Tangram
Revista de Educação Matemática

DOI: 10.30612/tangram.v9i1.19859

Fractais Táteis: Uma Ponte Sensorial entre a Abstração Matemática e a Percepção Humana

Tactile Fractals: A Sensory Bridge between Mathematical Abstraction and Human Perception

Fractales Táctiles: Un Puente Sensorial entre la Abstracción Matemática y la Percepción Humana

Ana Luisa Reis Silva de Sena
Universidade do Estado de Minas Gerais (UEMG)
Localização – Ibirité, Minas Gerais, Brasil
ana.1395295@discente.uemg.br
https://orcid.org/0000-0001-6094-8360

Danilo Rodrigues Zinatelli Cesar
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
Localização – Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil
danilorcesar@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-6640-1136

Resumo: Desde os primórdios, a relação entre humanidade e natureza tem sido marcada pela busca incessante de compreensão de seus padrões complexos, os quais inspiram tanto a arte quanto a ciência. Nesse contexto, os fractais emergem como representações matemáticas capazes de traduzir a auto-similaridade e a infinitude de estruturas naturais. Este artigo propõe uma metodologia para materializar conceitos abstratos da Geometria Fractal por meio da impressão 3D, tomando a curva de Koch como objeto de estudo. Além de explorar sua construção iterativa em dimensões 2D e 3D, o trabalho detalha estratégias técnicas para transpor desafios inerentes à fabricação digital, como a preservação de detalhes microscópicos em escalas macroscópicas. O processo inicia-se com a modelagem matemática da curva, seguida de algoritmos de extrusão paramétrica para conferir volume ao fractal, mantendo sua invariância de escala. A etapa de fatiamento, realizada no software Ultimaker Cura, demandou ajustes precisos em parâmetros como altura de camada e velocidade de impressão, garantindo a integridade estrutural sem comprometer a resolução das iterações. Destaca-se ainda a otimização topológica para equilibrar rigidez e leveza, essencial em objetos com alta densidade de arestas. Para além da contribuição técnica, o estudo enfatiza o potencial pedagógico e inclusivo dos fractais táteis. Ao transformar equações em objetos físicos, democratiza-se o acesso a conceitos como dimensionalidade fracionária e recursividade, tradicionalmente restritos a representações visuais. Testes preliminares com grupos educacionais, incluindo indivíduos com deficiência visual, revelaram que a manipulação tátil facilita a internalização de noções abstratas, estimulando o raciocínio espacial e a interdisciplinaridade entre matemática, arte e tecnologia. Ademais, a materialização da curva de Koch suscita reflexões estéticas sobre a interseção entre ordem e caos, convidando à apreciação sensorial de padrões tradicionalmente analisados sob perspectivas puramente teóricas. Conclui-se que a metodologia proposta não apenas supera limitações práticas da fabricação de fractais tridimensionais, mas também inaugura novas fronteiras para o ensino inclusivo de matemática avançada. Ao unir precisão técnica a funcionalidade educativa, este trabalho reforça o papel da impressão 3D como ponte entre abstração e realidade, ampliando horizontes cognitivos e promovendo acessibilidade.

Palavras-chave: Geometria fractal. Impressão 3D. Curva de Koch. Educação inclusiva. Acessibilidade tátil.

Abstract: Since ancient times, the relationship between humanity and nature has been marked by the relentless pursuit of understanding its complex patterns, which inspire both art and science. In this context, fractals emerge as mathematical representations capable of translating the self-similarity and infiniteness of natural structures. This article proposes a methodology to materialize abstract concepts of fractal geometry through 3D printing, using the Koch curve as a case study. Beyond exploring its iterative construction in 2D and 3D dimensions, the work details technical strategies to overcome challenges inherent to digital fabrication, such as preserving microscopic details at macroscopic scales. The process begins with the mathematical modeling of the curve, followed by parametric extrusion algorithms to add volume to the fractal while maintaining its scale invariance. The slicing phase, performed in Ultimaker Cura software, required precise adjustments to parameters like layer height and print speed to ensure structural integrity without compromising the resolution of iterations. Topological optimization is also highlighted to balance stiffness and lightness, essential for objects with high edge density. Beyond its technical contribution, the study emphasizes the pedagogical and inclusive potential of tactile fractals. By transforming equations into physical objects, access to concepts like fractional dimensionality and recursiveness is democratized, concepts traditionally restricted to visual representations. Preliminary tests with educational groups, including individuals with visual impairments, revealed that tactile manipulation facilitates the internalization of abstract notions, stimulating spatial reasoning and interdisciplinarity between mathematics, art, and technology. Furthermore, the materialization of the Koch curve sparks aesthetic reflections on the intersection of order and chaos, inviting sensory appreciation of patterns traditionally analyzed through purely theoretical lenses. It is concluded that the proposed methodology not only overcomes practical limitations in manufacturing three-dimensional fractals but also opens new frontiers for inclusive education in advanced mathematics. By uniting technical precision with educational functionality, this work reinforces 3D printing's role as a bridge between abstraction and reality, expanding cognitive horizons and promoting accessibility

Keywords: Fractal Geometry. 3D Printing. Koch Curve. Inclusive Education. Tactile Accessibility.

Resumen: Desde los albores de la humanidad, la relación entre el ser humano y la naturaleza ha estado marcada por la búsqueda incansable de comprender sus patrones complejos, los cuales inspiran tanto al arte como a la ciencia. En este contexto, los fractales emergen como representaciones matemáticas capaces de traducir la autosimilitud y la infinitud de las estructuras naturales. Este artículo propone una metodología para materializar conceptos abstractos de la geometría fractal mediante la impresión 3D, tomando la curva de Koch como objeto de estudio. Además de explorar su construcción iterativa en dimensiones 2D y 3D, el trabajo detalla estrategias técnicas para superar los desafíos inherentes a la fabricación digital, como la preservación de detalles microscópicos en escalas macroscópicas. El proceso inicia con el modelado matemático de la curva, seguido de algoritmos de extrusión paramétrica para conferir volumen al fractal, manteniendo su invariancia de escala. La etapa de laminado, realizada en el software Ultimaker Cura, requirió ajustes precisos en parámetros como la altura de capa y la velocidad de impresión, garantizando la integridad estructural sin comprometer la resolución de las iteraciones. También se destaca la optimización topológica para equilibrar rigidez y ligereza, esencial en objetos con alta densidad de aristas. Más allá de su contribución técnica, el estudio enfatiza el potencial pedagógico e inclusivo de los fractales táctiles. Al transformar ecuaciones en objetos físicos, se democratiza el acceso a conceptos como la dimensionalidad fraccionaria y la recursividad, tradicionalmente restringidos a representaciones visuales. Pruebas preliminares con grupos educativos, incluyendo personas con discapacidad visual, revelaron que la manipulación táctil facilita la internalización de nociones abstractas, estimulando el razonamiento espacial y la interdisciplinariedad entre matemáticas, arte y tecnología. Además, la materialización de la curva de Koch suscita reflexiones estéticas sobre la intersección entre orden y caos, invitando a la apreciación sensorial de patrones tradicionalmente analizados desde perspectivas puramente teóricas. Se concluye que la metodología propuesta no solo supera limitaciones prácticas en la fabricación de fractales tridimensionales, sino que también inaugura nuevas fronteras para la enseñanza inclusiva de matemáticas avanzadas. Al unir precisión técnica con funcionalidad educativa, este trabajo refuerza el papel de la impresión 3D como puente entre la abstracción y la realidad, ampliando horizontes cognitivos y promoviendo accesibilidad.

