Tangram
Revista de Educação Matemática

DOI: 10.30612/tangram.v8i1.19489

Expansão dos ambientes de aprendizagem: possibilidades de novas referências por meio de tarefas em livros didáticos de Matemática

Expansion of learning milieux: possibilities of new references through tasks in Mathematics textbooks

Ampliación de los ambientes de aprendizaje: posibilidades de nuevas referencias a través de tareas en los libros de texto de Matemáticas

Douglas Ribeiro Guimarães
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM),
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)
Rio Claro, São Paulo, Brasil
douglasrguimaraes5@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6247-3506

Rúbia Barcelos Amaral
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM),
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)
Rio Claro, São Paulo, Brasil
rubia.amaral@unesp.br
https://orcid.org/0000-0003-4393-6127

Tangram
Revista de Educação Matemática

Universidade Federal da Grande Dourados

Resumo: Este artigo tem por objetivo apresentar uma expansão das referências utilizadas por Ole Skovsmose ao abordar os ambientes de aprendizagem, no âmbito da Educação Matemática Crítica. É trazido um contexto sobre o início dessa discussão, assim como outros autores no campo da Educação Matemática que também contribuíram para modificar os ambientes de aprendizagem. A partir disso, e com dados de uma pesquisa que analisou livros didáticos de Matemática, são apresentados exemplos de tarefas que permitem compreender uma expansão das referências dentro dos ambientes de aprendizagem. Essas novas referências abarcam a 'matemática pura camuflada' e um contexto 'possivelmente real'. Enquanto a primeira demarca terreno entre a matemática pura e a semirrealidade, a segunda envolve um olhar transversal para todas as outras referências. Espera-se que este texto sirva como reflexão para pesquisadores e professores interessados em olhares críticos sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave: Cenários para investigação. Paradigma do exercício. Geometria.

Abstract: This article aims to present an expansion of the references used by Ole Skovsmose when addressing learning milieux, within the scope of Critical Mathematics Education. It provides a context for the beginning of this discussion, as well as other authors in the scope of Mathematics Education who also made contributions to modify learning milieus. Based on this, and with data from a research that analyzed Mathematics textbooks, examples of tasks are presented that allow us to understand an expansion of references within learning milieux. These new references encompass 'camouflaged pure mathematics' and a 'possibly real' context. While the first demarcates the terrain between pure mathematics and semi-reality, the second involves a transversal look at all other references. It is hoped that this text will serve as a reflection for researchers and teachers interested in critical views on the teaching and learning of Mathematics.

Keywords: Landscapes of investigation. Exercise paradigm. Geometry.

Resumen: Este artículo pretende presentar una ampliación de los referentes utilizados por Ole Skovsmose al abordar los ambientes de aprendizaje, en el ámbito de la Educación Matemática Crítica. Se proporciona un contexto sobre el inicio de esta discusión, así como otros autores en el campo de la Educación Matemática que también realizaron aportes para modificar los ambientes de aprendizaje. A partir de ello, y con datos de una encuesta que analizó libros de texto de Matemáticas, se proporcionan ejemplos de tareas que permiten comprender una ampliación de referencias dentro de los ambientes de aprendizaje. Estas nuevas referencias engloban unas "matemáticas puras camufladas" y un contexto "posiblemente real". Mientras que el primero delimita el terreno entre las matemáticas puras y la semi-realidad, el segundo supone una mirada transversal a todas las demás referencias. Se espera que este texto sirva de reflexión para investigadores y docentes interesados en visiones críticas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Palabras clave: Escenarios de investigación. Paradigma del ejercicio. Geometría.

Recebido em 19/01/2025
Aceito em 28/04/2025

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O objetivo deste texto é apresentar uma expansão das referências utilizadas por Skovsmose (2000) ao abordar os ambientes de aprendizagem, no âmbito da Educação Matemática Crítica. Para atender este objetivo, trazemos dados de uma pesquisa de mestrado que procurou compreender como a Educação Matemática Crítica permeava duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio, no horizonte da Geometria (Guimarães, 2022). Nessa pesquisa, diversos foram os resultados e, dentre eles, optamos por detalhar aqueles que se referem ao olhar para os livros didáticos à luz dos ambientes de aprendizagem.

Os ambientes de aprendizagem, possivelmente, formam a discussão mais conhecida sobre a Educação Matemática Crítica proposta por Ole Skovsmose no âmbito da Educação Matemática. Acreditamos que isso ocorra, concordando com Marcone e Milani (2020), devido ao artigo “Cenários para Investigação” (Skovsmose, 2000) ser amplamente utilizado por outros pesquisadores e, também, pelos professores, para pensar em propostas alternativas ao ‘ensino tradicional de Matemática’.

Compreendemos que expandir os ambientes de aprendizagem não significa descaracterizar a proposta trazida por Skovsmose há mais de 20 anos, mas sim contextualizá-la sob novos olhares, a partir de novas investigações. “Não se trata de negar o que Skovsmose apresenta, mas, sim, pensar em outras possibilidades ali não explicitadas. De certa forma, esse autor sempre incentivou que outros pesquisadores produzissem novos conhecimentos, a partir ou inspirados em teorias já consolidadas” (Marcone & Milani, 2020, p. 273).

Diante disso, procuramos nas seções seguintes contextualizar historicamente a proposta inicial dos ambientes de aprendizagem e o que se tem de mais recente em avanços dessa discussão, trazendo outros pesquisadores que pensaram em novos olhares, bem como apresentamos nossos resultados de pesquisa, visando uma confluência dessas abordagens para então mostrarmos a expansão das referências dos ambientes de aprendizagem.

COMEÇANDO EM 2000: CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO COMO OPOSIÇÃO AO ENSINO TRADICIONAL DE MATEMÁTICA

O artigo "Cenários para Investigação" foi escrito por Ole Skovsmose e publicado em 2000, pela revista Boletim de Educação Matemática (Bolema), com tradução de Jonei Cerqueira Barbosa. Conforme explicam Marcone e Milani (2020), ideias que estão nesse artigo foram apresentadas por Skovsmose na Reunião Anual da American Educational Research Association (AERA), em New Orleans, no mês de abril de 2000. Em seguida, a versão em inglês do artigo foi publicada na revista ZDM – Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (The International Journal on Mathematics Education), em 2001.

