y el sentido de la medida a partir de la geometría plana, estableciendo conexiones de forma interdisciplinar con la música y fomentando, así, el trabajo colaborativo, la creatividad y la motivación del alumnado. Los objetivos de este artículo son plantear dicho diseño y analizar su eficacia a partir de los resultados de la intervención respecto los errores y dificultades encontrados.
Palabras clave: Sentido espacial. Sentido de la medida. Figuras planas. STEAM.

CONSIDERACIONES INICIALES

La normativa educativa actual española apuesta por un currículo basado en competencias que pretende superar la fragmentación del conocimiento en asignaturas presentadas de forma aislada, promoviendo un enfoque transversal e integrado (Ley Orgánica 3/2020, 2020). De esta forma, en el caso particular de las matemáticas, estas deben abordarse desde un enfoque interdisciplinar, estableciendo conexiones tanto dentro de la propia disciplina como con otras áreas del conocimiento (Montes, Codes y Contreras, 2022). Así, el enfoque STEAM es una manera idónea de implementar esta transversalidad en la enseñanza, pues convierte el proceso de enseñanza-aprendizaje en un proyecto integrado, creativo e interdisciplinar, en el que, de forma transversal, se trabajan las ciencias, tecnología, ingeniería, artes y matemáticas (García-Fuentes, Raposo-Rivas y Martínez-Figueira, 2023). Debido a sus estrechas relaciones con el arte, la geometría es un ámbito ideal para poner en práctica este tipo de proyectos.

El objetivo de este artículo es presentar un diseño didáctico STEAM llevado a cabo en un Instituto de Educación Secundaria (Ensino Fundamental) de Málaga (España) en el que se trabajan la geometría plana y la música. Así como, analizar su efectividad en el proceso de enseñanza-aprendizaje a partir del análisis de errores y dificultades que presentó el alumnado durante su implementación.

MARCO TEÓRICO

Proyectos STEAM y aprendizaje de la geometría

El enfoque STEAM es muy eficaz para fomentar la motivación, la creatividad y la autoeficacia del alumnado y se puede implementar desde edades tempranas hasta estudios universitarios (Montiel, Wilhelmi y Mannone, 2024). Esta forma de trabajar convierte el proceso de enseñanza-aprendizaje en un proyecto integrado, creativo e interdisciplinar, en el que de forma transversal se trabajan las ciencias, tecnología, ingeniería, artes y matemáticas, permitiendo desarrollar, además, el pensamiento científico, lógico, computacional y matemático (García-Fuentes et al., 2023). De esta manera, autores como Bahri, Kusumawati y Nuraini (2017) defienden que en este tipo de proyectos la implicación cognitiva del alumnado

es mayor y se aporta significado al aprendizaje, a la vez que se comprenden las relaciones entre disciplinas. Igualmente, Lam-Byrne (2023) establece que estos proyectos facilitan la atención a la diversidad, ya que a partir de ellos se puede fomentar el trabajo colaborativo, contextualizar el aprendizaje y emplear diversas formas de representación y expresión. En particular, la geometría y el arte han mantenido una relación de simbiosis a lo largo de la historia, pues en ambas disciplinas se han producido avances gracias a la otra (Alsina, Burgués y Fortuny, 1989). Por esta razón, este ámbito es el contexto ideal para desarrollar proyectos STEAM, como así lo demuestran diversas experiencias de aula (Salgado, Alsina y Filgueira, 2020).

En cuanto al proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, a partir de la investigación en su didáctica, se han desarrollado modelos que tratan de describir u organizar dichos procesos, con el objetivo de mejorarlos. El modelo de los niveles de razonamiento de Van Hiele ha resultado bastante satisfactorio y hoy es tenido en cuenta en muchas organizaciones curriculares de diferentes países (Gutiérrez, 2007). Asimismo, cabe destacar que un aspecto particularmente interesante para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría es el empleo de la visualización. La posibilidad de utilizar imágenes como recurso didáctico aporta diversas ventajas, como permitir la resolución de ciertos problemas o facilitar la comprensión de propiedades geométricas (Barrantes, Balletbo y Fernández, 2013). No obstante, la utilización de imágenes puede desembocar en obstáculos si no se emplean adecuadamente, pues la visualización es una habilidad que debe trabajarse en el aula de forma consciente (Clements y Sarama, 2021).

Relaciones entre música y geometría

Ya en la Grecia clásica, la humanidad comenzó a encontrar relaciones entre matemáticas y música. Pitágoras inició el estudio del sonido desde el punto de vista matemático, buscando relaciones numéricas en su comportamiento (Sánchez, 2015). Así, Pitágoras fue uno de los primeros en poner de manifiesto que las bases sobre las que la música se construye tienen un gran componente matemático (Castrillón, Gil y Vázquez-Gallo, 2019). En el ámbito pedagógico, trabajos como los realizados por Mall, Spychiger, Vogel y Zerlik (2016) o Hamilton et al. (2018) ponen de manifiesto el potencial didáctico de esta asociación. También se han llevado a cabo experiencias de aula exitosas, como la de Luengo et al.

(2024), en la que se establece una correspondencia entre fracciones y figuras musicales. Por otro lado, Hamilton et al. (2018) establecen una asociación entre figuras musicales y divisiones del círculo, trabajando también con equivalencia de fracciones.

Particularizando en el caso de la geometría, también en la música tiene cabida esta disciplina. Muchos compositores han empleado en sus obras de forma consciente transformaciones geométricas. Por ejemplo, un canon no es más que una melodía interpretada por varias voces a la que se le aplica una traslación (Arbonés y Milrud, 2018). En la Figura 1 se pueden ver, como ejemplo, dos voces del Canon en Re mayor de Pachelbel. En los cuatro primeros compases del pentagrama inferior se observa un diseño melódico que se repite, cuatro compases después, en el pentagrama superior; es decir, se le aplica una traslación horizontal de cuatro compases.

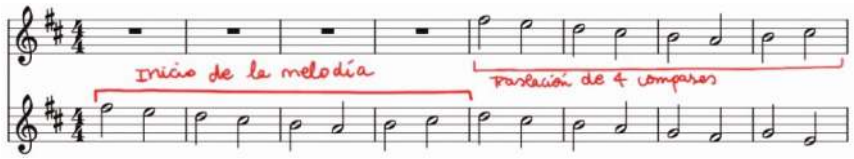


Figura 1. Ejemplo de traslación en el Canon de Pachelbel.

Fuente: elaboración propia.

Por último, cabe destacar que también se pueden representar ritmos utilizando figuras planas, tal y como muestran Toussaint (2005) y Hamilton et al. (2018) y como se mostrará más abajo en este artículo.