Palabras clave: Geometría Fractal. Impresión 3D. Curva de Koch. Educación Inclusiva. Accesibilidad Táctil.

Recebido em 20/05/2025
Aceito em 18/07/2025

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A busca por compreender os padrões complexos que regem a natureza sempre fascinou a humanidade, impulsionando avanços tanto na arte quanto na ciência. Durante séculos, a Geometria Euclidiana foi considerada a abordagem ideal para descrever o mundo físico, conforme exemplificado pelos estudos de Euclides em formas planas e regulares. Entretanto, a observação de objetos complexos, como árvores, montanhas e até mesmo os batimentos do coração, revelou limitações dessa visão clássica, pois tais estruturas exibem irregularidades e níveis de complexidade que escapam à precisão euclidiana. Consoante a Schiavetti e Kovacevic (2020), essas limitações destacam a necessidade de outras geometrias para descrever adequadamente tais estruturas.

Nesse contexto, a Geometria Fractal emergiu como uma linguagem revolucionária, oferecendo princípios como a auto-similaridade e a repetição infinita em escalas progressivas para representar padrões antes considerados indescritíveis. Seu potencial teórico é inegável: fractais não somente descrevem a irregularidade de formas naturais, mas também revelam uma ordem subjacente em sistemas aparentemente caóticos. Como destacou Mandelbrot (1982), pioneiro da teoria fractal:

> Por que a geometria é muitas vezes descrita como fria e árida? Uma razão está em sua incapacidade de descrever a forma de uma nuvem, uma montanha, uma árvore ou um litoral. As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones… A natureza exibe não somente um grau mais alto, mas um nível diferente de complexidade. (p. 1)

Essa perspectiva reforça como os fractais transcendem a abstração matemática para dialogar com a irregularidade orgânica e processos dinâmicos do mundo natural, revelando padrões de crescimento e distribuição do ambiente. Além disso, a análise fractal de linhas costeiras e montanhas pode fornecer percepções sobre os processos geológicos e erosivos que as formam (Mandelbrot, 1982). Em síntese, os fractais se configuram como uma ferramenta indispensável para desvendar as complexas dinâmicas que regem os sistemas naturais.

Paralelamente aos avanços nas tecnologias digitais, em destaque a impressão 3D, observa-se uma crescente capacidade de materializar modelos matemáticos abstratos, convertendo estruturas teóricas em objetos físicos tangíveis. Neste contexto, o presente estudo propõe uma metodologia inovadora que integra algoritmos de extrusão paramétrica, inspirados em princípios de modelagem generativa (Gibson et al., 2010), e técnicas avançadas de fatiamento computacional para a construção de fractais tridimensionais, tomando a curva de Koch como estudo de caso. Essa abordagem visa contornar desafios técnicos associados à precisão dimensional e à estabilidade estrutural na fabricação digital (Painter & Smith, 2016), e abrir novas perspectivas para a educação inclusiva, ao democratizar o acesso à visualização tátil de conceitos matemáticos complexos (Papert, 1980; Vossoughi & Vakil, 2018).

A materialização física de fractais apresenta desafios técnicos significativos, especialmente no que se refere à representação de infinitas iterações em estruturas finitas e à preservação de detalhes em múltiplas escalas. Consoante a Santos (2018), como representar por meio de coisas finitas algo que é infinito? Por que pensar no infinito se as dificuldades em o representar são tão grandes, além da impossibilidade de medi-lo? Essa reflexão sublinha a complexidade inerente à tentativa de capturar a natureza infinita dos fractais em formas físicas finitas, ressaltando as dificuldades técnicas e conceituais envolvidas nesse processo.

Nesse contexto, a impressão 3D surge como uma solução promissora, permitindo a conversão de abstrações matemáticas em modelos concretos. Este estudo propõe um método para a fabricação tridimensional da curva de Koch, integrando algoritmos de extrusão paramétrica, otimização topológica e estratégias de fatiamento adaptativo. Além disso, discute o potencial educativo desses modelos, destacando como representações táteis podem ampliar o acesso a conceitos complexos, promovendo uma aprendizagem mais inclusiva e acessível.

O corpo principal deste artigo se inicia com a fundamentação teórica sobre fractais, abordando sua definição, propriedades e aplicações no ensino de conceitos matemáticos e computacionais. Em seguida, discute-se o papel da impressão 3D como ferramenta para a materialização desses objetos geométricos, destacando sua relevância para a educação e a acessibilidade. Posteriormente, são detalhados os métodos empregados na modelagem e fabricação tridimensional da curva de Koch. Na sequência, apresentam-se os resultados obtidos e as análises decorrentes da confecção dos artefatos pedagógicos. Por fim, são expostas as considerações finais, enfatizando as contribuições do estudo e perspectivas para pesquisas futuras.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A Geometria Fractal e a impressão 3D são campos que, quando combinados, oferecem novas perspectivas para a representação e materialização de padrões complexos. Essa geometria, caracterizada pela auto-similaridade, complexidade infinita e dimensões fracionárias, é fundamental para a compreensão de fenômenos naturais complexos desde as primeiras análises realizadas por Mandelbrot (1967, 1982). Por outro lado, a impressão 3D, com suas técnicas avançadas de extrusão paramétrica, permite a transição de modelos virtuais bidimensionais para estruturas tridimensionais com alta precisão. Esta seção explora a interseção desses dois campos, destacando como a impressão 3D pode ser utilizada para representar a Geometria Fractal, criando estruturas que mantêm a invariância de escala e a complexidade detalhada dos fractais.

Ao longo da história da humanidade, o avanço da Geometria foi fundamental para o desenvolvimento societal, oferecendo conhecimentos tecnológicos e científicos que atendem às necessidades diárias dos indivíduos. Isso inclui a divisão de terras, a construção de edificações, a observação dos movimentos astrais, entre outras atividades que dependeram de seu desenvolvimento (Dias, 2021). Nesse sentido, a Geometria sempre permeou as atividades e incumbências cotidianas desempenhadas pelos seres humanos na evolução das sociedades.

