Tangram
Revista de Educação Matemática

DOI: 10.30612/tangram.v9i1.19521

Anel de guardanapo: da mesa de jantar para a aula de matemática

Napkin ring: from the dinner table to the mathematics class

Anillo para servilletas: de la mesa de comedor a la clase de matemáticas

Amanda Zanelato Colaço
Universidade do Estado de Santa Catarina - Udesc
Joinville, Santa Catarina, Brasil
amandazanelatocolaco@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7334-3643

Elisandra Bar de Figueiredo
Universidade do Estado de Santa Catarina - Udesc
Joinville, Santa Catarina, Brasil
Elisandra.figueiredo@udesc.br
https://orcid.org/0000-0003-2101-4009

Resumo: O anel de guardanapo é um utensílio usado para decorar mesas de jantar em eventos especiais. Matematicamente, é definido como o sólido resultante quando se subtrai de uma esfera um cilindro de altura maior ou igual ao diâmetro da esfera e raio menor do que o raio da própria esfera. Neste trabalho, apresentamos uma perspectiva matemática sobre esse anel e o cálculo do seu volume, que é considerado um paradoxo matemático por depender apenas de sua altura, não importando a esfera que o originou. Apresentamos o resultado por meio de duas abordagens: com o volume de sólidos geométricos usuais e utilizando integrais triplas do Cálculo Diferencial e Integral. Por fim, propomos uma atividade para a abordagem de volumes usando o anel de guardanapo mediada pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas com uso de material concreto e do software GeoGebra 3D. Essa proposta pode ser trabalhada no Ensino Médio ou no Ensino Superior. Temos como hipótese que fomentar a compreensão de volumes de um artefato cotidiano, na forma física ou virtual, pode ser uma forma de viabilizar a abstração, a autonomia estudantil e o senso crítico.

Palavras-chave: Resolução de problemas. GeoGebra. Material concreto.

Abstract: A napkin ring is a utensil for decorating dining tables at special events. Mathematically, it is defined as the solid resulting from the subtraction of a cylinder from a sphere, given that the height of the cylinder is equal or larger than the diameter of the sphere and its radius is smaller than that of the sphere itself. In this work, we present a mathematical perspective on this ring and the calculation of its volume, which is considered a mathematical paradox because it depends only on its height, regardless of the original sphere. We present the results using two approaches: through the volume of usual geometric solids and using triple integrals from Differential and Integral Calculus. Finally, we propose an activity for approaching volumes using the napkin ring mediated by the mathematics teaching-learning-evaluation methodology through problem-solving with the use of concrete material and the GeoGebra 3D software. This proposal can be used in High School or Higher Education. We hypothesize that fostering the understanding of volumes of an everyday artifact, in physical or virtual form, can be a way to enable abstraction, student autonomy, and critical thinking.

Keywords: Problem solving. GeoGebra. Concrete material.

Resumen: El anillo para servilletas es un utensilio utilizado para decorar las mesas en eventos especiales. Matemáticamente, se define como el sólido resultante cuando se sustrae de una esfera un cilindro de altura mayor o igual al diámetro de la esfera y radio menor que el radio de la propia esfera. En este trabajo, presentamos una perspectiva matemática sobre ese anillo y el cálculo de su volumen, que es considerado una paradoja matemática por depender únicamente de su altura, sin importar la esfera que lo originó. Presentamos el resultado por medio de dos enfoques: con el volumen de sólidos geométricos usuales y usando integrales triples del Cálculo Diferencial e Integral. Finalmente, proponemos una actividad para abordar

Tangram
Revista de Educação Matemática
Universidade Federal da Grande Dourados

el cálculo de volúmenes utilizando el anillo para servilletas, mediada por la metodología de enseñanza-aprendizaje-evaluación de matemáticas a través de la resolución de problemas con uso de material concreto y el software GeoGebra 3D. Esta propuesta puede ser trabajada tanto en el Bachillerato como en la Educación Superior. Tenemos como hipótesis que fomentar la comprensión de los volúmenes de un artefacto cotidiano, ya sea en su forma física o virtual, puede ser una forma de viabilizar la abstracción, la autonomía estudiantil y el sentido crítico.

Palabras clave: Resolución de problemas. GeoGebra. Material concreto.

Recebido em 30/07/2025
Aceito em 12/11/2025

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Todos já ouvimos e, talvez, até já repetimos a frase “a Matemática está em toda parte”. De fato, está. Basta saber olhar da forma adequada. No entanto, isso não é uma característica só da Matemática. Tudo o que nos cerca é composto por elementos das mais diversas áreas: Química, Física, Biologia, Português... Depende do que estamos procurando.

Neste texto, trazemos um olhar matemático para um utensílio de cozinha, o anel de guardanapo, com a intenção de mostrar que, com exemplos concretos, podemos trabalhar elementos da Geometria Espacial de forma a despertar o interesse dos alunos. Escolhemos o anel de guardanapo pelo resultado, de certa forma intrigante, sobre o seu volume. Ao longo do texto, explanaremos como defini-lo matematicamente e como ele é um elemento rico ao trabalharmos com Geometria Espacial.

Como opção para abordar o volume do anel de guardanapo em sala de aula da educação básica, este trabalho apresenta uma atividade mediada pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas (MEAAMaRP). Os recursos escolhidos para utilização na atividade foram o material concreto, produzido por impressão 3D, e aplicativos dinâmicos no software GeoGebra.