Errores y dificultades frecuentes

El proceso de aprendizaje de las matemáticas es complejo e inevitablemente genera dificultades. Estas dificultades tienen naturalezas distintas y se manifiestan en forma de obstáculos en el aprendizaje y de errores (Socas, 2000). Para el docente es de gran importancia conocer la naturaleza de esos errores y dificultades para poder aprovecharlos en la construcción de nuevo conocimiento matemático (D'Amore, 2007). Como ya se ha comentado, el uso de imágenes en el aprendizaje de la geometría tiene numerosas ventajas, pero si su uso no es

adecuado, puede generar obstáculos. El proceso de aprendizaje de la geometría se compone de dos elementos: la definición del concepto, referida a la información (teórica) que el estudiantado memoriza; y la imagen del concepto, formada con la experiencia (Vinner, 1991, citado en Gutiérrez, 2007). En ocasiones, la imagen del concepto y su definición no se corresponden y se produce un conflicto en la mente del alumnado. Por esta razón, el docente debe procurar que el estudiantado construya imágenes completas y coherentes con la definición del propio concepto (Barrantes y Zapata, 2008).

A continuación, se muestran ejemplos de errores producidos por la disociación que se acaba de comentar, procedentes de la clasificación de dificultades realizada por Barrantes y Zapata (2008):

- **Errores y dificultades asociados con distractores de orientación**. Se refieren a propiedades visuales que se presentan en la mayoría de las representaciones gráficas de los objetos, pero que no influyen en su definición. Por ejemplo, los triángulos rectángulos suelen dibujarse con base en uno de los catetos, lo que dificulta que este objeto se reconozca cuando se presenta apoyado en la hipotenusa.
- **Errores y dificultades asociados con distractores de estructuración**. Esto ocurre cuando un concepto se presenta de forma incompleta y se omiten algunas propiedades. Ejemplos son las representaciones de los triángulos isósceles, en las que el lado desigual suele ser el más corto; o el pensamiento de que los triángulos solo tienen una altura, como consecuencia de representarlos “apoyados” sobre uno de sus lados, paralelo al lado horizontal del folio o libro de texto.
- **Errores y dificultades asociados a los nombres de las figuras**. Las figuras que se estudian principalmente son aquellas que tienen un nombre propio, dejando de lado, por ejemplo, a los polígonos irregulares; luego, en ocasiones estos no son identificados como tales. Asimismo, tal y como indican Clements y Sarama (2021), culturalmente existe una preferencia por la simetría y son las figuras simétricas las que tienen mayor representación en la sociedad, lo que también influye en el ámbito académico.
- **Errores y dificultades asociados a las imágenes reales del concepto**. Es habitual emplear objetos reales como ejemplos de representaciones de objetos geométricos. Sin embargo, al ser estos abstractos, no tienen

una representación real fiel y se pueden atribuir características a dichos objetos que realmente no presentan.

- **Errores y dificultades asociados a las definiciones**. La presentación de conceptos geométricos suele girar en torno a definiciones, dándole así una gran importancia al aprendizaje memorístico. Además, las definiciones pueden ser distintas e interpretaciones diferentes de una misma definición pueden generar concepciones diferentes. Por ejemplo, se puede definir un triángulo isósceles como “aquel que tiene dos lados iguales”, que puede interpretarse como dos lados iguales y uno desigual o, simplemente, dos lados iguales.
- **Errores y dificultades asociados a las clasificaciones**. Las figuras geométricas pueden clasificarse por partición, es decir, pertenecer a una categoría excluye de cualquier otra; o por inclusión, las categorías están unas dentro de otras. Por ejemplo, en una clasificación por partición, un cuadrado no es un rectángulo, mientras que en una clasificación por inclusión los cuadrados son, en particular, rectángulos. En ocasiones, con el paso de un curso a otro, la forma de clasificar las figuras cambia, lo que desemboca en el surgimiento de numerosos errores y dificultades.

Por otra parte, en la construcción de conocimiento relativo al sentido de la medida también se producen dificultades y errores. Se muestran los más frecuentes según González (2015):

- **Dificultades asociadas a la conservación de la cantidad.** La formación y la posición de los objetos o figuras influyen en la experiencia sensible del alumnado, de forma que pueden relacionar la longitud o el área de un objeto con su aspecto. Por ejemplo, objetos más anchos suelen asociarse a mayores áreas que objetos más estrechos, aunque ambos ocupen la misma superficie.
- **Dificultades asociadas a la percepción de la magnitud.** Para percibir una magnitud es necesario aislar un atributo de un objeto determinado, ignorando otras muchas de sus cualidades. La dificultad que este proceso conlleva ocasiona que se produzcan errores y dificultades como, por ejemplo, establecer relaciones o dependencias entre área y perímetro.
- **Errores asociados a la introducción temprana de fórmulas.** Si las fórmulas de cálculo de áreas se introducen demasiado pronto y sin buscar su

comprensión, se producen diferentes errores. Por ejemplo, sumar la base y la altura de un rectángulo para obtener el área, en lugar de multiplicarlas.

Asimismo, Castillo-Mateo, Segovia, Castro y Molina (2012) realizan una categorización de errores frecuentes en el proceso de medición y estimación, entre los que se incluyen:

- **Error de percepción de magnitud.** Producido por confundirse una magnitud con otra, lo que se manifiesta en el empleo de unidades de medida erróneas. Por ejemplo, si un estudiante utiliza el metro para la medida de una superficie.
- **Error de conversión de unidades de medida.** Es frecuente que ocurra en las unidades de medida de superficie o de volumen.
- **Uso de procedimientos de cálculo incorrectos.** Ocurren al realizar cálculos para obtener una medida. Un ejemplo frecuente es la aplicación de fórmulas erróneas.

METODOLOGÍA

El análisis que se propone en este artículo es de tipo cualitativo, exploratorio y descriptivo (Cohen, Manion y Morrison, 2018). Los objetivos principales son, por un lado, describir un diseño didáctico de una SdA en la que prevalece la construcción de conocimiento matemático, en concreto del sentido espacial, a través de la geometría plana; y del sentido de la medida, a través de las medidas de longitud y superficie desde un análisis de los errores y dificultades. Y, por otro lado, establecer una relación entre matemáticas y música a partir del desarrollo de un proyecto STEAM.

CONTEXTO

La intervención tuvo lugar en un Instituto público de Educación Secundaria de Málaga (España), en un aula integrada por 22 estudiantes del segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (8.º do Ensino Fundamental). El grupo clase compartía un gran interés y motivación por la música, razón por la cual se planteó este diseño. Además, dicho diseño se articuló tomando como hilo conductor una historia que ambienta y conecta las actividades, ya que el empleo de narrativas

como recurso didáctico consigue convertir el contenido que se trabaja en una cuestión personal y de importancia para el que aprende, aumentando así su implicación (Landrum, Brakke y McCarthy, 2019).