Convém destacar que Skovsmose (2022), em um capítulo do livro "Landscapes of investigation: contributions to Critical Mathematics Education" (Penteado & Skovsmose, 2022), discorre sobre o início dessa proposta, evidenciando que ela surgiu em uma palestra para professores dinamarqueses, em 1996. Ao explicar para alguns colegas o que iria falar, Skovsmose fez esboços que deram origem à famosa tabela com os ambientes de aprendizagem, que se encontra mais a frente neste texto.

O mote do artigo de 2000 estava na apresentação de uma proposta crítica para o ensino de Matemática, que visava problematizar e refletir sobre a tradição ao ensinar essa disciplina. Dessa forma, Skovsmose (2000) aborda dois principais paradigmas de organização da sala de aula: paradigma do exercício e cenários para investigação. Enquanto o primeiro revela o caráter tradicional de ensino, como o uso excessivo de exercícios e técnicas de resolução, a ocupação de grande parte da aula com a exposição do conteúdo pelo professor e o papel do livro didático de Matemática enquanto um representante de práticas tradicionais; o segundo possui a intenção de servir como suporte a um trabalho investigativo, em que os estudantes estão mais 'livres' para perguntar e buscar explicações aos fenômenos estudados.

Diferentemente do paradigma do exercício, em que os alunos passam por um processo de não questionamento e aceitação da tradição escolar, nos cenários para investigação ocorre, segundo Skovsmose (2000), um convite feito pelo professor aos estudantes, para realizarem explorações e explicações. A ideia do convite seria deixar os alunos no comando do processo de investigação, com a atuação do professor enquanto um mediador. Vale destacar que só há cenário para investigação se os estudantes aceitarem o convite.

Para Skovsmose (2000), o professor convida os alunos por meio de questionamentos como ‘o que acontece se…?’, feito diante de alguma situação em sala de aula, que pode partir de uma notícia, uma imagem, um modo de resolução de problemas, um fato matemático ainda desconhecido etc. O aceite ao convite é indicado quando os alunos também se perguntam ‘sim, o que acontece se…?’, em um processo que origina uma investigação, pautada na exploração da situação questionada. Após esse processo, indo além da exploração da situação, o professor pode buscar os motivos, ou seja, as explicações que dão conta de argumentar sobre a situação investigada. Nesse momento, a pergunta que instiga os alunos muda, ela passa a ser ‘por que isto…?’ e, parecido com o momento anterior, quando os estudantes dizem ‘sim, por que isto…?’, o processo de explicação é iniciado (Skovsmose, 2000).

Para dar origem aos ambientes de aprendizagem, o autor apresenta as referências, que têm o objetivo de “levar os estudantes a produzirem significados para os conceitos e atividades matemáticas” (Skovsmose, 2000, p. 7). Para ele as referências incluem os motivos das ações e os seus contextos, que estão atrelados com a produção de significados que os alunos irão realizar em sala de aula. Essas referências podem ser apenas da Matemática, de uma semirrealidade ou da vida real.

Referências apenas à Matemática, simplesmente denominadas como referências à matemática pura, indicam situações que estão no campo dessa área de conhecimento, são os casos das equações, das funções, dos cálculos de área e volume, das expressões algébricas, dos resultados e demonstrações de teoremas, do uso de algoritmos e técnicas ou fórmulas, entre outros. Nas referências à matemática pura os objetos de conhecimento trabalhados apresentam entidades abstratas, visto que são pertencentes ao campo dos conceitos matemáticos e não possuem ligação com objetos materiais. Por exemplo, os cálculos de área e volume são relativos a formas geométricas e não a terrenos, recipientes, caixas etc.

Referências à semirrealidade envolvem realidades construídas ou artificiais, em que contextos são criados a partir de objetos ou elementos reais, tais como compras, pagamentos, empréstimos, distância, velocidade etc. Esses elementos estão presentes nos enunciados ou nas situações da sala de aula apenas para contextualizar o que é apresentado, formando “um mundo sem impressões dos sentidos [...], de modo que somente as quantidades mensuradas são relevantes” (Skovsmose, 2000, p. 9). O passo da matemática pura à semirrealidade envolve a ligação dos conceitos matemáticos com os objetos concretos (da realidade material), contudo essa ligação é apenas descritiva e tem o objetivo de revelar dados específicos, sem questionamentos para a situação criada.

E as referências à realidade ou vida real abarcam as situações que, de fato, estão no cotidiano dos alunos. Dentre os exemplos dessas referências encontramos informações sobre emprego/desemprego, poluição, saúde, viagens, planejamento financeiro, desmatamento, entre muitos outros. Diferentemente da semirrealidade, aqui os questionamentos e as dúvidas sobre os contextos referenciados são permitidos, uma vez que tratam sobre dados e informações retirados, produzidos ou encontrados na vida real; não foram fabricados ou inventados por entes de fora do processo educacional, tais como os livros didáticos.

Ao fazer a combinação entre o paradigma do exercício, os cenários para investigação e as referências é obtida uma matriz com os ambientes de aprendizagem (Tabela 1). Diante do que pontuamos sobre cada uma dessas noções, compreendemos que os ambientes de aprendizagem vão além de atividades enquadradas nas situações de (1) à (6) encontradas na Tabela 1; eles são formas de organização da sala de aula, indicam o modo de desenvolver a comunicação e o diálogo, os materiais que serão utilizados, as avaliações realizadas, entre outros elementos dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática.

Tabela 1

Ambientes de aprendizagem.

	Paradigma do exercício	Cenários para investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semirrealidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose, 2000, p. 8.

A partir dessa organização dos ambientes de aprendizagem, uma saída trivial, que não é a defendida por Skovsmose (2000) e nem por nós, seria de esquecer as práticas que ocorrem, por exemplo, nos ambientes (1) e (3) e partir para o uso abundante do (6), tendo os outros ambientes como possibilidades pontuais. Essa saída não deve ser tomada porque a proposta dos ambientes de aprendizagem vai ao encontro do movimento, do passeio, do trânsito, da escolha, enfim, da viagem pelos diferentes modos de organização das práticas em sala de aula. Ou seja, a premissa que o autor traz em seus textos indica a intenção de apresentar aos professores formas possíveis de desenvolvimento das aulas, sem "sugerir que um ambiente de aprendizagem particular represente o objetivo último para a educação matemática, crítica ou não" (Skovsmose, 2000, p. 15).