Este trabalho constitui um recorte de uma pesquisa de Iniciação Científica (IC) e do trabalho de conclusão de curso de graduação (TGR), ambos vinculados ao projeto de pesquisa “Objetos de Aprendizagem e Materiais Concretos: uma integração possível”, desenvolvido na Universidade do Estado de Santa Catarina (Udesc). A primeira autora atuou como bolsista de IC e é a autora do TGR, enquanto a segunda é a professora orientadora. Neste artigo, apresentamos a atividade do anel de guardanapo, que integra a etapa final (Proposição de novos problemas) da sequência didática estruturada para o ensino de volumes utilizando o princípio de Cavalieri desenvolvida na pesquisa (Colaço, 2023). Essa atividade não foi aplicada, mas as aplicações de versões anteriores da sequência motivaram-nos a buscar novos problemas que estivessem alinhados ao propósito da etapa final da sequência, mas que não fossem apenas uma repetição de estratégias e contextos (Colaço; Figueiredo & Azevedo, 2023a; Colaço; Figueiredo & Azevedo, 2023b).

O trabalho está organizado em quatro seções. Na primeira, é apresentada a definição do anel de guardanapo e os cálculos para obter seu volume de duas maneiras diferentes, com o objetivo de instigar seu uso tanto no ensino básico como no ensino superior. Na segunda, fala-se da importância do uso do material concreto e do GeoGebra 3D no ensino de matemática, mediados pela MEAAMaRP. Na terceira seção, é apresentada uma proposta de atividade sobre o volume do anel de guardanapo para aplicação em sala de aula da educação básica, ou formação inicial (ou continuada) de professores. Na quarta seção, têm-se as considerações finais.

O VOLUME DO ANEL DE GUARDANAPO

Desde à sua origem na antiguidade, a Geometria tem sido objeto de estudo para pesquisadores e filósofos, tendo como motivação principal as necessidades diárias vividas pelas civilizações, como as construções, movimentação de astros e a divisão de terras (Monteiro, 2015).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental (EF) vinculam a Geometria a um campo fértil de estudos em sala de aula, uma vez que os estudantes apresentam interesse no assunto de forma natural, facilitando o desenvolvimento de um pensamento matemático focado em “compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (Brasil, 1998, p. 51). Esse documento explica, ainda, que o trabalho com a Geometria contempla a aprendizagem de números e medidas, a compreensão de diferenças e semelhanças, e o aprimoramento das habilidades de percepção espacial. Nesse último caso, considera-se fundamental que “os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato” (Brasil, 1998, p. 51), como forma de incentivo à integração entre diferentes áreas de conhecimento. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) também enfatiza que o estudo da Geometria é crucial para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, capacitando-os a “resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (Brasil, 2018, p. 271).

A exemplo disso, o anel de guardanapo é um objeto que pode ser interpretado sob uma perspectiva matemática e é assim denominado devido à sua forma, que se aproxima àquela de um porta-guardanapo como utensílio de cozinha (McFerhat, 2018).

Do ponto de vista da geometria, o anel de guardanapo é um sólido que resta de uma esfera de raio R quando dela é retirado um cilindro de altura maior ou igual do que o diâmetro da esfera e de raio $r < R$, conforme ilustra a Figura 1. Aliás, segundo McFehat (2018), o volume do anel de guardanapo é, na verdade, um paradoxo, uma vez que conceitua que, dados quaisquer dois anéis de guardanapo, se suas alturas forem iguais, então possuem o mesmo volume, independentemente dos tamanhos das esferas que os originaram. É considerado um paradoxo, porque, mesmo que se tenha uma esfera do tamanho de uma bola de tênis e outra do tamanho de uma melancia, se forem cortados nelas anéis de guardanapo de mesma altura, garante-se que possuem o mesmo volume, o que vai contra a expectativa comum.

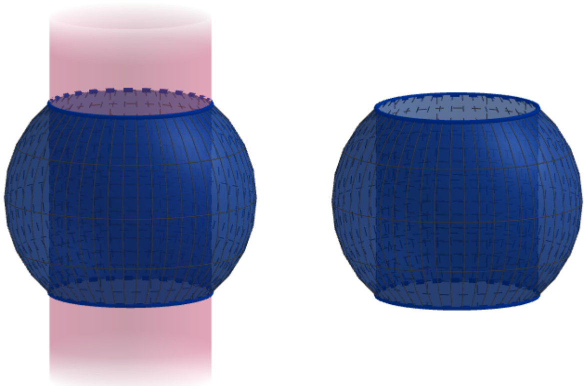


Figura 1. Anel de guardanapo
Fonte: Autoras (2023).

No presente trabalho, apresentaremos dois métodos para calcular o volume de um anel de guardanapo: por meio do volume de outros sólidos geométricos usuais e utilizando integrais triplas do Cálculo Diferencial e Integral. Além disso, com o intuito de utilizar ferramentas que a própria Matemática nos fornece para reduzir a extensão e a complexidade dos cálculos mantendo o rigor matemático, usaremos o princípio de

Cavalieri para o cálculo do volume de partes da esfera. Esse princípio conceitua que, se dados dois sólidos S_1 e S_2, ambos de mesma altura, tais que qualquer plano horizontal (α) paralelo ao plano que intercepta a base dos sólidos (β) secciona S_1 e S_2 formando figuras planas com áreas iguais, então os volumes dos sólidos são iguais (Machado, 2021). É, portanto, uma ferramenta útil, uma vez que possibilita a interpretação de volumes entre sólidos de diferentes formatos por meio da comparação das áreas de suas seções e alturas.