La narrativa que se plantea para la SdA consiste en que una *discográfica geométrica* llamada GeoMúsica contacta con el alumnado porque busca formar personas como *ingenieros* e *ingenieras de sonido visoespacial.* Este perfil consiste en personas que componen canciones rítmicas empleando figuras planas: polígonos regulares, círculos y circunferencias. La meta del alumnado es componer una de estas canciones, dibujar su partitura, organizar un concierto y estrenar las composiciones elaboradas en una actuación.

Diseño didáctico de actividades de música y geometría

En el diseño de la SdA, se emplea un sistema de notación de ritmos inspirado en los empleados por Toussaint (2005) y por Hamilton et al. (2018). A continuación, se describe este sistema de notación, dividido en dos partes.

Representación de ritmos mediante figuras planas

El sistema de notación de ritmos que se emplea en la SdA tiene dos partes: una primera, con la que solo se puede representar lo que vamos a definir como *ritmos regulares*; y una segunda, que permite describir cualquier ritmo deseado. Entendemos por *ritmo regular* a aquel en el que solo se emplea una figuración rítmica y se obtiene, por tanto, al distribuir acentos de formas diferentes.

Primer sistema de notación

Este sistema se basa en Toussaint (2005). Si tenemos un ritmo regular de longitud (consta de pulsos), este se representará a partir de un polígono regular de lados. Se numeran los vértices y se establece una correspondencia entre estos y los pulsos del ritmo. Luego, se localizan los acentos (pulsos fuertes) del ritmo y los vértices asociados a estos pulsos se marcarán.

Para poner un ejemplo, usamos una aproximación del ritmo de inicio de la canción *We Will Rock You*, de Queen, universalmente conocida. Este ritmo tiene longitud 3, luego se representará con un triángulo equilátero. Ahora, de esos tres pulsos, el único acentuado es el tercero. Por tanto, la representación quedará como la que se muestra en la Figura 2.

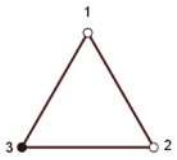


Figura 2. Ejemplo de representación de ritmo regular de longitud 3.

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, para poder denotar *dinámicas*, es decir, la intensidad con la que se interpreta un sonido, se utilizan el área y el perímetro del polígono que lo representa. Aquellos con mayor área se interpretan más fuerte que los de menor área. Por tanto, en la canción, el alumnado escribirá el área y el perímetro de cada polígono.

Segundo sistema de notación

Este sistema es similar al que utilizan Hamilton et al. (2018). Se emplea el círculo para denotar la unidad de parte, es decir, este va a representar un único golpe por cada pulso. Un ejemplo se puede ver en la Figura 3, tomando la negra como unidad de parte.



Figura 3. A la izquierda, una negra; a la derecha, su representación en el sistema.

Fuente: elaboración propia.

Si se quieren dar dos golpes iguales en un pulso, la estrategia es partir el pulso por la mitad, se divide el círculo en dos partes iguales (derecha de la Figura 4). De esta manera, se representan dos corcheas (izquierda de la Figura 4). De forma general, para denotar un número cualquiera de golpes en un pulso, se divide el círculo en partes iguales.



Figura 4. Representación de dos corcheas con el sistema de notación.

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, también se pueden representar ritmos que involucren sonidos que no tengan la misma duración, usando equivalencia de fracciones. Por ejemplo, para representar tres sonidos, siendo el primero el doble de largo que los otros dos, se divide la circunferencia por la mitad y, después, se vuelve a fraccionar una de las dos partes por la mitad. Esta representación se puede ver en la Figura 5.



Figura 5. Representación de una corchea y dos semicorcheas.

Fuente: elaboración propia.

Empleando este sistema de notación, el alumnado representará los ritmos de la canción que compongan, elaborando así su partitura geométrica como parte del producto final de la SdA, junto con la actuación-exposición del concierto.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

En este apartado se describen los detalles de diseño y organización de la SdA, así como los detalles de su implementación en las diferentes sesiones.

Recursos necesarios

Los recursos y materiales digitales necesarios para la implementación de esta SdA son: dos canciones (en esta intervención se emplearon *We Will Rock*

You (Mercury, 1977) y *Take Five*, (Desmond ,1959)), el applet *Constructor de Áreas* (PhET Interactive Simulations) y un vídeo explicativo para visualizar los razonamientos a seguir al deducir la fórmula del área del círculo. En cuanto a recursos manipulativos, se hace uso del tangram y de las figuras del juego Polydron, de objetos cotidianos para establecer unidades de medida no convencionales, de cintas métricas y objetos circulares, de círculos de corcho divididos en secciones, de un plano del Instituto y de instrumentos musicales de pequeña percusión.

Estrategias metodológicas

La metodología en el diseño de la SdA es el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP). Esta estrategia metodológica consiste en generar procesos de aprendizaje a partir de la producción y desarrollo de un proyecto a través del trabajo colaborativo (Ruiz y Ortega-Sánchez, 2022). Siguiendo a Benjumeda, Romero y López-Martín (2015) es el contexto ideal para el aprendizaje de matemáticas, ya que, a través de la participación en el proyecto, se ponen en práctica habilidades y competencias necesarias para abordar tareas desafiantes, se fomenta el debate y la reflexión, el alumnado adquiere libertad de elección, toma responsabilidad en su aprendizaje y aumenta su motivación a partir de los diferentes contextos, temáticas o la elaboración del producto final que el proyecto conlleva.

Distribución de sesiones. Transposición didáctica

La intervención tuvo lugar a lo largo de doce sesiones, todas ellas de una hora de duración. Favoreciendo la metodología empleada en el diseño, la disposición del alumnado en el aula era flexible, permitiendo organizaciones individuales (sesiones 1 y 2) y grupales (sesiones 3-12).

Sesión 1. Objetivo: presentar la SdA

La intervención se comienza estableciendo una relación entre las matemáticas y la música a través del ritmo, entendido como un patrón algebraico, tras reproducir fragmentos musicales de las canciones seleccionadas. Entonces, se introduce al alumnado la narrativa de la SdA y la primera parte del sistema de notación de ritmos. Posteriormente, se realiza una evaluación inicial, consistente en preguntas básicas sobre figuras planas y sobre la relación del alumnado con

la geometría, para obtener información sobre su percepción de la materia y sus conocimientos previos.