Desde épocas ancestrais, civilizações como os egípcios e os hindus já percebiam padrões fractais, influenciados pela repetição dessas formas em elementos naturais (Mossulin & Medeiros, 2023). A Geometria Fractal surgiu com a necessidade de interpretar e caracterizar estruturas intricadas e padrões observáveis no universo. Ao contrário da Geometria Euclidiana clássica, que se baseia em formas primárias e

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.09, e026007. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

simétricas, a Geometria Fractal estuda configurações assimétricas, descontínuas e ricas em minúcias, capturando a complexidade de fenômenos orgânicos e celestes.

Devido à sua complexidade intrínseca, a natureza excede os limites explicativos da Geometria Euclidiana, o que levou à formulação de uma abordagem teórica inédita para sua análise. Nesse contexto, a Geometria Fractal emerge em consonância com os avanços da Geometria do Caos, destacando-se das outras geometrias não-euclidianas por sua capacidade ímpar de representar com precisão e detalhadas das características naturais. Em perspectiva fractal, é necessário enfatizar a coexistem a ordem, típica dos sistemas determinísticos, e a imprevisibilidade característica do Caos, de forma que uma estrutura fragmentada dos fractais organiza o Caos e revela padrões em sistemas aparentemente aleatórios (Barbosa, 2005, p.10).

A Teoria do Caos, consolidada por Lorenz (1963) em seu estudo Deterministic Nonperiodic Flow1 , demonstra que sistemas dinâmicos não lineares possuem uma sensibilidade extrema às condições iniciais, o “efeito borboleta”, onde pequenas perturbações podem levar a consequências amplamente divergentes. Em outras palavras, variações mínimas nas condições iniciais podem desencadear mudanças de grande escala, tornando o comportamento de longo prazo desses sistemas fundamentalmente imprevisíveis. Essa característica é evidente em fenômenos naturais como padrões climáticos, turbulências atmosféricas e oscilações em ecossistemas.

A interconexão entre fractais e a Teoria do Caos se manifesta em diversas aplicações práticas. Enquanto os fractais modelam a geometria da irregularidade (Mandelbrot, 1982), a Teoria do Caos descreve a dinâmica de sistemas instáveis, como o clima e os mercados financeiros (Gleick, 1987; Lorenz, 1963). Estudos subsequentes reforçam essa relação: Barnsley e Sloan (1988) exploraram a compressão fractal de imagens, enquanto Peitgen e Saupe (1988), em The Science of Fractal Images 2, demonstraram como a dualidade entre simplicidade algorítmica e

[1] Tradução: Fluxo Determinístico Não Periódico
[2] Tradução: A Ciência das Imagens Fractais

complexidade emergente impulsiona avanços interdisciplinares, da física à computação gráfica.

Dessa forma, a integração desses campos amplia a compreensão da natureza e ilustra um paradoxo essencial da ciência moderna: a busca por padrões ordenados no aparente caos. Essa sinergia entre os fractais e a Teoria do Caos demonstra que, mesmo em sistemas regidos por leis determinísticas altamente sensíveis, existe uma geometria subjacente capaz de organizar o caos e oferecer uma visão mais profunda da complexidade inerente à natureza.

Os fractais são formas geométricas que possuem a capacidade de repetir seu padrão indefinidamente, criando figuras complexas, em que cada parte da sua estrutura reflete o padrão do todo em diferentes escalas, ou seja, exibem auto-similaridade (Mandelbrot, 1982). Essa propriedade aplica-se aos fractais encontrados na natureza, onde há uma forma de auto-similaridade estatística. Isso significa que as réplicas observadas não são exatamente idênticas ao todo, mas mantêm uma semelhança aproximada. Essa característica é primordial à compreensão de sistemas caóticos, ao permitir identificar padrões regulares em fenômenos que, à primeira vista, aparentam ser aleatórios.

A introdução formal do conceito de fractal ocorreu em 1982, quando o matemático francês Benoît Mandelbrot apresentou sua definição na obra The Fractal Geometry of Nature3. Conforme Mandelbrot (1982, p. 168, tradução nossa), "um fractal é, por definição, um conjunto cuja dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente sua dimensão topológica"4. Essa definição evidencia três propriedades fundamentais dessas estruturas matemáticas: a auto-similaridade em diferentes escalas, a complexidade infinita ou iteração e a dimensão fractal.

No entanto, até o momento, não há uma definição matemática universalmente aceita para fractais. Ao longo dos anos, diversos matemáticos buscaram estabelecer

[3] Tradução: A Geometria Fractal da Natureza
[4] Original: "A fractal is, by definition, a set whose Hausdorff-Besicovitch dimension strictly exceeds its topological dimension."

um conceito preciso, mas todas as tentativas apresentam limitações e geram divergências entre estudiosos. O próprio Mandelbrot (1982), pioneiro nesse campo de pesquisa, reconheceu as imperfeições de sua definição inicial e permaneceu insatisfeito com a falta de um enquadramento formal definitivo.

Entre os inúmeros fractais já estudados, o Conjunto de Mandelbrot, representado na Figura 1, destaca-se como um dos mais emblemáticos e amplamente investigados. Sua construção baseia-se na iteração da função quadrática complexa $f_c(z) = z^2 + c$, resultando em uma estrutura de complexidade infinita. Esse comportamento iterativo revela níveis sucessivos de detalhes intricados, ilustrando de forma expressiva a definição proposta por Mandelbrot (1982) e evidenciando, a relação entre a dimensão de Hausdorff-Besicovitch e a estrutura topológica dos fractais (Reis, 2016). Mais do que uma simples abstração matemática, o Conjunto de Mandelbrot constitui um marco na Geometria Fractal, desafiando os limites da Geometria Euclidiana e abrindo novas perspectivas sobre padrões e estruturas presentes na natureza.

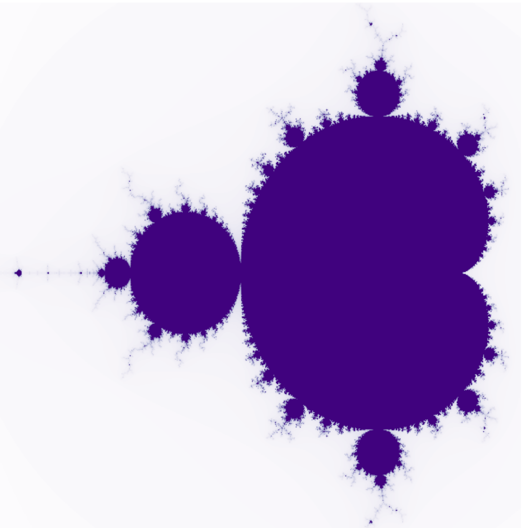

Figura 1. Conjunto de Mandelbrot produzido no software Matplotlib

Fonte: autoria própria (2025).