Observamos que o volume do anel de guardanapo é igual ao volume da esfera menos o volume do cilindro circular reto de raio r_1 e altura H definida pela interseção com a esfera, menos duas vezes o volume da calota esférica (formalmente chamada de segmento esférico de uma base), ou seja,

$$V_{anel\ de\ guardanapo} = V_{esfera} - V_{cilindro} - 2V_{calota},$$

conforme ilustrado na Figura 2.

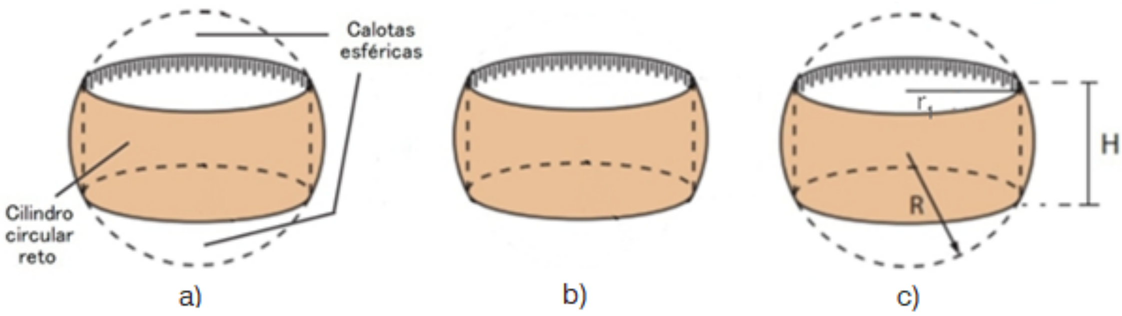


Figura 2. Volume do anel por meio das calotas esféricas e do cilindro circular reto
Fonte: Autoras (2024).

Considerando o anel de guardanapo da Figura 2c, sendo R o raio da esfera e r_1 o raio do cilindro, o volume da esfera e o volume do cilindro são dados por

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ e } V_{cilindro} = \pi {r_1}^2 H.$$

Como a calota é uma parte da esfera, para calcular o seu volume, pode-se usar a seção correspondente da anticlépsidra, que é o sólido obtido ao retirar-se de um cilindro reto dois cones com vértice em comum, como ilustrado na Figura 3 à esquerda. Isso porque, pelo princípio de Cavalieri, o volume da esfera de raio R

Tangram
Revista de Educação Matemática
Universidade Federal da Grande Dourados

é igual ao volume da anticlépsidra obtida de um cilindro de altura $2R$ e raio R. O leitor que tiver interesse nesse resultado pode consultar Dolce e Pompeo (2013, p. 243) ou Colaço (2023, p. 44).

Assim, considere a calota obtida da esfera de raio R e com círculo da base de raio r, como a da parte pontilhada na Figura 2c. Para calcular o volume dessa calota, usaremos a parte correspondente da anticlépsidra, como ilustrado na Figura 3. Ou seja, o volume da calota, de altura h e raio r, corresponde à diferença entre o volume do cilindro de altura h e raio R e o volume do tronco de cone que tem altura h, cuja base maior tem raio R, e de base menor com raio $r_2 = R - h$ (obtido por semelhança de triângulos, pois a seção meridiana do cone é um triângulo isósceles com base $2R$ e altura R).

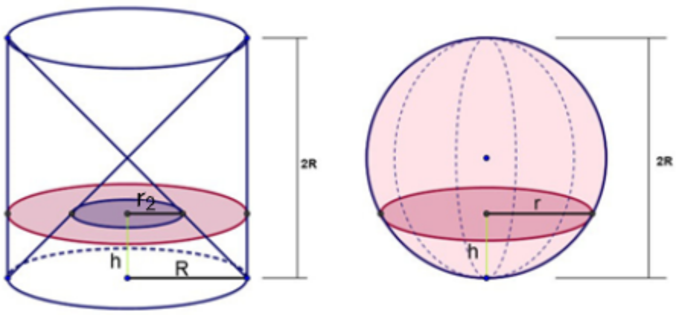


Figura 3. Calota da esfera e seção da anticlépsidra
Fonte: Adaptado de Benk et al. (2016).

Utilizando a fórmula do volume do cilindro e do tronco do cone, tem-se

$$
\begin{aligned}
V_{calota} &= \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}[R^2 + R(R-h) + (R-h)^2] \\
&= \frac{\pi h}{3}[3R^2 - R^2 - R^2 + Rh - (R^2 - 2Rh + h^2)] \\
&= \frac{\pi h}{3}(3Rh - h^2) \\
&= \frac{\pi h^2}{3}(3R - h).
\end{aligned}
$$

Daí, sabendo o volume do cilindro e da calota esférica, consegue-se determinar o volume do anel de guardanapo. Considerando o anel de guardanapo da Figura 2c, tem-se

$$
\begin{aligned}
V_{anel\ de\ guardanapo} &= V_{esfera} - V_{cilindro} - 2V_{calota} \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi {r_1}^2 H - 2 \cdot \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) \\
&= \pi\left(\frac{4R^3 - 3{r_1}^2 H - 6Rh^2 + 2h^3}{3}\right).
\end{aligned}
$$