As intenções dos ambientes (1), (3) e (5) parecem restringir e se apoiar na tradição da matemática escolar, pois estão imersas na prática do paradigma do exercício. Contudo, a solução não é esquecer esses ambientes, pois mesmo a partir de atividades exploratórias, que estão no cerne dos cenários para investigação, momentos de cristalizar alguns conceitos, procedimentos, aplicações etc. são importantes como formas de síntese do conteúdo ensinado. A proposta, então, é refletir e discutir com os estudantes quais caminhos e escolhas podem ser traçados ao longo do período escolar, de maneira que as experiências sejam diversas, com possibilidades de produção de significados qualitativamente diferentes uns dos outros.

É nesse movimento entre os ambientes que, na visão de Skovsmose (2000), uma incerteza pode ocorrer, principalmente a partir da ênfase no uso dos cenários para investigação. “A meu ver, a incerteza não deve ser eliminada. O desafio é enfrentá-la” (Skovsmose, 2000, p. 18). E esse enfrentamento acontece, primeiramente, a partir da reflexão sobre quais ambientes estão sendo desenvolvidos e, em seguida, num passo adicional para a intencionalidade de quais outros ambientes podem surgir para a organização das aulas.

PROPOSTAS DE EXPANSÃO DOS AMBIENTES DE APRENDIZAGEM

Os cenários para investigação se constituíram em base teórica para discussões que envolvem diferentes áreas da Educação Matemática. Kistemann Jr, Giordano e Souza (2023), por exemplo, abordam o desenvolvimento do pensamento e letramento financeiro e estatístico e, para tanto, se amparam na perspectiva dos cenários de investigação. Já Souza e Albrecht (2024) trazem em cena os temas transversais, na perspectiva da EMC.

No entanto, algumas pesquisas não apenas se amparam na perspectiva teórica da EMC, mas ampliam alguns de seus temas, como os ambientes de aprendizagem. Faustino e Passos (2013) tiveram a intenção de articular os cenários para investigação com a perspectiva da resolução de problemas, no campo da Educação Matemática. As autoras, seguindo uma vertente freireana, adotam “a resolução de problemas não como uma forma de fixar regras e técnicas matemáticas, mas como um meio para o ensino de ideias e conceitos” (Faustino & Passos, 2013, p. 65). Nessa linha, entendem que ‘ensinar matemática através da resolução de problemas’ é um caminho frutífero nos processos de ensino e aprendizagem, pois ao tomar o problema como ponto de partida é possível, além de conhecer o objeto de estudo, compreender suas relações com o mundo e suas razões de ser.

Segundo as autoras, em conversa com Skovsmose, foi possível adequar a matriz dos ambientes de aprendizagem de modo a considerar a presença da resolução de problemas como outro paradigma de organização da sala de aula de Matemática. Essa presença é identificada na Tabela 2 a seguir.

Tabela 2

Resolução de problemas como ambientes de aprendizagem.

	Paradigma do exercício	Resolução de problemas	Cenários para investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)	(3)
Referências à semirrealidade	(4)	(5)	(6)
Referências à realidade	(7)	(8)	(9)

Fonte: Faustino & Passos, 2013, p. 71.

As autoras fizeram a inclusão da coluna de resolução de problemas no centro da matriz, pois consideram que os problemas são atividades mais abertas em comparação com os exercícios. Contudo, ao comparar os problemas com os cenários, os primeiros têm caráter fechado, enquanto os segundos representam caraterísticas investigativas e exploratórias.

O trabalho de Biotto Filho, Faustino e Moura (2017) também expande a Tabela 1, incluindo uma referência e dois novos paradigmas de práticas em sala de aula. O objetivo dos autores estava em estender as possibilidades de desenvolver questões relacionadas à Educação Matemática Crítica em um ambiente de aprendizagem. O estudo apresentado por eles, assim como o de Faustino e Passos (2013), decorre de leituras e proposições teóricas, sendo incluídos alguns exemplos práticos dessa expansão dos ambientes (Tabela 3).

Tabela 3

Cenários para investigação, imaginação e ação.

	Paradigma do exercício	Investigação controlada	Cenário para investigação	Cenário para ação
Referências à matemática pura	A1	A2	A3	A4
Referências à semirrealidade	B1	B2	B3	B4
Referências à realidade	C1	C2	C3	C4
Referências às possibilidades	D1	D2	D3	D4

Fonte: Biotto Filho, Faustino & Moura, 2017, p. 66.

Referências às possibilidades referem-se ao processo de imaginação, que "envolve considerar o que não é, mas poderia ser. Essa paisagem de discussão pode ser uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento de reflexões críticas sobre a realidade" (Biotto Filho, Faustino & Moura, 2017, p. 70). Os autores deixam claro que as possibilidades são diferentes das referências à semirrealidade, porque podem existir questionamentos sobre as situações que são pertinentes para os estudantes, apesar de não estarem em suas realidades imediatas.

A investigação controlada é relatada pelos autores de maneira semelhante ao que Faustino e Passos (2013) destacaram sobre a resolução de problemas, ou seja, uma investigação mais aberta do que o paradigma do exercício, mas que não é tão exploratória quanto os cenários, visto que o professor detém maior controle sobre esse processo perquiridor, conduzindo os caminhos que os estudantes irão trilhar.

Já o cenário para ação apresenta uma visão dialética entre ação e reflexão, visando à transformação da realidade dos estudantes. Ele "abre caminhos para que os estudantes se envolvam nos problemas da escola, da comunidade em que vivem, e comecem a desenvolver ações que podem contribuir para a transformação destes problemas" (Biotto Filho, Faustino & Moura, 2017, p. 76). Esse cenário é amparado pela perspectiva de ler e escrever o mundo com a matemática, de Eric Gutstein, que tem inspiração em Paulo Freire. Nesse sentido, a leitura significa utilizar do conhecimento matemático para realizar uma interpretação do mundo, enquanto a escrita representa uma ação transformadora em situações opressivas.