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.09, e026007. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

Em *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*,[5] Falconer (2003) discute as diversas tentativas de definição formal dos fractais e suas limitações. O autor ressalta que, embora os fractais compartilhem características fundamentais, como a auto-similaridade, não há uma definição única e universalmente aceita que abranja todas as suas manifestações. Muitas das definições formais propostas falham em capturar a intuição geométrica subjacente a esses objetos, tornando-se, em alguns casos, inadequadas para determinadas aplicações. Assim, a escolha de uma definição depende do contexto matemático nos quais os fractais estão inseridos.

Nesse sentido, Falconer (1990, como citado em Barbosa, 2005) propõe o entendimento de fractal por caracterizações:

> Um conjunto F é chamado fractal se, por exemplo:
>
> • F possui alguma forma de “auto-similaridade” ainda que aproximada ou estatística;
>
> • A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que sua dimensão topológica;
>
> • O conjunto F pode ser expresso por meio de um procedimento recursivo ou interativo. (p. 18)

As primeiras formas geométricas que apresentam padrões em sua construção incluem o Conjunto de Cantor[6] e o Triângulo de Sierpinski[7]. A Figura 2 ilustra essas estruturas, evidenciando sua natureza recursiva e a riqueza de detalhes que emerge a cada etapa do processo de construção.

---

[5] Tradução: Geometria Fractal: Fundamentos Matemáticos e Aplicações.

[6] O Conjunto de Cantor é um subconjunto do intervalo [0,1] definido pelo matemático Georg Cantor como limite de um processo iterativo (Cantor, 1884).

[7] O Triângulo de Sierpinski é um fractal auto-similar que pode ser construído a partir de um triângulo equilátero inicial. A construção envolve a remoção repetida do triângulo central de cada subdivisão, resultando em um padrão de triângulos menores que se repete infinitamente (Sierpiński, 1915).

Figura 2. Os primeiros fractais desenvolvidos

Fonte: autoria própria (2025).

A análise dessas estruturas geométricas permite compreender as propriedades fundamentais que caracterizam os fractais. A partir das formas apresentadas nas Figuras 1 e 2, observa-se que esses objetos compartilham três aspectos essenciais: auto-similaridade, complexidade infinita por meio da iteração e dimensão fracionária. Esses conceitos descrevem a organização interna dos fractais e são essenciais para sua construção matemática. A seguir, cada uma dessas propriedades serão discutidas em detalhe, evidenciando sua relevância na formulação e no estudo dessas estruturas.

A auto-similaridade é a característica mais fundamental dos fractais, sendo um aspecto definidor dessas estruturas matemáticas. Esse conceito refere-se à propriedade em que cada porção da figura, quando ampliada ou reduzida, mantém uma relação de semelhança com o todo (Carvalho, 2005). Em casos de auto-similaridade exata, as partes replicadas são idênticas à estrutura original, como exemplificado pelo Conjunto de Cantor e pelo Triângulo de Sierpinski. Em contrapartida, a auto-similaridade estatística, frequentemente observada em fenômenos naturais, reflete uma repetição aproximada dos padrões, mantendo uma semelhança global sem gerar cópias idênticas. Essa característica peculiar fundamenta a Teoria do Caos, que investiga sistemas dinâmicos sensíveis a pequenas variações iniciais (Peitgen et al., 2004).

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.09, e026007. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

A complexidade infinita, frequentemente associada à iteração, refere-se à aplicação recursiva de uma operação geométrica que se repete indefinidamente. Em cada fractal, essa repetição infinita gera uma estrutura rica em detalhes, estendendo-se a escalas cada vez menores. A técnica central para a construção de fractais é justamente essa iteração contínua, que impede a representação completa de suas estruturas devido à infinitude dos detalhes (Capra, 1996). Além disso, esse processo iterativo reforça a ideia de que fenômenos naturais complexos podem ser modelados por procedimentos simples repetidos, revelando a profunda conexão entre simplicidade operacional e complexidade emergente na geometria fractal.

E por fim, não menos importante, a dimensão fractal, diferentemente da dimensão topológica clássica, é um valor não inteiro que quantifica a complexidade geométrica de objetos irregulares. Conforme Barbosa (2005), trata-se de um parâmetro associado a propriedades como aspereza, heterogeneidade e densidade, refletindo a interação entre o objeto e seu entorno. Essa métrica transcende a noção Euclidiana de dimensão, permitindo descrever estruturas cujos detalhes se multiplicam em diferentes escalas, como folhas de árvores, redes de rios ou até padrões pulmonares.

Em contraste, a dimensão topológica, definida por Falconer (2003) e corroborada por Serra e Karas (1997), mantém-se como um número inteiro que classifica objetos em categorias discretas, isto é, classes distintas e mutuamente exclusivas, em que cada objeto é atribuído a um rótulo inteiro sem possibilidade de valores intermediários. Enquanto essa abordagem descreve a "simplicidade" de formas ideais (e.g., um cubo tem dimensão topológica 3), a dimensão de Hausdorff-Besicovitch, base matemática da dimensão fractal, revela a riqueza escalar de formas naturais ou auto-similares. Por exemplo, o floco de neve de Koch, com dimensão topológica 1, possui dimensão fractal $\approx 1{,}26$, indicando sua capacidade de preencher espaço de maneira intermediária entre uma linha e uma superfície.

Essa dualidade dimensional não é mera curiosidade matemática: ela explica por que fractais modelam fenômenos caóticos (e.g., turbulência, crescimento celular) com precisão inatingível pela geometria clássica. A discrepância entre as duas dimensões,

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.09, e026007. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

uma inteira, outra fracionária, opera como um termômetro de complexidade: quanto maior a diferença, mais intrincada é a estrutura do fractal. Esse princípio tem aplicações práticas, desde a análise de porosidade em materiais até a compressão de imagens digitais, consolidando os fractais como uma linguagem universal para decifrar a irregularidade da natureza.

Para compreender a noção de dimensão em profundidade, é primordial assimilar o conceito de espaço, formalizado matematicamente por equações que descrevem suas propriedades intrínsecas, que é definido pela equação:

$Dimensão\ (Espaço) = Dimensão\ (Figura) + 1.$	(1)

Na topologia, a dimensão de um objeto é definida por sua estrutura básica: o ponto, indivisível e sem extensão, representa o elemento fundamental de dimensão 0. Já a reta, gerada pela justaposição contínua de uma infinitude de pontos alinhados, ascende à dimensão 1, caracterizando-se como um objeto unidimensional. Essa progressão ilustra como a dimensionalidade está intrinsecamente ligada à liberdade de movimento e à complexidade da forma, enquanto o ponto é estático e adimensional, a reta incorpora a noção de direção e extensão linear (Adams & Franzosa, 2007). Considerando o ponto como um exemplo de figura geométrica de dimensão 0. A reta, composta por um conjunto de pontos, é de dimensão 1, portanto,

$Dimensão\ (Espaço) = Dimensão\ (Figura) + 1 = 0 + 1 = 1.$	(2)

A Equação 1 encapsula um axioma central da topologia geométrica: a representação completa de um objeto de dimensão n exige um espaço de imersão com dimensão $n + 1$. Esse princípio estabelece uma relação fundamental entre a dimensionalidade intrínseca de uma forma e a complexidade do espaço que a circunda. A Figura 3 ilustra:

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.09, e026007. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

1. Objetos unidimensionais, como retas ou curvas, embora definíveis por uma única coordenada no espaço R^1, requerem um plano bidimensional (R^2) para sua representação inequívoca. Essa necessidade evita ambiguidades topológicas, como interseções espúrias em projeções reduzidas (Stewart, 2023).
2. Superfícies bidimensionais, como discos ou folhas planas, demandam um espaço tridimensional (R^3) para preservar propriedades essenciais, incluindo orientabilidade e ausência de auto-interseções.