E, ainda, da Figura 2, tem-se $h = R - \frac{H}{2}$ e ${r_1}^2 = R^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2$, logo obtém-se

$$
\begin{aligned}
V_{anel\ de\ guardanapo} &= \frac{\pi}{3} \cdot \left[4R^3 - 3\left(R^2 - \frac{H^2}{4}\right) \cdot H - 6R \cdot \left(R - \frac{H}{2}\right)^2 + 2\left(R - \frac{H}{2}\right)^3\right] \\
&= \frac{\pi}{3} \cdot \left[4R^3 - 3R^2 H + \frac{3H^3}{4} - 6R\left(R^2 - RH + \frac{H^2}{4}\right) + 2\left(R^3 - \frac{3R^2 H}{2} + \frac{3RH^2}{4} - \frac{H^3}{8}\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{3} \cdot \left[4R^3 - 3R^2 H + \frac{3H^3}{4} - 6R^3 + 6R^2 H - \frac{3RH^2}{2} + 2R^3 - 3R^2 H + \frac{3RH^2}{2} - \frac{H^3}{4}\right] \\
&= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{H^3}{2}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
V_{anel\ de\ guardanapo} = \frac{\pi H^3}{6}.
$$

É possível observar que o volume do anel de guardanapo não depende do raio da esfera e nem do raio do cilindro dela retirado, apenas da altura desse cilindro. Assim, anéis de guardanapo de mesma altura, mesmo que originados de esferas diferentes, terão o mesmo volume, o que é considerado um paradoxo por ser contraintuitivo, já que a nossa intuição diz que, quanto maior a esfera, maior deveria ser o volume do anel.

Aliás, esse fato também pode ser observado pelo princípio de Cavalieri, bastando mostrar que as áreas das seções de anéis de guardanapos que possuem a mesma altura são iguais.

Sejam A_1 e A_2 os anéis de guardanapo de altura H, obtidos de esferas com raios R e r, respectivamente, ilustrados na Figura 4. Sendo r_1 e r_2 os raios dos cilindros que foram tirados dessas esferas para originar os anéis A_1 e A_2, tem-se que

$$r_1^2 = R^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2 \quad \text{e} \quad r_2^2 = r^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2.$$

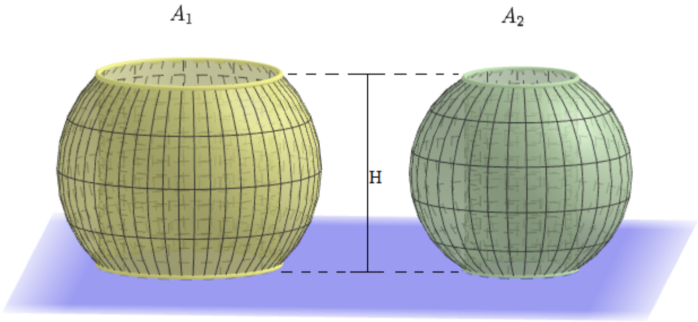


Figura 4. Anéis de guardanapo com mesma altura.
Fonte: Autoras (2023).

Considere um plano α, secante aos anéis A_1 e A_2 a uma altura h dos centros O_1 e O_2 das esferas que originaram os anéis, como na Figura 5, e sejam C_1 e C_2 as áreas das coroas circulares resultantes das seções nos anéis.

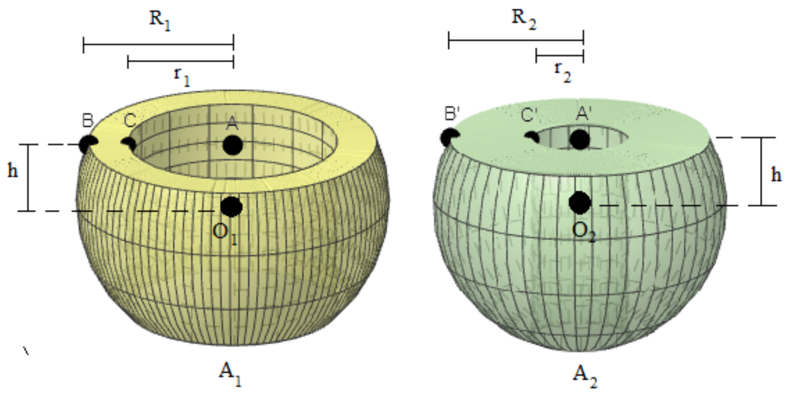


Figura 5. Seções de anéis de guardanapo de mesma altura.
Fonte: Autoras (2023).

Sendo R_1 e R_2 os raios das circunferências externas das coroas circulares das seções dos anéis A_1 e A_2, respectivamente, então as áreas C_1 e C_2 são dadas por

$$C_1 = \pi {R_1}^2 - \pi {r_1}^2 \quad \text{e} \quad C_2 = \pi {R_2}^2 - \pi {r_2}^2.$$

Na Figura 5, temos os triângulos retângulos ABO_1 e $A'B'O_2$, dos quais têm-se:

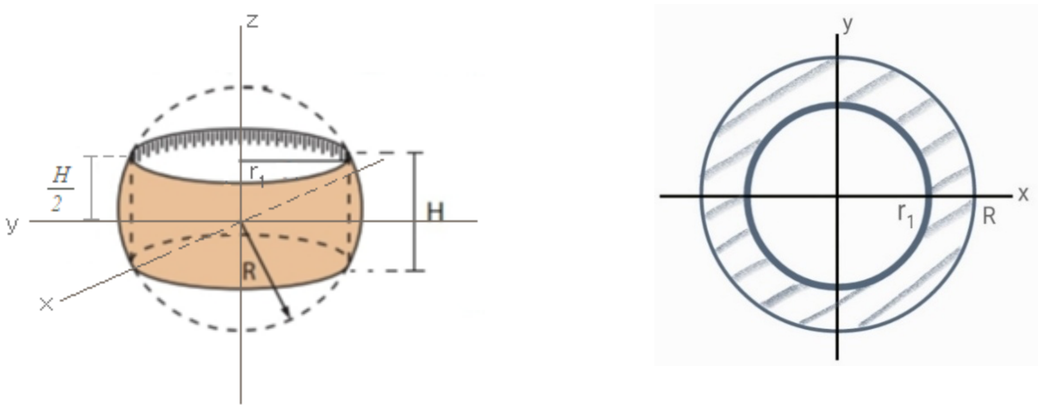
$${R_1}^2 = R^2 - h^2 \quad \text{e} \quad {R_2}^2 = r^2 - h^2.$$