Sesión 2. Objetivo: clasificar los polígonos

Se lleva a cabo una clasificación de polígonos a partir de los razonamientos del alumnado, una vez este responde a los criterios de clasificación que emplearía para clasificar los polígonos. En esta intervención, se llegó al consenso de emplear como criterios el tipo de ángulos, el número y la longitud de los lados de la figura. Así, se elaboró una clasificación de polígonos conjuntamente, a través de la participación de estudiantes en la pizarra, atendiendo a los criterios elegidos. Después, se trabajó la clasificación de triángulos y de cuadriláteros con mayor profundidad, a partir de la comparación de distintos triángulos o cuadriláteros representados en imágenes. El hecho de deducir la clasificación a partir de observaciones y criterios del alumnado tiene en cuenta su lógica interna y representaciones propias (Lupiáñez, 2016).

Sesión 3. Objetivos: comprender qué significa medir

El objetivo de esta sesión es dotar de significado a los procesos de medición, pues se introducirán posteriormente los conceptos de área y perímetro. Para ello, siguiendo a Moreno, Gil y Montoro (2015), se establece una unidad de longitud no convencional, en este caso utilizando un bolígrafo. Seguidamente, se debate sobre las ventajas o inconvenientes que puede presentar esta medida, haciendo surgir la necesidad de unidades universalmente conocidas, introduciéndose entonces las del Sistema Decimal. Después, se plantea el mismo problema para medir superficies y se sigue un procedimiento similar, al que se añade la utilización del applet *Constructor de Áreas* (PhET Interactive Simulations) para deducir la fórmula del área de los cuadrados y rectángulos. De esta manera, se favorece la comprensión de la procedencia de la fórmula, tratando de evitar la introducción temprana y sin significado de estas, tal y como establece González (2015).

Sesión 4. Objetivo: deducir fórmulas del área de polígonos

A cada grupo se le reparten figuras de tangram y del juego Polydron. Guiados por el profesorado y usando estos recursos, deducen las fórmulas del área

de polígonos, descubriendo que distintas figuras pueden tener la misma área; trabajan estrategias de descomposición o recomposición de figuras para obtener su área (Burgués, 2015); y establecen unidades de medida no convencionales para medir áreas al utilizar una figura con la que se pueda cubrir la superficie de otra de mayor tamaño (Figura 6). Esta práctica permite comprender que, en general, área y perímetro son magnitudes independientes (Maz-Machado, Argudo y Rodríguez, 2018) y tiene en consideración las dificultades y errores que establece González (2015).

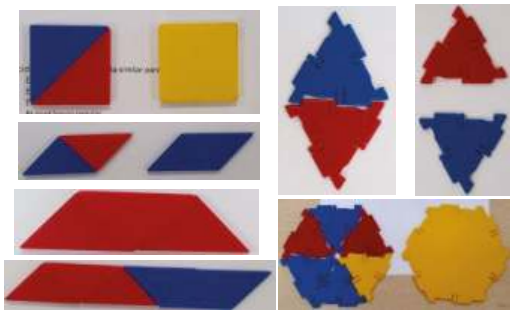


Figura 6. Ejemplos de configuraciones de las piezas para deducir fórmulas de áreas.

Fuente: elaboración propia.

Sesión 5. Objetivos: introducir y comprender el Teorema de Pitágoras

La sesión comienza con la proposición del ejercicio de calcular el área de la Figura 7, de la que no disponen todas las medidas necesarias.

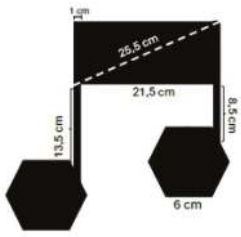


Figura 7. Ejercicio de figura para calcular el área.

Fuente: elaboración propia.

De esta forma, surge el teorema de Pitágoras como herramienta para resolver la situación. Además, siguiendo la recomendación de D'Amore (2007), se utiliza la historia como recurso didáctico, conversando sobre los Pitagóricos y las investigaciones de Pitágoras y el sonido. Después, se entregan figuras de Tangram a cada grupo para que demuestren el teorema de forma manipulativa, como, por ejemplo, propone Lorenzo (2016).

Sesión 6. Objetivos: descubrir el número π y la fórmula de la longitud de la circunferencia

En esta sesión se introduce el sistema de notación musical de la SdA en el que se emplean círculos y circunferencias como recurso para representar más ritmos. Así, surge la necesidad de conocer el perímetro y área de un círculo, para que el alumnado pueda usar estas figuras en sus composiciones. Por esta razón, los principales objetivos de esta sesión son descubrir el número π y deducir la fórmula de la longitud de la circunferencia. Para ello, a cada grupo se le entrega una cinta métrica, 4 objetos circulares como los que se encuentran en la Figura 8 y un recurso didáctico impreso. Este consiste en 3 tareas: en la primera, necesitarán medir el contorno y el diámetro de los objetos; en la segunda, deducir la relación lineal entre ambas magnitudes; y en la tercera, realizar sus cocientes, descubriendo π y la fórmula de la longitud de la circunferencia. Esta actividad se inspira en otra propuesta por Martínez et al. (1989).



Figura 8. Materiales de la actividad.

Fuente: elaboración propia.

Sesión 7. Objetivo: deducir la fórmula del área del círculo

Utilizando el material manipulativo de la Figura 9 y guiado por el profesorado, el alumnado deduce la fórmula del área del círculo. Finalmente, se reproduce un vídeo que emplea la misma estrategia que han seguido (LED Me Explain, 2021), de forma que esta resulta más visual.

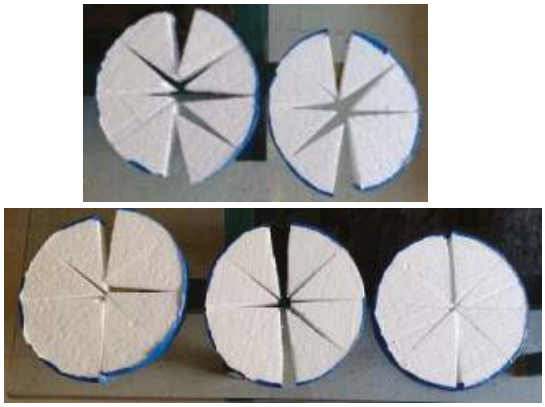


Figura 9. Materiales de la actividad del área del círculo.

Fuente: elaboración propia.