A relevância prática desse princípio vai além da abstração matemática. Por exemplo, a fita de Möbius, uma superfície bidimensional não orientável, só manifesta sua torsão característica quando imersa em R^3 (Novaes & Passeggi, 2020). Essa peculiaridade revela como a Equação 1 codifica restrições topológicas que regem a interação entre forma e espaço, transcendendo a mera contagem de coordenadas.

Na esfera aplicada, esse entendimento é crítico para áreas como a modelagem 3D computacional, onde a imersão adequada de objetos em espaços de dimensão superior previne artefatos geométricos em simulações digitais. Como destaca Stewart (2023), a relação $n \rightarrow n+1$ é além de uma curiosidade teórica, um pilar para tecnologias que vão desde a renderização gráfica até a análise de materiais porosos.

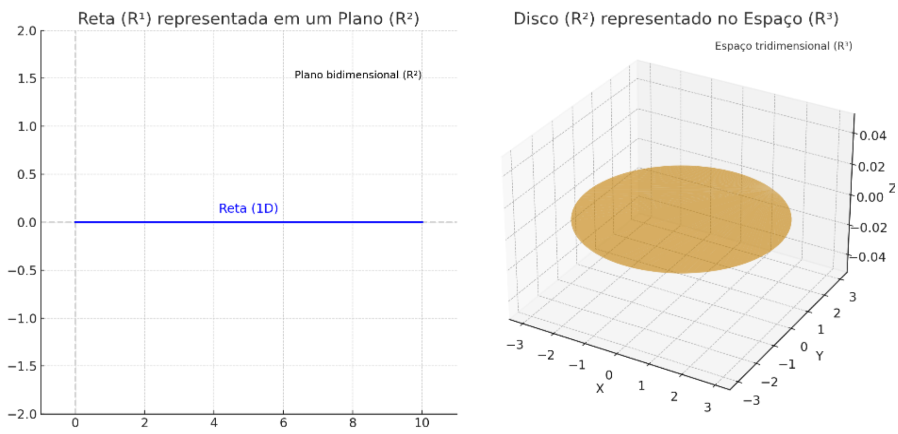

Figura 3. Representação de uma reta em um plano e de um disco em um espaço

Fonte: autoria própria (2025).

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.09, e026007. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

A dimensão fractal quantifica a densidade espacial de um objeto, correlacionando-se diretamente com suas propriedades geométricas: irregularidade, padrões hierárquicos e comportamento escalar. Essa métrica é aplicável não apenas a formas abstratas, mas também a sistemas naturais (como redes fluviais), biológicos (vascularização celular) e até sociodinâmicos (redes de interação humana).

O matemático Felix Hausdorff (1868 – 1942) revolucionou esse campo ao propor uma generalização da dimensão geométrica, estendendo-a para estruturas não auto-similares e multifractais. Seu legado persiste na nomenclatura técnica, onde a "dimensão Hausdorff" é frequentemente usada como sinônimo de dimensão fractal em contextos matemáticos rigorosos (Backes & Bruno, 2005).

A Figura 4 exemplifica a ruptura paradigmática entre a Geometria Euclidiana e a Fractal. Enquanto a Euclidiana[8] com dimensões inteiras, a Fractal introduz valores fracionários que codificam graus de fragmentação. Por exemplo, uma costa marítima, com suas reentrâncias recursivas, pode ter dimensão fractal entre $1{,}1$ e $1{,}5$, indicando sua complexidade. Quanto maior a dimensão, mais detalhada é a costa. Isso indica que sua complexidade excede a de uma curva suave (dimensão 1), mas não atinge a completude de uma superfície (dimensão 2) (Mandelbrot, 1967). Essa não integralidade desafia a intuição Euclidiana, revelando-se um recurso possível para descrever sistemas caóticos.

[8] A Geometria Euclidiana é um sistema matemático que se baseia em um conjunto de axiomas e postulados apresentados em sua obra "Os Elementos". Este sistema forma a base da geometria clássica, onde as propriedades e relações dos pontos, linhas, ângulos e figuras planas são estudadas em um espaço bidimensional (Silva, 2014).

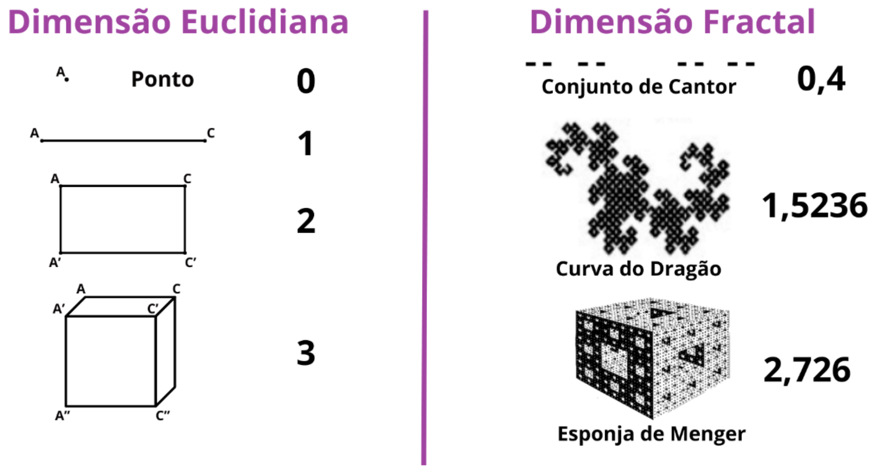

Figura 4. Comparação entre a dimensão Euclidiana e a dimensão Hausdorff

Fonte: autoria própria (2025).

A dimensão fractal de objetos geométricos é calculada utilizando a Equação 3:

$$D = -\log(n)/\log(L) \tag{3}$$

cujo n é o número de segmentos que substituíram o segmento original, e L é o tamanho do segmento substituído.