Assim, substituindo os valores de r_1^2, R_1^2, r_2^2 e R_2^2 em C_1 e C_2, obtém-se:

$$C_1 = \pi \left[R^2 - h^2 - \left(R^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2\right)\right] = \pi\left(\frac{H^2}{4} - h^2\right) = C_2.$$

Como $C_1 = C_2$, então, pelo Princípio de Cavalieri, A_1 e A_2 têm o mesmo volume.

Outra estratégia, num contexto do Ensino Superior, é olhar para esse volume como um problema de integrais múltiplas. Nesse caso, a dedução da fórmula do volume do anel de guardanapo pode ser obtida por meio de integral tripla usando o sistema de coordenadas cilíndricas (para mais detalhes, consultar Stewart, 2010). Para isso, considere o anel de guardanapo da Figura 6a, que é originado quando o cilindro de raio r_1, de equação $x^2 + y^2 = {r_1}^2$, é retirado da esfera de raio R, de equação $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. A metade da altura do cilindro obtido é dada por um plano $z = \frac{H}{2}$ que passa na interseção do cilindro e da esfera, em que H é a altura total do cilindro.



a) b)

Figura 6. Volume do anel de guardanapo por integral tripla
Fonte: Autoras (2024).

Para calcular o volume do anel de guardanapo, consideraremos somente a parte acima do plano xOy e multiplicaremos a integral obtida por dois.

Desse modo, considere a variável z como totalmente dependente, sendo que $z \in [0, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}]$, o que equivale, em coordenadas cilíndricas, a $z \in [0, \sqrt{R^2 - r^2}]$. E, com a projeção do plano xOy na Figura 6b, temos que $\theta \in [0, 2\pi]$ e $r \in [r_1, R]$.

Com isso, segue que

$$\begin{aligned} V_{anel\ de\ guardanapo} &= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2}} r\ dzdrd\theta = 2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{R} r\sqrt{R^2 - r^2}\, drd\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \sqrt{(R^2 - {r_1}^2)^3}\, d\theta = \frac{4\pi}{3} \cdot \sqrt{(R^2 - {r_1}^2)^3}. \end{aligned}$$

Como $\left(\frac{H}{2}\right)^2 = R^2 - {r_1}^2$, então:

$$V_{anel\ de\ guardanapo} = \frac{4\pi}{3} \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{H}{2}\right)^2\right)^3} = \frac{4\pi}{3} \cdot \sqrt{\frac{(H^3)^2}{64}} = \frac{\pi H^3}{6}.$$

Os cálculos apresentados do volume do anel de guardanapo, seja por meio do volume de outros sólidos geométricos usuais ou por integrais múltiplas, comprovam a relação paradoxal. Portanto, o volume de um anel de guardanapo depende unicamente da sua altura, o que representa um fantástico resultado matemático, afinal, a noção intuitiva ao comparar os anéis de guardanapo sem efetuar qualquer cálculo, provavelmente, seria falha.

METODOLOGIA E RECURSOS DIDÁTICOS

A resolução de problemas é uma atividade comum na vida cotidiana que remonta à história da civilização (Morais & Onuchic, 2021). Contudo, na realidade escolar, pouco se vê sobre a abordagem de problemas com dados reais pertencentes ao cotidiano do estudante. Essa ausência pode ser um dos motivos para o desinteresse do discente em estudar matemática, dado que ele, por si só, muitas vezes não consegue visualizar conteúdos abstratos e teóricos na prática. É com essa perspectiva que o docente deve ser a “ponte” entre o estudante e o conhecimento na prática. Uma alternativa para isso é abordar situações problemas associadas à realidade que coloquem o estudante como protagonista, e não um reprodutor de respostas de problemas que tenham o mesmo roteiro fixo.

Diante disso, a MEAAMaRP torna-se uma alternativa. No Brasil, desde 1992, essa abordagem metodológica tem sido tema de interesse para o GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, que desenvolve suas ações na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP em Rio Claro/SP. O grupo conduz estudos na linha de Resolução de Problemas, considerando, principalmente, questões de ensino, aprendizagem e avaliação de forma integrada. Não é à toa que a palavra composta inicial que nomeia a metodologia (ensino-aprendizagem-avaliação) tem como finalidade apresentar a perspectiva em que o “ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia e mediador" (Allevato & Onuchic, 2021, p. 47).

A MEAAMaRP é composta por um roteiro de dez etapas, tendo como ponto de partida um problema gerador selecionado ou elaborado pelo professor. Esse é assim denominado porque visa "à construção de um novo conteúdo, conceito princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula" (Allevato & Onuchic, 2021, p. 49). Nesse processo, o aluno pode ampliar sua compreensão e habilidade de conteúdos matemáticos básicos, e consegue demonstrar a sua percepção sobre os problemas por meio das estratégias adotadas, que são resultado de seus conhecimentos prévios e de sua experiência matemática.

Inclusive, a BNCC indica que a Resolução de Problemas (RP) possibilita que os alunos desenvolvam a autonomia a partir do gerenciamento de informações e, assim, consigam ampliar conhecimentos, habilidades e perspectivas quando encontram um problema na Matemática e no cotidiano (Brasil, 2018).