Por fim, trazemos o trabalho de Milani, Civiero, Soares e Lima (2017) que propuseram um olhar para o diálogo que pode ocorrer em todos os ambientes de aprendizagem, desde o paradigma do exercício até os cenários para investigação. A noção de diálogo segue autores como Helle Alrø, Ole Skovsmose, Paulo Freire e Raquel Milani. De um modo geral, entendem que ele é caracterizado como encontro entre pessoas; envolve ação e reflexão; tem aspectos que o conectam ao aprendizado crítico; é imprevisível; enfim, é "um movimento de ir até onde o outro está para compreender o que ele diz" (Milani, Civiero, Soares & Lima, 2017, p. 231), ou seja, o professor sai do centro de seu conhecimento e se desloca até o encontro do estudante, com idas e recuos, colocando-se em posição igualitária.

Para fazer essa discussão do diálogo como um novo eixo dos ambientes de aprendizagem, as autoras trazem suas experiências enquanto professoras de Matemática, formadoras de professores e também pesquisadoras no campo da Educação Matemática, visando apresentar que, mesmo no paradigma do exercício, imbuído do ensino tradicional de Matemática, é possível desenvolver atos dialógicos.

Milani et al. (2017) trouxeram caminhos que para uma comunicação mais aberta entre professor e alunos, partindo do paradigma do exercício e avançando em direção ao diálogo. Compreendem que quando o professor adota uma escuta ativa, ele inicia o movimento dialógico, voltado para a compreensão das falas dos alunos. Esse processo, entretanto, não é simples nem imediato, porque envolve uma transformação profunda na postura epistemológica, metodológica e política do educador.

Ao transitar pelos diferentes ambientes de aprendizagem descritos na matriz (Tabela 1), surge um vasto campo de possibilidades para discutir mudanças na Educação Matemática. Uma delas é que naqueles ambientes "enraizados no paradigma do exercício, é possível mover-se em direção ao diálogo, colocando em ação alguns atos dialógicos, de modo que o professor possibilite que a fala seja compartilhada com alunos nas aulas de matemática" (Milani et al., 2017, p. 243). Portanto, as autoras veem o diálogo como potencial de estimular reflexões capazes de provocar essas mudanças, contribuindo para atenuar as linhas que separam os diferentes ambientes, concordando com Skovsmose (2000) a respeito da não rigidez da matriz.

Os estudos apresentados mostram uma convergência entre diferentes perspectivas teóricas no campo da Educação Matemática Crítica, articulando propostas que vão desde o paradigma do exercício até os cenários para ação e o diálogo. Faustino e Passos (2013) destacam a resolução de problemas como um meio para transcender o ensino tradicional, aproximando-o de uma abordagem que explora conceitos matemáticos em relação com o mundo. Ao mesmo tempo, Biotto Filho, Faustino e Moura (2017) expandem a matriz ao incluir a imaginação e a ação como dimensões críticas para a transformação educacional. Esses cenários, especialmente o de ação, reforçam a ideia freireana de que a Matemática pode ser uma ferramenta para compreender e transformar realidades opressivas.

Além disso, o trabalho de Milani et al. (2017) enfatiza o papel do diálogo como um eixo transversal a todos os ambientes de aprendizagem, ressignificando as interações em sala de aula. Esse movimento dialógico, fundamentado em autores como Paulo Freire e Ole Skovsmose, propõe uma comunicação mais aberta e igualitária, desafiando a centralidade do professor e promovendo a escuta ativa. Assim, os diferentes estudos aqui analisados convergem para a construção de ambientes de aprendizagem mais críticos, reflexivos e transformadores, nos quais o ensino e a aprendizagem de Matemática ultrapassam a fixação de técnicas e se tornam um espaço para leitura e escrita do mundo. Isso é fundamental porque “pensar as diferentes possibilidades de ambientes de aprendizagem está presente em parte importante da pesquisa brasileira atual em EMC no Brasil” (Marcone & Milani, 2020, p. 273).

NOVAS REFERÊNCIAS AOS AMBIENTES DE APRENDIZAGEM

A análise dos dados da pesquisa de mestrado foi segmentada em três eixos de discussão. Daremos foco ao eixo “o papel dos enunciados sobre Geometria nos livros didáticos: do determinismo à formatação” que discorreu sobre os modos com que enunciados são trazidos nos capítulos de Geometria perquiridos, no que tange as tarefas propostas e as tarefas resolvidas. Essa análise tomou como base os ambientes de aprendizagem (Skovsmose, 2000) e seguiu com forte influência de estudos semelhantes que também adotaram a matriz como recurso teórico para uma interpretação de tarefas (Guimarães & Litoldo, 2022).

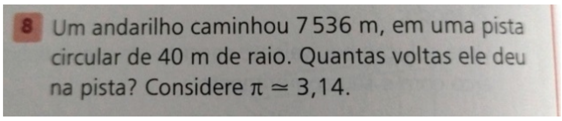
Verificamos que a maioria das tarefas se enquadrava nos ambientes (1) e (3), o que vai ao encontro das afirmações de Skovsmose (2000), mas também de outras investigações que analisaram demais conteúdos em livros didáticos (Guimarães, 2022). Para identificar este tipo de tarefa, os verbos no imperativo como ‘determine’, ‘calcule’, ‘classifique’, ‘obtenha’ e ‘escreva’ eram comuns, além de outros enunciados em formato de pergunta, mas que esperavam respostas diretas dos estudantes.

Em resumo, o que encontramos sobre as tarefas resolvidas e propostas, no âmbito dos capítulos de Geometria, permitiu dizer que elas, em grande parte, destinavam-se à redução dessa temática num compilado de conceitos facilmente aplicados em objetos da matemática pura, que têm apenas a pretensão de mencionar situações semirreais e reais, numa clara busca pela fabricação de dados. Logo, a Geometria acabou se dedicando ao determinismo das fórmulas apresentadas pelos autores, sendo guiada por um poder formatador, que é traduzido em enunciados presentes nos livros didáticos.