Sesión 8. Objetivo: fomentar la creatividad y el trabajo colaborativo

Esta sesión comienza haciéndole entrega al alumnado de un certificado de *ingeniero* o *ingeniera de sonido visoespacial*, para favorecer su motivación. Después, el alumnado recibe una ficha de composición, en la que se plantean preguntas sobre sus decisiones creativas, por ejemplo, sobre el ritmo que quieren componer o sobre lo que les gustaría transmitir con su música y las dinámicas que quieren emplear (el área de las figuras que emplean). Tras contestar a estas preguntas, el alumnado elabora su partitura geométrica, en la que aparecen los polígonos o círculos que representan los ritmos y sus perímetros y áreas, como muestra la Figura 10.

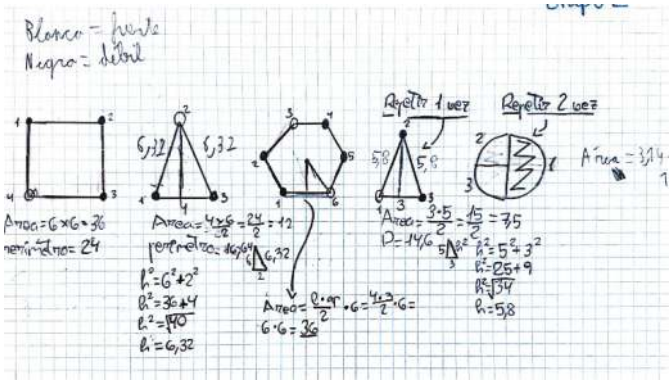


Figura 10. Ejemplo de canción elaborado por uno de los grupos.

Fuente: elaboración del alumnado.

Sesión 9. Objetivo: comprender los conceptos de semejanza y escala

Esta sesión comienza mostrando un mensaje de la discográfica en el que se pide al alumnado que organice el concierto, decidiendo un espacio para el público y calculando el aforo que este espacio permite. Para ello, se le hace entrega de un plano del patio del instituto, el lugar donde este se celebraría, y que utilizarán para hacer frente al problema. El resto de la sesión se dedica a introducir los conceptos de semejanza y escala para poder interpretar y trabajar con el plano. Además, se lleva a cabo una práctica, inspirada por Luengo et al. (1990), en la que, utilizando cintas métricas, se comprueba que una fotografía es semejante a los objetos que aparecen en ella.

Sesión 10. Objetivo: fomentar el trabajo colaborativo y la resolución de problemas

En esta sesión, cada grupo calcula el aforo del concierto según su planificación. Se entregan reglas y cintas métricas por si quieren emplearlas en la realización de la actividad. Esta es completamente abierta y se ha configurado tratando de cumplir el mayor número de requisitos que Barba y Calvo (2017) establecen para que una tarea sea rica: accesibilidad a todo el alumnado, suponer un reto, no tener una única solución, invitar a la toma de decisiones justificadas y fomentar la reflexión.

Sesión 11. Objetivo: realizar un repaso de todo lo trabajado

En esta sesión tiene lugar un repaso de todos los conceptos trabajados a partir de las peticiones del alumnado y de la resolución de ejercicios. Se analizarán algunas evidencias y resultados de estos ejercicios en el siguiente epígrafe.

Sesión 12. Objetivo: mostrar al resto de grupos los productos finales

Esta sesión es la última y en ella tiene lugar el concierto. En el concierto, cada grupo sube al escenario, se presenta y hace una breve exposición sobre su canción, comentando las figuras que han usado, si querían transmitir un ritmo ya existente o lo han inventado, cómo han elaborado la partitura geométrica, etc. Además, comentan cómo abordaron la organización del concierto y las dificultades a las que se enfrentaron. Finalmente, interpretan la canción con palmadas o instrumentos de percusión.

Resultados y análisis

En este apartado mostramos evidencias del trabajo del alumnado y se analizan y clasifican errores que se manifiestan en algunas de estas producciones, siguiendo los criterios de clasificación de Barrantes y Zapata (2008) y González (2015). Además, se mencionan los indicadores de aprendizaje empleados para la evaluación del alumnado y de la efectividad del diseño planteado.

En la Figura 11, se observa la resolución de un estudiante al ejercicio de calcular el área de la figura musical que se muestra, en la que se da cuenta de que los triángulos tienen más de una altura. Esta dificultad corresponde a dificultades asociadas a distractores de estructuración que proponen Barrantes y Zapata (2008). De esta manera, el concepto no se ha presentado de forma completa y esta propiedad de los triángulos ha permanecido oculta. Como se ha comentado anteriormente, esta es una consecuencia del uso inadecuado de imágenes según Gutiérrez (2007). Además, también se aprecia que, para realizar el ejercicio, finalmente elige la altura tomando como base la hipotenusa, lo cual también se puede relacionar con la dificultad que conlleva asumir que la altura de un triángulo puede coincidir con uno de sus lados; de nuevo, en este aspecto están influyendo distractores de estructuración.

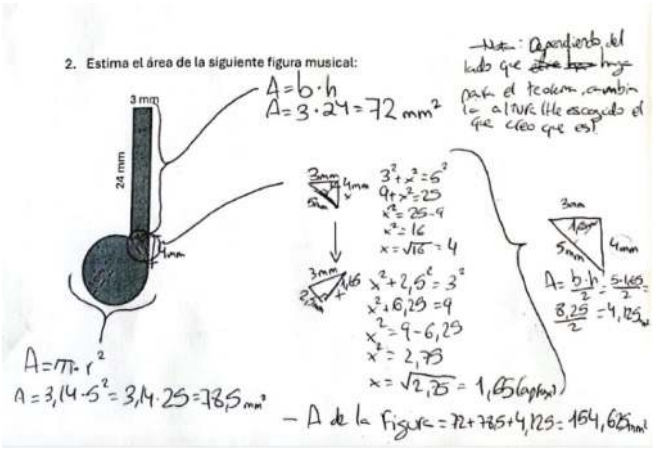


Figura 11. Respuesta de estudiante en un ejercicio de la sesión de repaso.

Fuente: elaboración del alumnado.

En la Figura 12 vemos el trabajo realizado por uno de los grupos a la hora de obtener la fórmula del área del círculo. Se puede observar cómo el material manipulativo ha permitido el descubrimiento de la fórmula y la buena capacidad del grupo para comunicarse matemáticamente, utilizando tanto dibujos como expresiones algebraicas.