Como proposta para fomentar o ensino por meio da RP, pode-se adotar o uso de material concreto. Desde o século XIX, o pedagogo Johann Heinrich Pestalozzi já defendia a necessidade da educação "começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações" (Santos; Oliveira & Oliveira, 2013, p. 6). De acordo com Fiorentini e Miorim (1990), essa valorização da manipulação de materiais concretos aliada aos problemas de ensino-aprendizagem enfrentados pelos professores e alunos contribuíram para que o material concreto tornasse-se uma fórmula mágica para a solução dessa situação. Convém mencionar que o material contribuirá para o aprendizado desde que seja utilizado adequadamente, o que exige um bom planejamento da atividade e acompanhamento na sua execução. Nesse sentido, é preciso, também, dar liberdade para que o aluno desenvolva familiaridade com o material.

Além disso, o GeoGebra é um forte aliado no ensino da Matemática. Do ponto de vista didático, como o software permite diferentes representações de um mesmo objeto matemático, visualizado de forma algébrica, gráfica e numérica simultaneamente, o aluno pode realizar atividades de exploração e descobertas por conta própria (Preiner, 2008), sem contar a possibilidade de alterar objetos preservando sua construção e propriedades originais, permitindo a construção de inúmeros testes e tornando o computador um laboratório (Nascimento, 2012).

Desse modo, utilizar esses recursos didáticos em conjunto possibilita que o estudante tenha tanto a experiência tátil com o material concreto quanto a de simulação virtual no GeoGebra 3D, podendo optar pelo recurso com o qual sinta maior familiaridade e facilidade no processo de interpretação. Portanto, esses recursos podem ser fortes aliados no problema matemático vinculado à MEAAMaRP.

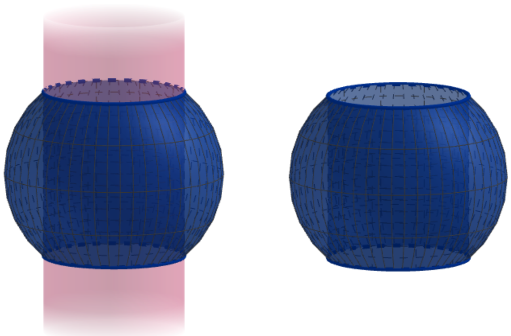
Uma Proposta para Sala de Aula

Como possibilidade para trabalhar o volume de sólidos com um resultado intrigante e um artefato conhecido pelos alunos, sugerimos um problema matemático envolvendo o anel de guardanapo.

Na verdade, esse problema faz parte de uma sequência de atividades para o ensino de volumes por meio do princípio de Cavalieri baseada no roteiro proposto pela MEAAMaRP, que inclui o uso de material concreto e do GeoGebra 3D. Esse roteiro parte de um problema gerador experimental e de medições, seguidos de questionamentos com o intuito de encaminhar os alunos às hipóteses do princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes, sendo que essa ferramenta matemática deve ser formalizada pelo docente após discutir os resultados experimentais. A atividade sobre o anel de guardanapo encaixa-se na última etapa do roteiro, a qual destina-se à proposição de novos problemas relacionados ao conteúdo matemático introduzido no problema gerador, a fim de verificar se esse foi bem compreendido (Allevato & Onuchic, 2021). Nesta seção, daremos enfoque ao problema sobre o anel de guardanapo. O leitor que tiver interesse em acessar a sequência de atividades completa pode consultar Colaço (2023). A versão final da sequência é resultado das aplicações no contexto do Ensino Superior e do Ensino Médio de versões anteriores (Colaço; Figueiredo & Azevedo, 2023a; Colaço; Figueiredo & Azevedo, 2023b).

O problema do anel de guardanapo (Figura 7) é composto por quatro itens que envolvem a comparação das alturas, raios, seções e volumes do anel que serão feitas a partir de material concreto e do aplicativo no GeoGebra 3D. Embora, no enunciado principal da atividade, seja apresentado de que forma é obtido um anel de guardanapo com apoio de uma figura ilustrativa, o item (a) propõe o uso do material concreto (Figura 8) para auxiliar esse entendimento. Nesse item, o intuito é que, ao identificar a parte correspondente da esfera e do cilindro nos anéis de guardanapo, o aluno perceba que a altura dos anéis é igual, e que os raios da esfera e do cilindro que originam cada um deles são diferentes.

O anel de guardanapo é um sólido que resta de uma esfera R quando dela é retirado um cilindro de altura maior ou igual do que o diâmetro da esfera e de raio $r < R$, como ilustra a figura a seguir.



a) Para compreender melhor esse sólido, observem alguns diferentes tamanhos de anéis de guardanapo no material concreto recebido. O que vocês podem perceber sobre os raios das esferas e dos cilindros que os originaram e sobre as suas alturas?

b) Explorem o aplicativo https://www.geogebra.org/m/gbp9yw9m para construir diferentes anéis de guardanapo e reflitam sobre os questionamentos deixados no aplicativo. Que conclusões vocês chegaram?

c) Considerem dois anéis de guardanapo A_1 e A_2, sendo A_1 obtido pela retirada de um cilindro de raio 3 cm de uma esfera de raio 5 cm e A_2 obtido pela retirada de um cilindro de raio $\sqrt{20}$ cm de uma esfera de raio 6 cm. Utilizem o aplicativo https://www.geogebra.org/m/gbp9yw9m para fazer simulações e identificar relações entre esses anéis de guardanapo.

i) Determinem a altura desses anéis;
ii) Determinem área das seções desses anéis obtidas a uma mesma altura;
iii) Determinem o volume desses anéis.

d) Como pode ser calculado o volume de um anel de guardanapo?