No que tange às classificações das tarefas pelos ambientes de aprendizagem, consideramos ser pertinente investigar algumas fragilidades em torno desse processo analítico, o que gerou a proposta aqui apresentada de expansão dessa discussão. É importante pontuar que, assim como Skovsmose (2000) discute, as linhas que separam o paradigma do exercício dos cenários para investigação e as que separam as distintas referências, possuem certa ‘espessura’ e fluidez. Desse modo, a matriz não deve ser vista enquanto estrutura rígida das práticas que ocorrem em sala de aula, mas sim como uma oportunidade de lançar um olhar abrangente sobre o que pode acontecer e o que pode ser feito de diferente nas aulas de Matemática (Biotto Filho, Faustino & Moura, 2017).

Em nossa investigação das tarefas à luz dos ambientes, notamos que analisar os enunciados tornou-se um trabalho por vezes desafiador. Isso ocorreu nas mudanças entre as referências da matemática pura e semirrealidade, no âmbito do paradigma do exercício, e entre algumas das referências que são voltadas aos cenários para investigação. Esse desafio foi proeminente nas classificações das tarefas propostas entre os ambientes (1) e (3), que foram os mais encontrados nos dados da pesquisa (Guimarães, 2022).

A diferença entre esses dois ambientes está na referência à matemática pura e à semirrealidade, dentro do paradigma do exercício. Enquanto o (1) tem foco na abordagem repetitiva de técnicas e algoritmos, sendo que os verbos no imperativo os caracterizam enquanto uma estrutura fechada com objetivo de determinar valores para certas situações, o (3) inclui a combinação dos conceitos matemáticos com objetos artificiais, possibilitando a criação de contextos apenas para descrição de dados necessários e suficientes para a resolução da tarefa. Porém, os verbos no imperativo não são uma exclusividade de (1) e o fato de relacionar objetos com conceitos pode sofrer algumas variações importantes (Figura 1).


8 Um andarilho caminhou 7 536 m, em uma pista circular de 40 m de raio. Quantas voltas ele deu na pista? Considere π ≃ 3,14.

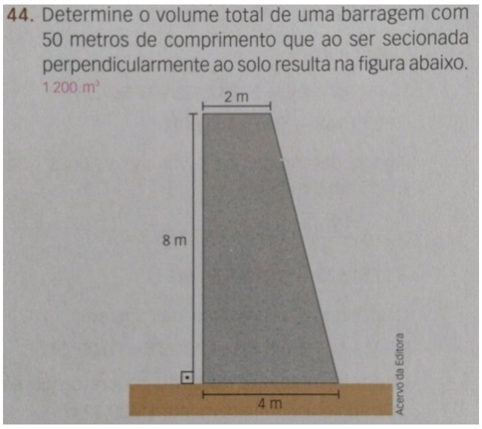

44. Determine o volume total de uma barragem com 50 metros de comprimento que ao ser secionada perpendicularmente ao solo resulta na figura abaixo.
1 200 m³

Figura 1. Tarefas da semirrealidade.

Fonte: Da esquerda à direita Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo & Almeida, 2016, p. 12 e Balestri, 2016, p. 64.

Nas tarefas acima, percebemos que a semirrealidade é o que caracteriza cada uma, por isso assim foram classificadas. No entanto, questionamos em que medida essa semirrealidade é a melhor forma para explicitar os aspectos presentes nos enunciados, uma vez que neles apenas são encontrados dados alusivos a certos objetos que poderiam muito bem funcionar como objetos de um mundo externo ao físico.

Em teoria, a semirrealidade presente em ambientes de aprendizagem se sustenta pelo fato de que há uma referência puramente matemática e outra da realidade, e que no âmbito de se pensar em aplicações ou no desenvolvimento de contextualização da Matemática para o ensino, há recortes possíveis que podem enfatizar aspectos de cada uma dessas referências. Logo, é possível dizer sobre a semirrealidade como um arcabouço para produzir situações fictícias, mas que conferem qualidades exclusivamente matemáticas (conceitos, por exemplo) com qualidades de objetos reais, constituindo uma referência nova. Contudo, vale dizer que, nessa referência, o interesse está em produzir contextos que funcionam para um determinado fim: aplicar conhecimentos matemáticos de maneira que haja possibilidades de 'encaixar' a Matemática em uma variedade de casos possíveis.

Na Figura 1, esses casos se traduzem, nos enunciados das tarefas, como simplesmente uma 'troca de expressões', em que alguém que caminha em círculos e o espaço de uma barragem traz qualidades para, respectivamente, comprimento de arcos e volume de sólido. Portanto, ao trazer um discurso que apenas qualifica a realidade em termos puramente descritivos de fatos que escondem uma intencionalidade por produzir dados para aplicar exatamente os conceitos geométricos mencionados, podemos compreender que há uma espécie de referência à 'matemática pura camuflada'.

Dizemos sobre essa ideia de 'camuflar', porque a intenção das tarefas é clara: produzir contextos de modo que os alunos apenas apliquem os conceitos estudados. Nesse sentido, por que os autores prezam por fazer referência a alguns objetos da realidade, quando na verdade ocorre apenas a 'troca de expressão' no enunciado diante de algum objeto matemático? Não seria esperado que os estudantes realizassem os mesmos procedimentos para atender esse objetivo de aplicação, sendo uma barragem ou um sólido, por exemplo? O que há nessas situações semirreais para que a referência puramente matemática não seja suficiente?

Acreditamos que em nossa investigação apenas hipóteses podem ser formuladas, uma vez que pelo fato de não estarmos analisando a prática em sala de aula fica inviável propor respostas ou discussões para os questionamentos anteriores. Temos assim, por hipótese, que não existem diferenças entre resolver uma tarefa puramente matemática e outra como as que se encontram nos moldes dos exemplos da Figura 1. Ou seja, a 'troca de expressões' realizada pelos autores tem o objetivo único de promover outras referências além da Matemática, permitindo que haja uma diversificação nas propostas de tarefas, mas apenas com o intuito de lançar mão do que documentos oficiais curriculares indicam a respeito da contextualização.