Portanto, ao superar as restrições da Geometria Euclidiana, a Geometria Fractal emerge como um recurso indispensável para descrever a complexidade morfológica de fenômenos naturais. Seu desenvolvimento histórico, desde as primeiras intuições em padrões arquitetônicos antigos como as pirâmides egípcias ou os yantras hindus até a formalização matemática por Mandelbrot (1982) no século XX, revela uma verdade fundamental: mesmo em sistemas aparentemente caóticos, como turbulências atmosféricas ou redes neuronais, residem estruturas recursivas que harmonizam aleatoriedade e ordem.

A partir dessas definições, foi escolhida a Curva de Koch, ilustrada na Figura 5, para o desenvolvimento em 3D devido à sua complexidade e relevância no estudo de

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.09, e026007. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

fractais. A Curva de Koch oferece uma excelente oportunidade para explorar conceitos matemáticos avançados de forma tátil, facilitando a compreensão por parte de estudantes com deficiência visual.

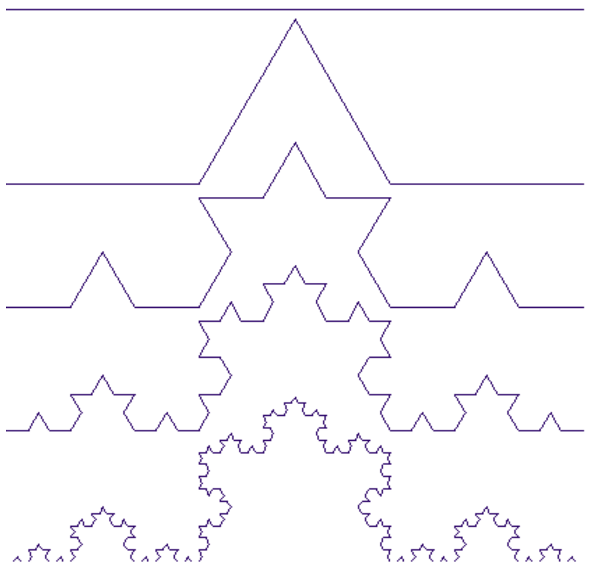

Figura 5. Diferentes níveis da Curva de Koch

Fonte: autoria própria (2025).

METODOLOGIA

A pesquisa, caracteriza-se como aplicada, de abordagem mista, pois integra procedimentos quantitativos e qualitativos para investigar como modelos fractais podem ser transpostos ao espaço tátil de forma pedagógica e inclusiva. O estudo organizou-se em quatro etapas interconectadas, articulando fundamentos teóricos da geometria fractal com técnicas avançadas de manufatura digital, conforme detalhado a seguir.

A primeira etapa consistiu na modelagem matemática da curva de Koch a partir de sua definição recursiva (Peitgen et al., 2004). Nesta etapa, foram fixados os parâmetros críticos, número de iterações ($n = 4$) e a razão de similaridade (1/3). É

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.09, e026007. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

importante destacar que para assegurar a manutenção da auto-similaridade em diferentes escalas, adotou-se a dimensão fractal de Hausdorff-Besicovitch ($\mathrm{D} = -\log(4)/\log(1/3) = D \approx 1{,}2618$), (Mandelbrot, 1982). Esse embasamento teórico permitiu traduzir numa fórmula operável, a relação entre iteração e complexidade geométrica, fornecendo a base necessária para as etapas posteriores de geração e impressão.

A segunda etapa, a fase computacional, consistiu no desenvolvimento de um algoritmo recursivo utilizando a linguagem de programação Python, em ambiente *Visual Studio Code*, apoiado por técnicas de inteligência artificial para automatizar a construção de padrões fractais tridimensionais. O código completo encontra-se compartilhado em um repositório *on-line*[9]. A partir dele, foram gerados diferentes modelos com 3, 4 e 5 iterações, com o objetivo de explorar níveis crescentes de detalhamento. Cada modelo foi exportado no formato *Standard Tessellation Language* (STL), assegurando sua compatibilidade com impressoras 3D. A exportação dos modelos em formato STL contempla um processo de otimização dos polígonos, conforme as diretrizes da fabricação aditiva (Gibson et al., 2010). Esse fluxo assegurou a produção de arquivos leves e geometricamente precisos, facilitando o manuseio e a posterior impressão.

A terceira etapa, de pós-processamento digital, foi conduzida no *software Blender*[10] para garantir a viabilidade técnica da impressão 3D e a adequação ergonômica ao público-alvo. Essas intervenções, consistentes em suavização da malha e otimização dos polígonos, resultaram em uma textura tátil aprimorada, com relevos mínimos de 0,2 mm, limiar necessário para a discriminação háptica eficaz, conforme estabelecido por Lederman e Klatzky (2009). O processo mitigou riscos de falhas na impressão, como deformações térmicas ou colapso estrutural e ampliou a acessibilidade do objeto, permitindo que usuários identificassem padrões fractais por meio do tato. A Figura 6, apresenta o modelo que foi impresso.

[9] Disponível em: https://l1nk.dev/slMWl . Sena, A.L.R.S. de. (2025). Acesso em: 2025, 19 abr.

[10] Blender é um software de código aberto para criação de gráficos 3D, utilizado para modelagem, animação, renderização, texturização e muito mais. Ele é amplamente utilizado para modelos de impressão 3D, gráficos em movimento, aplicações interativas em 3D e realidade virtual.

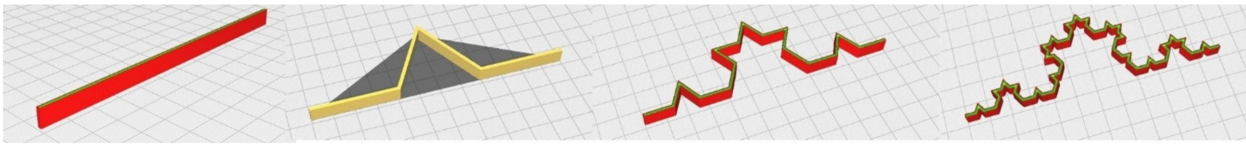

Figura 6. Processo de modelagem no *software Blender* dos fractais táteis

Fonte: autoria própria (2025).

Por fim, na quarta etapa, os artefatos preparados foram importados para o *software Ultimaker Cura*, onde se definiu o *G- code* responsável pelo controle das impressoras 3D (Lipson & Kurman, 2013). Nesta etapa, ajustaram-se parâmetros como espessura de camada, densidade de preenchimento e velocidade de extrusão, de modo a equilibrar textura, resistência mecânica e fidelidade geométrica. O resultado foi um conjunto de modelos táteis manipuláveis e precisos, que servem como recurso pedagógico para explorar conceitos de auto-similaridade, dimensão fractal e iteração em sala de aula. Na Figura 7, observa-se os fractais impressos em 3D, evidenciando a fidelidade geométrica alcançada.