Figura 7. Problema com o anel de guardanapo

Fonte: Autoras (2023).

Figura 8. Anéis de guardanapo em material concreto
Fonte: Autoras (2023).

Já o item (b) indica o uso de um aplicativo no GeoGebra (Figura 9) para o estudo de dois anéis de guardanapo, possibilitando a alteração dos raios da esfera e do cilindro que formam cada um, além do plano que secciona esses sólidos. Junto ao aplicativo, são propostas indagações que devem direcionar a identificação das condições para a aplicação do princípio de Cavalieri nos anéis de guardanapo, tais como: o que se pode observar em cada anel quando é movimentado somente um dos controles deslizantes R_1, R_2, r_1 ou r_2? O que acontece com as áreas das seções e o volume dos anéis quando esses têm aproximadamente a mesma altura? Qual resultado matemático garante as conclusões obtidas anteriormente? E, por fim, é possível ter anéis de guardanapo distintos de mesmo volume? Esse último questionamento foi feito, justamente, para evitar que os alunos possam restringir a simulação de anéis de mesma altura a partir de dois anéis formados por esferas de raios iguais e por cilindros de raios iguais, possibilitando a compreensão de que o volume depende apenas da altura, ou seja, mesmo que os anéis sejam formados por esferas e cilindros de diferentes raios, terão volumes iguais se suas alturas forem iguais.

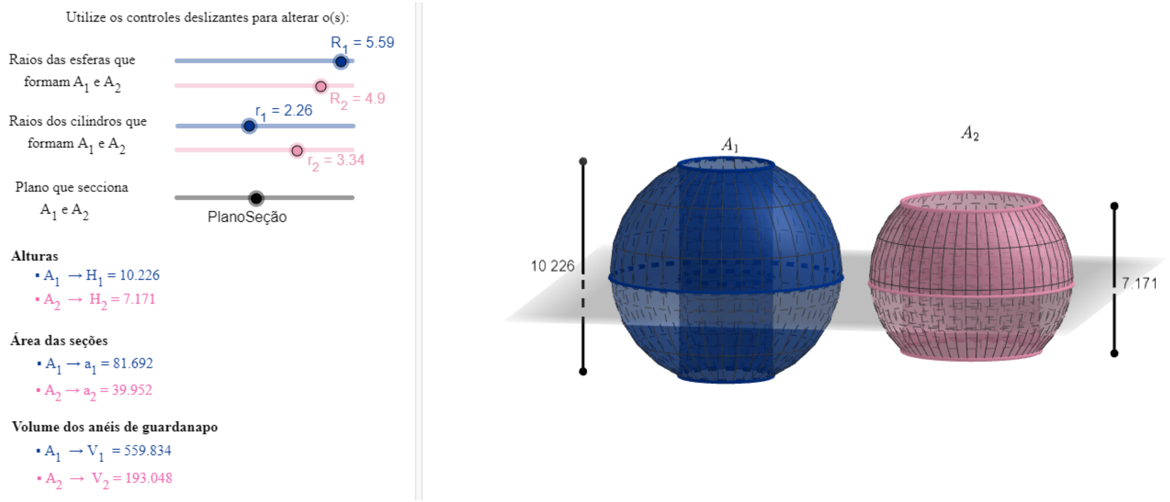


Figura 9. Aplicativo no GeoGebra 3D do problema do anel de guardanapo
Fonte: Autoras (2023).

No item (c), esse aplicativo continuará sendo utilizado. Contudo, a proposta é que, a partir de dados numéricos atribuídos aos anéis de guardanapo no enunciado, sejam obtidos, pelo aplicativo e de forma aproximada, as alturas, as áreas das seções e o volume desses anéis.

E, por último, no item (d), o objetivo é que o aluno desenvolva a interpretação por trás do volume apresentado no aplicativo, percebendo que é possível relacionar as fórmulas do volume da esfera, das calotas esféricas e do cilindro para a determinação do volume dos anéis. Afinal, como mostrado na seção do anel de guardanapo deste artigo, a alternativa de utilizar cálculo integral não é viável para o público-alvo do Ensino Médio. Portanto, convém mostrar a eles o quão úteis são os conhecimentos já obtidos por eles acerca de sólidos geométricos para compreender o volume de um sólido não usual. Atividades como essa podem auxiliar no desenvolvimento da autonomia, visto que o discente é incentivado a construir uma perspectiva matemática sobre os artefatos que fazem parte de suas vivências cotidianas, sendo cada vez mais capaz de articular situações reais baseado em conhecimentos teóricos e abstratos.

Considerações Finais

Estudar e calcular o volume de sólidos geométricos não usuais utilizados no cotidiano pode, muitas vezes, parecer uma tarefa difícil aos discentes. Daí, vê-se o importante papel do docente como mediador do conhecimento cotidiano e científico em propostas de atividades aplicadas em sala de aula, tal como promover a oportunidade do estudante compreender a construção de um objeto decorativo por meio da geometria espacial, a exemplo, o anel de guardanapo proposto nesse trabalho. Afinal, os conceitos envolvidos podem aprimorar não só a identificação de figuras geométricas como o desenvolvimento da noção de volume como um espaço que um sólido "ocupa" no outro, tal como o cilindro quando retirado da esfera, facilitando a abstração.