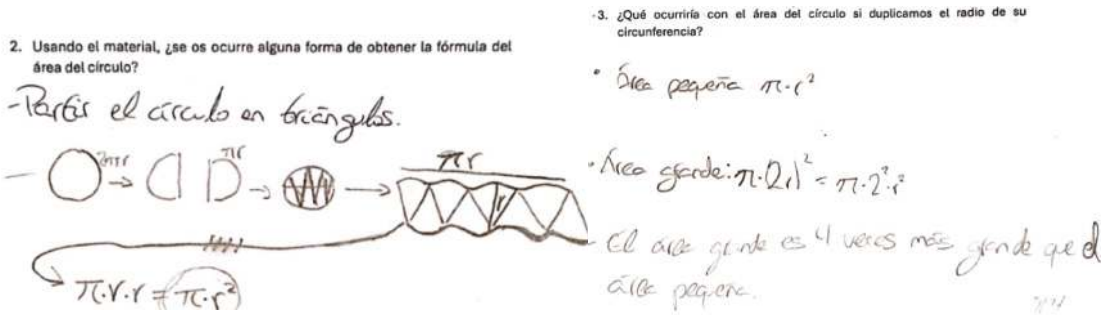


Figura 12. Trabajo de un grupo con el material manipulativo.

Fuente: elaboración del alumnado.

El siguiente ejercicio que se muestra consiste en calcular el número de personas que podrían venir al concierto si este se celebrase en esa aula. En la evidencia que se observa en la Figura 13, se ve que la estudiante, para calcular el área, primero suma los lados y después multiplica esa cifra por sí misma. Esto

podría deberse a dos factores distintos. En primer lugar, la figura puede parecer un cuadrado. Entonces, sabiendo que para calcular el área debe multiplicar el lado por sí mismo, al tener dos medidas diferentes ha decidido sumarlas para obtener una única y así solventar la situación. Por otro lado, podría haber ocurrido que las fórmulas del área se hayan introducido demasiado pronto y no se les haya dotado de significado de forma adecuada, tal y como indica González (2015).

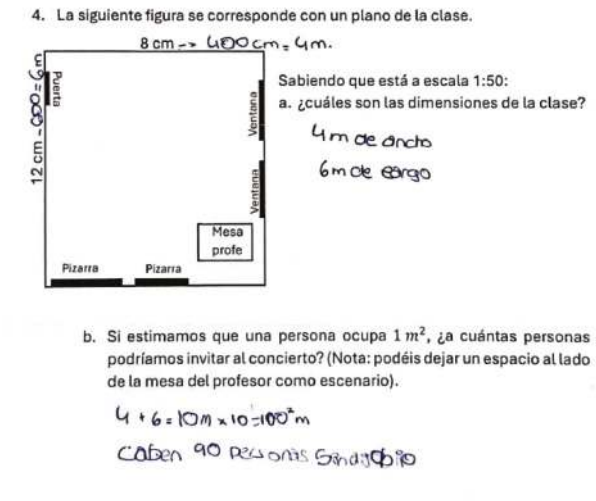


Figura 13. Respuesta de estudiante en un ejercicio de la sesión de repaso.

Fuente: elaboración del alumnado.

En la Figura 14, se observa cómo este grupo emplea una estrategia diferente de la prevista para obtener el área del círculo. En vez de emplear el material manipulativo para encajar las piezas y obtener algo similar a un romboide, dicho material les da la idea de inscribir en el círculo polígonos que cada vez tienen un mayor número de lados. Este ejemplo muestra la importancia de atender y validar la lógica interna del alumnado, además de sus representaciones (Lupiáñez, 2016).

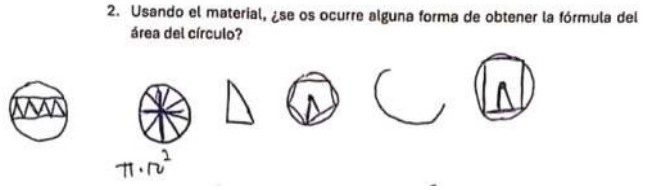


Figura 14. Respuesta de estudiante en un ejercicio.

Fuente: elaboración del alumnado.

En la Figura 15, observamos dos casos en los que la orientación actúa como distractor (Barrantes y Zapata, 2008). A la izquierda, vemos que la estudiante afirma que la primera figura es un romboide y la segunda un rombo debido a la orientación de las figuras, aunque en ambas aprecia cierta regularidad, tal y como expresa al inicio. No obstante, después afirma que ambas figuras son un cuadrado al darse cuenta de que la longitud de los lados, en ambos casos, es la misma. De esta manera, no se ha apreciado una presentación completa de la clasificación de polígonos, puesto que el único criterio que emplea para determinar la figura es la longitud de los lados, obviando sus ángulos. Esto también explica que haya afirmado que ambas figuras sean regulares, aunque realmente solo lo es la de la izquierda; se produce un error consecuencia de distractores de estructuración y de clasificación, empleando la terminología de Barrantes y Zapata (2008). Por otro lado, también dice que, como los lados miden lo mismo para ambas figuras, estas tienen el mismo perímetro y la misma área. Por tanto, ocurre lo que González (2015) denomina una dificultad asociada a la magnitud, pues se establece una relación de dependencia directa entre ambas magnitudes. El caso de la derecha es similar al anterior, siendo la orientación de la figura, de nuevo, un criterio de clasificación más determinante que sus ángulos, a los cuales no hace mención. Estos ejemplos ponen de manifiesto que se requiere mejorar la presentación de las figuras planas, de forma que esta sea completa, y sus criterios de clasificación, para evitar las dificultades ocasionadas por distractores de estructuración y de clasificación.

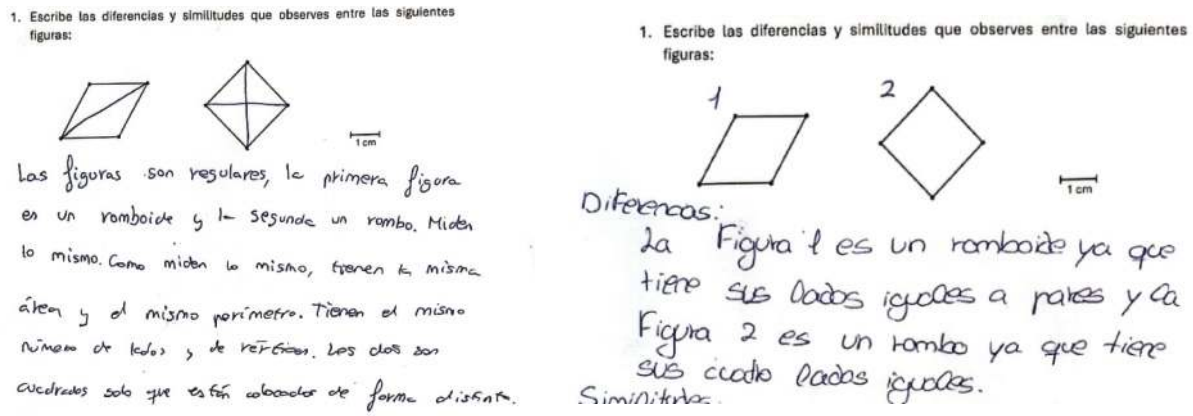
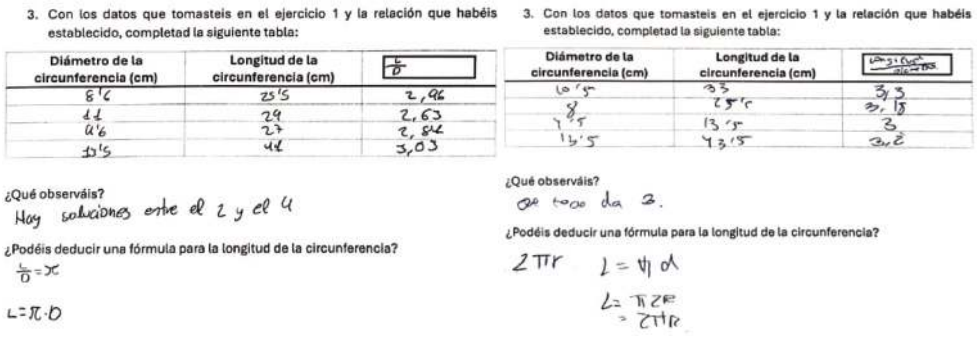