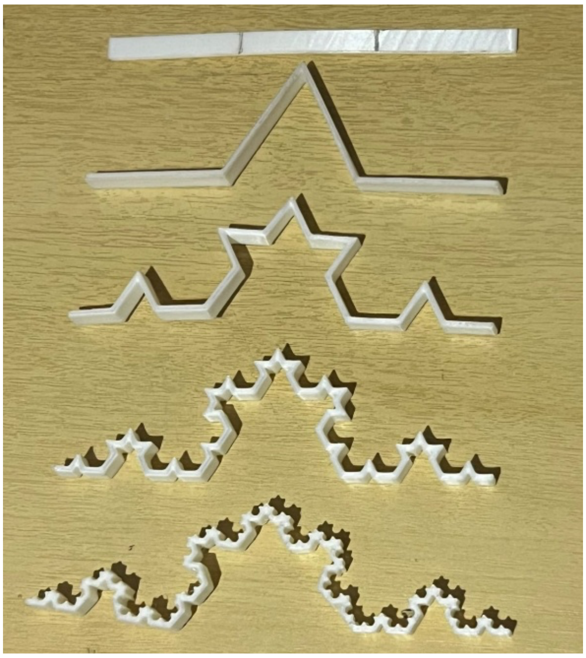

Figura 7. Representações táteis de fractais produzidas por impressão 3D

Fonte: autoria própria (2025).

A sequência didática divide-se em cinco encontros, cada um articulando experiência sensorial, construção conceitual e reflexão crítica sobre fractais táteis. Essa estrutura modular permite que quem for implementar ajuste a duração e a divisão conforme as necessidades específicas da turma, inclusive em contextos com estudantes com deficiência visual. Em cada encontro aborda-se de modo articulado a experiência sensorial, a construção conceitual e a reflexão crítica sobre aplicações dos conceitos fractais.

1º encontro: Sensibilização háptica – Com os olhos vendados, os alunos exploram, por toque, os modelos táteis da curva de Koch (n=0 ao n=4). Perguntas como "O que aconteceria se continuássemos esse processo infinitamente?" introduzem intuitivamente a noção de iteração, enquanto a comparação entre as etapas revela a auto-similaridade, a ideia de que partes menores reproduzem a estrutura do todo.

2º encontro: Registro quantitativo – Em duplas, registram em planilhas adaptadas (braille), quando necessário, o número de segmentos de cada estágio da curva (ex: $n = 0$ tem 1 segmento; $n = 1$ tem 4). Em seguida, traçam no quadro o gráfico: iterações × quantidade de relevos. A curva exponencial resultante motiva uma discussão sobre crescimento rápido: "Por que a forma parece 'explodir' em complexidade?". Essa atividade vincula a experiência concreta à matemática, preparando os estudantes para entenderem a dimensão fractal.

3º encontro: Fundamentação teórica – Com os dados coletados, os alunos calculam a dimensão fractal. O docente explica que, enquanto uma linha reta tem dimensão 1, a curva de Koch ocupa um "espaço intermediário" entre 1D e 2D, desafiando noções tradicionais.

4º encontro: Oficina artesanal – Utilizando papel-cartão, cola e palitos ou barbante, desenham manualmente uma base geométrica e aplicam quatro iterações da curva de Koch em relevo, reforçando a lógica recursiva e exercitando habilidades motoras.

5º encontro: Socialização e avaliação – Nesta etapa final, os estudantes assumem o papel de protagonistas, apresentando os fractais confeccionados durante a oficina. Cada aluno descreve oralmente o processo de construção, destacando desafios. E preenchem a ficha de autoavaliação sobre compreensão de auto-similaridade, complexidade infinita e dimensão fractal. O encerramento propõe um debate crítico: Fractais são considerados 'imperfeitos', mas são essenciais para descrever a complexidade da natureza. Isso muda sua percepção de beleza e ordem? A mediação conecta respostas a casos reais, como a imprevisibilidade de linhas costeiras ou a arquitetura de cidades são recursos para repensar a relação entre caos, harmonia e inclusão.

Em fechamento, ressalta-se que essa proposta, concebida como projeto-piloto, visa articular experiência sensorial, coleta de dados, fundamentação matemática e criação prática no desenvolvimento do conhecimento. Ao promover a abstração a partir do tato e a reflexão colaborativa, a sequência oferece um recurso inclusivo e multiplicável, capaz de aproximar conceitos complexos de Geometria Fractal ao cotidiano da sala de aula. Os fractais, como metáforas da irregularidade e infinitude da natureza, tornam-se aliados na construção de uma educação matemática inclusiva, onde compreender o mundo não depende apenas de enxergar, mas de sentir, criar e refletir coletivamente.

Resultados e Discussões

Transformar conceitos matemáticos em objetos palpáveis é um exercício que transcende a mera técnica, revelando a capacidade humana de dialogar com o invisível por meio da matéria. Os protótipos fractais impressos passaram por rigorosa inspeção visual e testes de resistência mecânica, não apenas para validar sua fidelidade geométrica à curva de Koch, mas para confirmar sua função como mediadores entre o abstrato e o sensível. O formato final apresentou um equilíbrio adequado entre rigidez e leveza, permitindo sua manipulação sem risco de

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.09, e026007. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

deformação. A textura resultante da impressão 3D reforçou as características auto-similares do fractal, proporcionando uma experiência tátil enriquecedora.

A fabricação dos fractais táteis demonstrou um alto potencial na transformação da matemática abstrata em algo tangível. A conversão de conceitos geométricos em modelos físicos possibilita uma nova abordagem para o ensino e compreensão de propriedades fractais, como auto-similaridade e dimensionalidade fracionária (Ullah et al., 2021). A experiência tátil proporcionada pelos modelos impressos oferece uma alternativa à visualização tradicional, permitindo que conceitos antes restritos ao campo teórico sejam explorados de maneira sensorial.

Conclui-se que a metodologia proposta supera limitações práticas da fabricação de fractais tridimensionais e inaugura novas fronteiras para a acessibilidade do ensino da matemática avançada. A impressão 3D revelou-se um recurso na democratização do conhecimento, permitindo que conceitos complexos sejam explorados de maneira tangível e acessível. O sucesso da proposta destaca o potencial dessa abordagem para futuras aplicações em contextos acadêmicos, artísticos e educacionais, ampliando os horizontes cognitivos e promovendo novas possibilidades para o ensino da matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde a aurora da civilização, a humanidade busca decifrar os padrões da natureza, que oscilam entre a ordem e o caos, inspirando tanto a arte quanto a ciência. Nessa jornada, os fractais emergem como "a geometria do mundo natural" (Mandelbrot, 1982, p. 1), traduzindo matematicamente a auto-similaridade e a infinitude que permeiam desde florestas até redes neuronais. Este artigo, ao propor uma metodologia para materializar a curva de Koch via impressão 3D e uma sequência didática para facilitar a compreensão de fractais, não apenas avança

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.09, e026007. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

tecnicamente na fabricação digital, mas resgata uma verdade ancestral: "a matemática não é apenas sobre números, mas sobre padrões" (Devlin, 1998, p. 3).