Enxergamos que a ideia de 'camuflar' um enunciado, que é puramente matemático em algo semirreal, promove na prática o que se propõe como contextualização para o ensino de Matemática, porém de uma forma superficial. Mesmo que na semirrealidade Skovsmose (2000) considere as perdas de sentidos e de discussão do próprio contexto criado pelo autor, na 'camuflagem' do enunciado essa perda é ainda mais forte, pois claramente a tarefa foi pensada apenas para atender uma demanda que é exigida pelos documentos e pelo edital do Programa Nacional do Livro e do Material Didático.

Por outro lado, há uma potencialidade interessante quando da classificação entre tarefas nos ambientes (2) e (6) e entre o (4) e o (6), que foi outro desafio encontrado por nós para essa análise à luz da matriz proposta por Skovsmose (2000). Os dois casos de classificação decorrem justamente em propostas dos autores dos livros didáticos que são pouco encontradas nos materiais e, desse modo, podem ressoar como possibilidades pontuais para desenvolver cenários para investigação qualitativamente diferentes, visto que abordam as três referências elencadas na matriz.

Há tarefas classificadas no ambiente (2) que podem ser transformadas no ambiente (6), como a da Figura 2, e também algumas do ambiente (4) para o (6), conforme a Figura 3. Apesar da pouca presença dessas tarefas, em comparação com o restante, vemos que essa possibilidade é pertinente para a Educação Matemática, visto que apresenta aos professores uma variedade de práticas que podem ocorrer em sala de aula. Enquanto a primeira tarefa refere-se à ação de 'produção textual', a segunda envolve o uso de calculadoras.

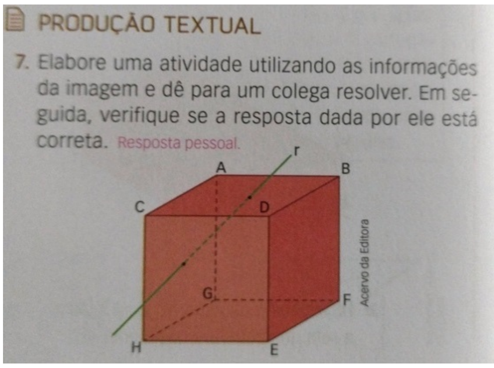


Figura 2. Mudança de ambiente (2) para (6).

Fonte: Balestri, 2016, p. 16.

22 Na calculadora científica de Juliana, a tecla 4 está quebrada. Ela deseja obter o valor de cos $\frac{4\pi}{5}$, sem converter $\frac{4\pi}{5}$ radianos para graus. Encontre uma maneira de ela resolver esse problema.

Figura 3. Mudança de ambiente (4) para (6).

Fonte: Iezzi et al., 2016, p. 27.

Na Figura 2 Balestri (2016) sugere que a tarefa seja uma ‘produção textual’, ou seja, ela solicita aos alunos ações de produzir algum texto, o que de certo modo amplia o repertório exigido deles, visto que as outras atividades têm foco na resolução cujo formato é para apresentar valores numéricos e/ou algébricos. De maneira específica, a ação resultante dessa produção textual será de uma tarefa destinada ao colega de turma, em uma situação que abarca apenas a matemática pura (a imagem do cubo caracteriza essa referência).

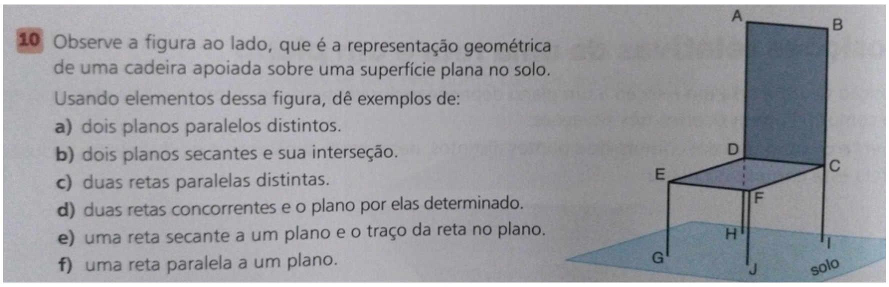
Não podemos antever qual será a proposta elaborada pelos alunos: eles podem produzir uma atividade voltada apenas à realização de operações indicadas anteriormente pelo autor do livro; ou ainda podem criar uma tarefa que fuja do escopo somente visual. Além disso, como o colega de turma perceberá a atividade proposta? De que forma tal atividade será resolvida? Como será avaliada? Essas e outras perguntas ajudam a compreender referências a situações ‘possivelmente reais’.

No caso da Figura 3, vemos que a situação é uma semirrealidade explícita, pois existe uma personagem que está usando uma calculadora. Ainda se trata de um cenário para investigação visto que os estudantes não têm apenas um modo de resolver a tarefa. Porém, por que tal enunciado pode provocar uma mudança para o ambiente (6)? Ao pensar que os autores indicam o uso da calculadora para resolver a tarefa e, imaginando que os alunos tenham esse recurso em mãos, podemos supor que eles próprios estarão dentro de uma possibilidade para encontrar caminhos diversos de resolução. Não somos capazes de ‘controlar’ as teclas pressionadas por eles. Agora, são os estudantes que assumem (caso aceitem o convite para explorar a situação) o controle do seu processo de aprendizagem.

Diante disso, entendemos que agora pode haver uma classificação dessa tarefa como alusiva à realidade, dentro do cenário para investigação. O que Iezzi et al. (2016) propõem parte de um ambiente construído por eles, ou seja, é uma realidade artificial/fabricada. Entretanto, o fato de que os alunos resolverão a tarefa com suas próprias calculadoras e estarão livres para indicar seus caminhos de resolução permite a visibilidade da frágil separação entre as duas referências. No caso dessa situação, os alunos assumem um papel de resolverem, mas ao mesmo tempo também mostram como a personagem da situação a resolveria. Logo, indicamos que há outra referência localizada entre a semirrealidade e a realidade, entendida aqui como referência a situações 'possivelmente reais'.