Figura 15. Respuesta de estudiantes en un ejercicio de la sesión de repaso.

Fuente: elaboración del alumnado.

Para acabar el análisis, la Figura 16 muestra un par de prácticas llevadas a cabo por el alumnado en la actividad de deducir la fórmula de la longitud de la circunferencia. En el primer ejercicio, debían medir el diámetro y el contorno de objetos circulares cotidianos y anotar los datos; y en el segundo, deducían la relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes que habían medido. Así, en el tercer ejercicio comprueban matemáticamente la relación de proporcionalidad directa y descubren la constante de proporcionalidad: π.


3. Con los datos que tomasteis en el ejercicio 1 y la relación que habéis establecido, completad la siguiente tabla:

Diámetro de la circunferencia (cm)	Longitud de la circunferencia (cm)	$\frac{L}{D}$
8'2	25'5	2,96
11	29	2,63
9'6	27	2,84
13'5	44	3,03

¿Qué observáis?
Hay soluciones entre el 2 y el 4

¿Podéis deducir una fórmula para la longitud de la circunferencia?
$\frac{L}{D} = \pi$
$L = \pi \cdot D$

3. Con los datos que tomasteis en el ejercicio 1 y la relación que habéis establecido, completad la siguiente tabla:

Diámetro de la circunferencia (cm)	Longitud de la circunferencia (cm)	$\frac{L}{D}$
10'5	33	3,3
8	25'12	3,15
9'5	13'5	3
13'5	43'5	3,2

¿Qué observáis?
Que todo da 3.

¿Podéis deducir una fórmula para la longitud de la circunferencia?
$2\pi r$ $L = \pi d$
$L = \pi 2r$
$= 2\pi r$

Figura 16. Respuesta de un grupo en un ejercicio.

Fuente: elaboración del alumnado.

Finalmente, como indicadores de aprendizaje se emplearon criterios de evaluación del Real Decreto 217/2022 de la actual Normativa Española. En concreto, un resumen de los empleados en esta intervención son los siguientes: interpretar problemas matemáticos de la vida cotidiana, organizar los datos y establecer relaciones entre ellos; aplicar herramientas y estrategias apropiadas en la resolución de problemas de la vida cotidiana, como la descomposición en problemas más simples, la estimación o la búsqueda de patrones; comprobar, a partir de la lectura comprensiva, la validez y la coherencia de las soluciones obtenidas en el contexto del problema; desarrollar el pensamiento crítico y creativo; desarrollar el autoconcepto matemático y una actitud perseverante y positiva, aceptando críticas constructivas y razonadas, para tomar conciencia de los errores cometidos y aprender de ellos; y, finalmente, colaborar de forma activa en la construcción de relaciones saludables en grupos heterogéneos, de forma que se respeten las diferentes opiniones.

De esta manera, pese a los errores cometidos y a las dificultades manifestadas en algunas producciones del alumnado, el desempeño de este y el resultado de sus tareas fueron muy satisfactorios, destacando la implicación y participación del alumnado que, en su mayoría, cumplió los objetivos planteados y desempeñó con éxito los retos propuestos.

CONSIDERACIONES FINALES

Los buenos resultados de implicación e interés del alumnado ponen en valor y ejemplifican la efectividad de los proyectos STEAM. El empleo del sistema de notación musical basado en Hamilton et al. (2018) y Toussaint (2005) permitió, además, trabajar la equivalencia de fracciones y el área de sectores circulares con mayor fluidez y facilidad. Se muestra así que, además de las relaciones entre música y matemáticas que ponen de manifiesto Arbonés y Milrud (2018), estas pueden extenderse y aplicarse al ámbito de la didáctica. Además, la organización y el desarrollo del concierto fomentaron las relaciones entre el alumnado y la puesta en valor del trabajo que realizaron durante las sesiones.

Finalmente, respecto al análisis de evidencias, basado en las clasificaciones y descripciones de errores y dificultades de Barrantes y Zapata (2008) y González (2015), se ha comprobado que la mayoría de los errores manifestados se deben a que la orientación actúa como distractor. Esto puede deberse a que en la implementación de la SdA se emplearon imágenes estáticas y poco exhaustivas para introducir y clasificar los polígonos. Aunque después se empleó material manipulativo, útil para evitar este tipo de dificultades (Burgués, 2015), el conocimiento comenzó a construirse a partir de las imágenes presentadas en la segunda sesión de la implementación. De esta forma, en cuanto a la construcción de conocimiento matemático, este diseño admite algunas mejoras, como son el empleo de material manipulativo para presentar las figuras planas y así tratar de evitar las dificultades en las que la orientación se toma como criterio clasificador de figuras (Barrantes y Zapata, 2008) o emplear imágenes de forma más exhaustiva, permitiendo presentar los conceptos de forma completa y que la definición y la imagen del concepto se correspondan adecuadamente (Gutiérrez, 2007).

Contribuição dos autores: Conceptualization, J.R.-M., S.-N.M.-S.; Data curation, J.R.-M., S.-N.M.-S.; Formal analysis, J.R.-M., S.-N.M.-S.; Desing of study, J.R.-M.; Investigation, J.R.-M., S.-N.M.-S.; Methodology, J.R.-M., S.-N.M.-S.; Writing – original draft, J.R.-M; Writing – review & editing, J.R.-M., S.-N.M.-S; Supervision, J.R.-M., S.-N.M.-S.
Conflito de interesse: The authors declare no conflict of interest.
Agradecimentos: The authors wish to acknowledge the University of Malaga and the participating students for their contribution to the project.