A materialização da curva de Koch via impressão 3D, proposta neste artigo, demonstra como a Geometria Fractal pode ser transposta do plano teórico para aplicações técnicas e pedagógicas concretas. Ao enfrentar os desafios práticos de representar estruturas auto-similares em três dimensões, o trabalho avançou metodologicamente na integração de modelagem paramétrica (Gibson et al., 2010) e otimização topológica, garantindo que a invariância de escala, essência dos fractais (Falconer, 2003), fosse preservada em um objeto físico funcional. A extrusão paramétrica e o ajuste de parâmetros de impressão alinharam-se às diretrizes de Gibson et al. (2010) para manufatura aditiva de estruturas complexas, garantindo que "o infinito matemático se tornasse finitude palpável" (Peitgen & Saupe, 1988, p. 12). A otimização topológica, por sua vez, equilibrou leveza e rigidez, confirmando que "a beleza fractal reside na harmonia entre fragilidade e resiliência" (Briggs, 1992, p. 89).

No campo educacional, a estratégia de traduzir fractais em modelos táteis abre caminho para práticas pedagógicas inclusivas. A manipulação de fractais 3D pode auxiliar na compreensão de conceitos não euclidianos por estudantes com deficiência visual, alinhando-se às evidências de que o tato potencializa a aprendizagem de abstrações espaciais (Lederman & Klatzky, 2009). Futuros testes controlados, com métricas de desempenho cognitivo, poderão quantificar esse impacto, seguindo a premissa de Papert (1980) de que a matemática deve ser experienciada de forma concreta.

Tecnicamente, o projeto comprovou que a extrusão paramétrica permite replicar a recursividade fractal em escalas finitas, superando limitações físicas sem comprometer a resolução geométrica. A adaptação de algoritmos de subdivisão para CAD 3D, detalhada no método, oferece um protocolo multiplicável para a fabricação de outros fractais, como o conjunto de Cantor ou o triângulo de Sierpiński.

A interação entre arte e ciência, embora secundária no escopo deste estudo, emerge nos protótipos como exemplos de "objetos liminares" (Turkle, 2007), que

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.09, e026007. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

articulam rigor matemático e expressividade estética. Essa dualidade, contudo, não se restringe ao simbolismo: as esculturas fractais funcionam como recursos didáticos para discutir simetria, recursão e complexidade em aulas multidisciplinares.

Conclui-se que a metodologia desenvolvida pode resolver um problema prático da fabricação digital, como representar infinitudes matemáticas em objetos finitos, e amplia o acesso a conceitos fractais em contextos educacionais. Ao vincular modelagem algorítmica a protocolos de impressão 3D, o trabalho oferece um arcabouço técnico para aplicações que vão desde a engenharia de materiais leves até à criação de recursos pedagógicos acessíveis. Como próximo passo, propõe-se a validação empírica do modelo com grupos de estudantes com deficiência visual, medindo ganhos de aprendizagem e refinando parâmetros de usabilidade, consolidando assim a ponte entre teoria fractal e prática educativa.

Referências bibliográficas

Adams, C., & Franzosa, R. (2007). Introduction to topology: Pure and applied. Pearson Prentice Hall.

Backes, A. R., & Bruno, O. M. (2005). Técnicas de estimativa de dimensão fractal aplicadas em imagens digitais. ICMC-USP.

Barbosa, R. M. (2005). Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula. Autêntica Editora.

Barnsley, M. F., & Sloan, A. D. (1988). A better way to compress images. Byte Magazine, 13(1), 215-223.

Briggs, J. (1992). Fractals: The patterns of chaos. Simon & Schuster.

Cantor, G. (1884). De la puissance des ensembles parfait de points. Acta Mathematica, 4, 381-392.

Devlin, K. (1998). Life by the numbers. Wiley.

Dias, L. L. M. (2021). O uso das tecnologias no ensino de geometria: uma revisão bibliográfica (Trabalho de Conclusão de Curso, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Floriano).

Falconer, K. (2003). Fractal geometry: Mathematical foundations and applications. Wiley.

Gibson, I., Rosen, D. W., & Stucker, B. (2010). Additive Manufacturing Technologies: Rapid Prototyping to Direct Digital Manufacturing. Springer, New York, NY. DOI: 10.1007/978-1-4419-1120-9

Gleick, J. (1987). Caos: A criação de uma nova ciência. Campus.

Lederman, S. J., & Klatzky, R. L. (2009). Haptic perception: A tutorial. Attention, Perception, & Psychophysics, 71(7), 1439-1459.

Lipson, H., & Kurman, M. (2013). Fabricated: The new world of 3D printing. John Wiley & Sons.

Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. Journal of the Atmospheric Sciences, 20(2), 130-141.

Mandelbrot, B. B. (1967). How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. Science, 156(3775), 636-638.

Mandelbrot, B. B. (1982). The fractal geometry of nature. W. H. Freeman.

Mossulin, Â. V. L., & Medeiros, L. F. de. (2023). O ensino de geometria fractal na educação básica: uma revisão sistemática de literatura. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, 9(2), e2004.

Novaes, A. de O., & Passeggi, M. da C. F. B. S. (2020). Fita de Möbius e fractal: aproximações entre representações sociais e narrativas. R. Educ. Públ., 29, e10127.

Painter, J., & Smith, R. (2016). Precision challenges in 3D-printed fractal structures. Journal of Digital Fabrication, 12, 45-59.

Peitgen, H., & Saupe, D. (1988). The science of fractal images. Springer-Verlag.

Peitgen, H.-O., Jürgens, D., & Saupe, S. (2004). Chaos and fractals: New frontiers of science. Springer.

Reis, M. V. dos. (2016). Conjunto de Mandelbrot (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Goiás).

Santos, L. F. dos. (2018). Os diferentes infinitos na matemática (Trabalho de Conclusão de Curso, Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo).

Schiavetti, M., & Kovacevic, B. (2020). Geometria esférica: o elo entre matemática e astronomia (Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo).

Silva, M. D. L. (2014). Geometria Euclidiana: ensino e aplicações (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul).

Turkle, S. (2007). Evocative objects: Things we think with. MIT Press.

Ullah, A. M. M. S., D'Addona, D. M., Seto, Y., Yonehara, S., & Kubo, A. (2021). Utilizing fractals for modeling and 3D printing of porous structures. Fractal and Fractional, 5(2), 123-145.

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.09, e026007. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

Vossoughi, S., & Vakil, S. (2018). Towards liberatory education : Critical pedagogies in makerspaces. Equity & Excellence in Education, 51(1), 3-18.

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.09, e026007. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967