Por meio desses achados, entendemos que há nos livros analisados potencialidades para as aulas de Matemática, em particular quando envolverem os conteúdos de Geometria. Vale destacar que a ideia por trás dos ambientes de aprendizagem está no 'passeio' pelas diferentes formas de organização da sala de aula (Skovsmose, 2000) e, por conta disso, os cenários para investigação, apesar de ricos em diálogos e explorações por parte dos alunos, não devem substituir completamente as práticas tradicionais oriundas do paradigma do exercício. No entanto, pela desproporcionalidade encontrada nos materiais, acreditamos que há potencialidades nessas mudanças de referência no que tange cenários para investigação, por isso nosso posicionamento quanto ao destaque para os desafios de classificar as tarefas.

Por fim, trazemos dados sobre situações 'possivelmente reais' em práticas do paradigma do exercício. Na Figura 4, por exemplo, é destacado um enunciado que traz a representação geométrica de uma cadeira e, na Figura 5, a representação de um balanço, em que há tanto a fotografia (possivelmente real) e o esquema que a traduz para a matemática pura.



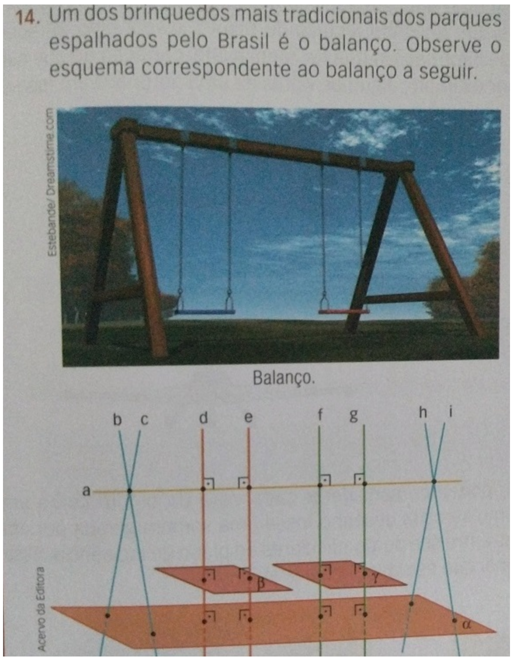
10 Observe a figura ao lado, que é a representação geométrica de uma cadeira apoiada sobre uma superfície plana no solo.

Usando elementos dessa figura, dê exemplos de:

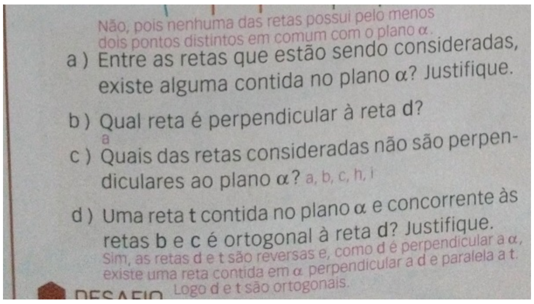
a) dois planos paralelos distintos.
b) dois planos secantes e sua interseção.
c) duas retas paralelas distintas.
d) duas retas concorrentes e o plano por elas determinado.
e) uma reta secante a um plano e o traço da reta no plano.
f) uma reta paralela a um plano.

Figura 4. Enunciado com uma cadeira 'possivelmente real' em situação puramente matemática.

Fonte: Iezzi et al., 2016, p. 134.



14. Um dos brinquedos mais tradicionais dos parques espalhados pelo Brasil é o balanço. Observe o esquema correspondente ao balanço a seguir.



Não, pois nenhuma das retas possui pelo menos dois pontos distintos em comum com o plano α.

a) Entre as retas que estão sendo consideradas, existe alguma contida no plano α? Justifique.

b) Qual reta é perpendicular à reta d?

a

c) Quais das retas consideradas não são perpendiculares ao plano α? a, b, c, h, i

d) Uma reta t contida no plano α e concorrente às retas b e c é ortogonal à reta d? Justifique.

Sim, as retas d e t são reversas e, como d é perpendicular a α, existe uma reta contida em α perpendicular a d e paralela a t. Logo d e t são ortogonais.

DESAFIO

Figura 5. Enunciado com um balanço 'possivelmente real' e seu esquema puramente matemático.

Fonte: Balestri, 2016, p. 27.

Em ambas as figuras o foco dos autores nos enunciados das tarefas permite que apenas respostas específicas sejam dadas, mesmo que mais de uma seja possível, como nos itens da Figura 4. Nesse sentido, claramente ambas fazem alusão ao paradigma do exercício. O modo de produzir enunciados que tomam como referência objetos reais e, além disso, permitir que modelos sejam confeccionados para essa representação, indica que há essa possibilidade de trazer a realidade. A imagem do

Tangram
Revista de Educação Matemática
Universidade Federal da Grande Dourados

balanço e o esquema da cadeira referem-se aos objetos concretos e, ademais, podem estar presentes no cotidiano dos estudantes. Logo, uma classificação rígida pelas distintas referências da matriz dos ambientes é inviável.

Com essas considerações relacionadas aos desafios pela classificação das tarefas propostas pelos autores dos livros didáticos à luz da matriz de Skovsmose (2000), sobretudo em termos das oportunidades de enquadrá-las nas referências, produzimos uma expansão destas, conforme exposto na Figura 6.

Figura 6. Expansão das referências usadas pelos ambientes de aprendizagem.

Fonte: Guimarães, 2022, p. 231.

Na Figura 6 inserimos duas novas referências: ‘matemática pura camuflada’ e ‘possivelmente real’. A primeira é encontrada entre a matemática pura e a semirrealidade, sendo usada para ampliar e, ao mesmo tempo, esconder um contexto puramente matemático revestido de artificialidade. A segunda perpassa todas as referências, uma vez que versa sobre possibilidades de ‘trocar’ a matemática pura e a semirrealidade pela realidade; a ideia de usar as linhas pontilhadas também segue esse aspecto, além de inserir essa nova referência como algo mais transversal.