REFERENCIAS

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J. M. (1989). *Invitación a la didáctica de la Geometría*. Síntesis.

Arbonés, J., Milrud, P. (2018). *Música y matemáticas*. National Geographic.

Bahri, S., Kusumawati, L. y Nuraini, L. (2017). STEAM Education Based On Local Wisdom Coffee Plantation In Jember To Improve The Competitiveness at 21st Century. *Pancaran Pendidikan FKIP Universitas Jember*, *6*(3), 126-135.

Barba, D. y Calvo, C. (2017). Tareas ricas para clasificar y describir figuras. *Suma*, (86), 83-88.

Barrantes, M. y Zapata, M. A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza--aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto, Revista De Educación*, *27*(1), 55-71.

Barrantes, M., Balletbo, I., Fernández, M. A. (2013). Enseñar Geometría en Secundaria. *ACADEMICUS Revista de Ciencias de la Educación*, *1*(3), 26-33.

Benjumeda, F. J., Romero, I. y López-Martín, M. M. (2015). Alfabetización matemática a través del aprendizaje basado en proyectos en secundaria en C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 163-172). Alicante: SEIEM.

Burgués, C. (2015). El tangram chino y otros rompecabezas geométricos. *Suma*, *78*, 1-5.

Castillo-Mateo, J. J., Segovia, I., Castro, E., y Molina, M. (2012). Categorización de errores en la estimación de cantidades de longitud y superficie. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 63-74). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Castrillón, M., Gil, O., Vázquez-Gallo, M. J. (2012). Ingeniería y Matemática: armonías. *Pensamiento Matemático*, *9*(2), 37-48.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2021). *Learning and Teaching Early Math. The Learning Trajectories Approach*. Routledge.

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. Routledge.

D'Amore, B. (2007). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Cuadernos del Seminario en educación*, (8), Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Desmond, P. (1959). Take five. En *Time Out*. Nueva York, NY: Columbia Records.

García-Fuentes, O., Raposo-Rivas, M. y Martínez-Figueira, M. (2023). El enfoque educativo STEAM: una revisión de la literatura. *Revista Complutense de Educación, 34*(1), 191-202.

González, M. J. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las magnitudes y su medida en P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 281-306).

Gutiérrez, A. (2007). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría en P. Flores, F. Ruiz y M. de la Fuente (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58).

Hamilton, T. J., Doai, J., Milne, A., Saisanas, V., Calilhana, A., Hilton, C., Goldwater, M. y Cohn, R. (2018). Teaching Mathematics with Music: A Pilot Study. *Proceedings of IEEE International Conference on Teaching, Assessment and Learning for Engineering (TALE)*, 927-931.

Lam-Byrne, A. G. (2023). El aprendizaje STEAM: una práctica inclusiva. *Revista Científica Episteme y Tekne*, *2*(1). https://doi.org/10.51252/rceyt.v2i1.466

Landrum, R. E., Brakke, K. y McCarthy, M. A. (2019). The Pedagogical Power of Storytelling. *Scolarship of Teaching and Learning in Psycology*, *5*(3), 247-253, https://doi.org/10.1037/stl0000152

LED Me Explain. (2021, 10 de julio). *¿Por qué el área del círculo es πr²? (Demostración | Método 1)* [Archivo de vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=qMoP0LAhbkc

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado, núm. 340, de 30 de diciembre de 2020.

Lorenzo, J. (2016, 28 de abril). *949. Pitágoras y el tangram. Resolución*. Pinceladas y brochazos de… Matemáticas. https://joselorlop.blogspot.com/2016/04/949-pitagoras-y-el-tangram-resolucion.html

Luengo, G., Sanz, M. T., Valenzuela, C. y López-Iñesta, E. (2024). La notación musical: herramienta para el aprendizaje de las fracciones. *Educación Matemática*, *36*(1), 187-221, https://doi.org/10.24844/EM3601.07

Luengo, R., Sánchez, C., Mendoza, M., Casas, L. M., Márquez, L. y Blanco, L. (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Síntesis.

Lupiáñez, J. L. (2016). Sistemas de representación en L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 119-137). Pirámide.

Mall, P., Spychiger, M., Vogel, R. y Zerlik, J. (2016). European Music Portfolio (EMP)-Maths:'Sounding Ways into Mathematics': A Manual for Teachers. Frankfurt University of Music and Performing Arts. http://maths.emportfolio.eu/images/deliverables/Teacher_Handbook.pdf

Martínez, A., Juan, F., Aguila, F., De Andrés, S., Arnal, J., Burgos, E., Casado, P., Cuenca, M., García, V., Hens, M. M., Moyano, M., Palenzuela, A., De los Reyes, E., Rodríguez, M. A., De Torres, J. y Torres, E. (1989). *Una metodología activa para la enseñanza de la geometría*. Síntesis.

Maz-Machado, A., Argudo, C. y Rodríguez, M. (2018). Explicando la diferencia entre perímetro y área con el Tangram. *Épsilon*, (99), 55-64.

Mercury, F. (1977). We will rock you. En *News of the World*. Londres, Reino Unido: EMI Records.

Montes, M., Codes, M. y Contreras, L. C. (2022). Consideraciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en L. J. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 37-54). Universidad de Granada.

Montiel, M., Wilhelmi, M. R. y Mannone, M. (2024). Assessment of mathematical learning in a musical composition workshop applying tools from the onto-semiotic approach. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 38, http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220021

Moreno, M. F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida en P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 147-168).

PhET Interactive Simulations. (s. f.). *Constructor de áreas*. Universidad de Colorado Boulder. https://phet.colorado.edu/es/simulations/area-builder/about

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, núm. 76, de 30 de marzo de 2022.

Ruiz, D. Ortega-Sánchez, D. (2022). El Aprendizaje Basado en Proyectos: una revisión sistemática de la literatura (2015-2022). Revista Internacional de Humanidades, 1-14. https://doi.org/10.37467/revhuman.v11.4181

Salgado, M., Alsina, A. y Filgueira, S. (2020). Argumentación matemática a través de actividades STEAM en educación infantil. *Épsilon*, (104), 45-57.

Sánchez, V. (2015). Una revisión histórica del componente matemático en torno a la música. *ArtyHum*, (17), 154-164.

Socas, M. (2000). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (2.ª ed., pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Toussaint, G. (2005). The Euclidean algorithm generates traditional musical rhythms. *Renaissance Banff: Mathematics, Music, Art, Culture*, 47-56.