Ademais, disponibilizar o anel de guardanapo em material concreto e no GeoGebra 3D oferece ao docente, primeiramente, a opção de conciliar a versão física e a virtual do objeto matemático de acordo com a necessidade ao longo da atividade, ou da escolha por somente uma das versões devido à maior familiaridade. A liberdade de escolha pode fomentar a tomada de decisões e a autonomia do estudante, pois o fará observar as vantagens e desvantagens de suas escolhas, assim como se há necessidade de alterá-las. Esse processo também será essencial para que o discente desenvolva senso crítico a respeito dos materiais didáticos utilizados e sua contribuição para o aprendizado.

Do ponto de vista pedagógico, por um lado, com o material concreto, pode-se desenvolver, de forma intuitiva, a noção abstrata do espaço ocupado pelos sólidos geométricos que compõem o anel de guardanapo, por exemplo. Por outro lado, ao utilizar o GeoGebra 3D como um laboratório virtual, podem ser realizados inúmeros testes de hipóteses com visualização imediata do resultado, num processo de gerenciamento de informações, testes e resultados, que resultará em conjecturas obtidas pelo próprio estudante.

Por fim, este trabalho apresentou duas diferentes abordagens para o cálculo do volume do anel de guardanapo e uma breve atividade para aplicação do estudo em sala de aula. Consideramos que apresentar o paradoxo do anel de guardanapo é uma forma de aproximar os estudantes dos resultados intrigantes investigados na Matemática mostrando que é possível compreendê-los. Sem contar que as três formas de calcular o volume do anel abrem espaço para que, além da atividade proposta para nível de Educação Básica, o docente tenha um ponto de partida para desenvolver atividades desse sólido também num contexto de Ensino Superior e, quem sabe, nessa perspectiva, relacionar as três formas de solução.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC) pelo apoio financeiro por meio do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Sistemas Aplicados ao Ensino (PEMSA), à Universidade do Estado de Santa Catarina (Udesc) pela bolsa de Iniciação Científica e ao Laboratório Fábrica Matemática (Fab3D) pela produção dos materiais concretos.

REFERÊNCIAS

Allevato, N. S. G., & Onuchic, L. R. (2021). Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: L. R. Onuchic, N.S.G. Allevato, F. C. H. Noguti, & A. M. Justulin. *Resolução de Problemas: Teoria e Prática*. (pp. 35 – 52). Jundiaí/SP: Paco.

Benk, P., Silva, S. M., Figueiredo, E. B., & Siple, I. Z. (2016, setembro). O Princípio de Cavalieri: numa abordagem apoiada pelas tecnologias atuais. *II Colóquio Luso-Brasileiro de Educação,* Brasil, BR.

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental – Matemática*. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental.

Brasil. (2018). *Base Nacional Curricular Comum*. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, Brasília-DF: MEC.

Colaço, A. Z. (2025). *O Princípio de Cavalieri por meio da resolução de problemas: sequências de atividades para o estudo de volumes* (Monografia de Licenciatura em Matemática). Udesc. Recuperado em 07 de dezembro, 2025 de https://repositorio.udesc.br/handle/UDESC/17786.

Colaço, A. Z., Figueiredo, E. B., & Azevedo, E. B. (2023a). O princípio de Cavalieri por meio da resolução de problemas: uma experiência com formação de professores. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 12, 480–506.

Colaço, A. Z., Figueiredo, E. B., & Azevedo, E. B. (2023b). Princípio de Cavalieri: uma experiência com alunos do Ensino Médio. In *Anais do Congresso Internacional Movimentos Docentes* (pp. 1379–1389). V&V Editora.

Dolce, O., & Pompeo, J. N. (2013). *Fundamentos da Matemática Elementar: geometria espacial, posição e métrica* (7a ed.). São Paulo: Atual.

Fiorentini, D., & Miorim, M. A. (1990, julho-agosto). Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. *Boletim Sbem-Sp*, São Paulo, 4(7), 5-10.

Machado, L. L. M. C. (2021). *O Princípio de Cavalieri e suas* aplicações*: áreas e volumes*. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal Espírito Santo, Vitória.

McFerhat. (2018). *The napkin ring paradox*. Recuperado em 19 de dezembro, 2024, de https://steemit.com/steemstem/@mcfarhat/the-napkin-ring-paradox

Monteiro, I. A. (2015). *O desenvolvimento histórico do ensino de geometria no Brasil* (Monografia de graduação). Universidade Estadual Paulista Júlio de

Mesquita Filho, São Paulo, SP, Brasil. Recuperado em 19 de dezembro, 2024, de https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/o-desenvolvimento-historico--ivan-alves-monteiro.pdf

Morais, R. S., & Onuchic, L. R. (2021). Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas. In: L. R. Onuchic, N.S.G. Allevato, F. C. H. Noguti, & A. M. Justulin. *Resolução de Problemas: Teoria e Prática*. (pp. 19 – 36). Jundiaí/SP: Paco.

Nascimento, E. G. A. (2012). A avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. In *Anais do Actas de La Conferência LatinoAmericana de GeoGebra.* Montevideo, UY. Recuperado em 19 de dezembro, 2024, de http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/67.pdf

Preiner, J. (2008). *Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra* (Dissertação de Mestrado). University of Salzburg, Salzburg.

Santos, A. O., Oliveira, C. R., & Oliveira, G. S. (2013, agosto). Material Concreto: uma estratégia pedagógica para trabalhar conceitos matemáticos nas séries iniciais do ensino fundamental. *Itinerarius Reflectionis*, [S.L.], 9(1), 1-14.

Stewart, J. *Cálculo*. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. 2 v.