Propomos uma diferença nas cores da Figura 6, pois entendemos que há uma gradação entre tarefas localizadas nas referências à matemática pura, que passam pela ‘matemática pura camuflada’ e pela semirrealidade, até atingir a realidade, compreendendo esta como mais difusa e rica em possibilidades, mas também incertezas (Skovsmose, 2000). Uma ideia semelhante a esta foi proposta por Biotto Filho (2008), quando faz a articulação com a matriz dos ambientes e as noções de zona de conforto e zona de risco. Para o autor, por exemplo, adentrar em cenários para investigação à luz de uma realidade pode ser um risco para o professor, devido incertezas que fogem ao esperado; porém, ambientes como o (1) e o (3) acabam tornando-se zonas de conforto, uma vez que as discussões e o foco dado pelo docente estão planejados previamente.

Consideramos que as distintas referências abarcadas pela Figura 6 podem ser discutidas tanto no paradigma do exercício quanto em cenários para investigação. Vale enfatizar que expandimos as referências dos ambientes de aprendizagem, e não especificamente de alguma prática, ou seja, de paradigma ou cenário, por isso nossa opção por não reestruturar o quadro já apresentado por Skovsmose (2000). Nesse sentido, pelo que se mostrou nos dados, apenas a 'matemática pura camuflada' quando alusiva ao cenário para investigação não foi encontrada. Acreditamos que não é difícil imaginar o que poderia ocorrer num ambiente com essas características. Por exemplo, os alunos podem fazer explorações e buscar explicações de algum fato matemático que ocorre somente dentro da própria Matemática, mas atrelado a isso realizar a 'troca de expressões' para produzir um ambiente com aspectos semirreais.

Portanto, consideramos até aqui que uma expansão nas distintas referências dos ambientes de aprendizagem (Skovsmose, 2000) pôde estar presente na análise das tarefas, mas justamente por figurar a partir de desafios quando das suas classificações à luz da matriz. Entendemos que essa expansão faz alusão aos dados encontrados na pesquisa e, assim como há subjetividades importantes diante do que é investigado, outros pesquisadores que possuem focos semelhantes podem identificar aspectos diferentes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste texto nosso objetivo foi apresentar uma expansão das referências utilizadas por Skovsmose (2000) ao abordar os ambientes de aprendizagem, no âmbito da Educação Matemática Crítica. Para isso, trouxemos dados de uma pesquisa de mestrado que procurou compreender como a Educação Matemática Crítica permeava duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio, no horizonte da Geometria (Guimarães, 2022). Por meio da análise das tarefas nesses materiais à luz dos ambientes de aprendizagem foi possível expandir a clássica matriz proposta por Skovsmose há mais de 20 anos.

Compreendemos que a expansão dos ambientes de aprendizagem permite trazer novos olhares para essa discussão, principalmente a partir de dados de pesquisa empírica. As tarefas nos livros didáticos mostraram-se pertinentes e, ao trazê-las nesse trabalho, defendemos que um olhar específico sobre elas é importante devido ao seu papel no ensino e na aprendizagem de Matemática. Ademais, por assumirmos uma perspectiva crítica da Educação Matemática, tal foco de atenção é ainda mais relevante, pois visamos à formação de estudantes reflexivos e que tomem os conteúdos ensinados como formas de interpretação crítica da realidade.

Ao expandirmos a matriz de Skovsmose (2000), entendemos que mais estudos são necessários para refletir de que maneiras essas novas referências estariam presentes em sala de aula. Portanto, esse é um caminho pertinente sugerido por nós para que investigações sejam iniciadas, de maneira a encontrar dados e realizar interpretações qualitativamente diferentes das deixadas neste trabalho, de modo a contribuir com a pesquisa em Educação Matemática e, em particular, a sua perspectiva crítica.

REFERÊNCIAS

Balestri, R. (2016). *Matemática: interação e tecnologia*. (2ª ed., v. 3). São Paulo: Leya.

Biotto Filho, D. (2008). *O desenvolvimento da matemacia no trabalho com projetos*. (Dissertação de Mestrado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, Brasil.

Biotto Filho, D., Faustino, A. C., & Moura, A. Q. (2017). Cenários para investigação, imaginação e ação. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, *6*(12), 64-80.

Faustino, A. C., Passos, C. L. B. (2013). Cenários para investigação e resolução de problemas: reflexões para possíveis caminhos. *Revista Educação e Linguagens*, *2*(3), 62-74.

Guimarães, D. R. (2022). *Educação matemática crítica permeando capítulos de geometria em livros didáticos: entre direcionamentos, contextos e enunciados*. (Dissertação de Mestrado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, Brasil.

Guimarães, D. R. & Litoldo, B. F. (2022). Livros didáticos analisados à luz da educação matemática crítica: contribuições a partir dos Encontros Nacionais de Educação Matemática. In *Anais do 1º Colóquio de Livros Didáticos de Matemática* (p. 138-156). Rio Claro, SP: Unesp.

Iezzi, G., Dolce, E., Degenszajn, D., Périgo, R., & Almeida, N. (2016). *Matemática: ciência e aplicações.* (9ª ed., v. 2). São Paulo: Saraiva.

Kistemann Jr, M. A., Giordano, C. C., & Souza, F. S. (2023). Pensamento financeiro e letramento estatístico: teorizações iniciais, desafios e possibilidades. *Tangram*, *6*(1), 162-184.

Marcone, R., & Milani, R. (2020). Educação matemática crítica: um diálogo entre sua gênese nos anos 1970 e suas discussões em 2017 no Brasil. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, *9*(20), 261-278.

Milani, R., Civiero, P. A. G., Soares, D. A., & Lima, A. S. de. (2017). O diálogo nos ambientes de aprendizagem nas aulas de matemática. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, *6*(12), 221-245.

Penteado, M. G., & Skovsmose, O. (Eds.). (2022). *Landscapes of investigation: contributions to critical mathematics education*. Cambridge, UK: Open Book Publishers.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. (J. C. Barbosa, Trad.). *Boletim de Educação Matemática*, *13*(14), 1-24.

Skovsmose, O. (2022). Entering landscapes of investigation. In M. G. Penteado, & O. Skovsmose (Eds.), *Landscapes of investigation: contributions to critical mathematics education*. (pp. 1-20). Cambridge, UK: Open Book Publishers.

Souza, K. A. F., & Albrecht, E. (2024). As TDIC e o Ensino de Matemática: um mapeamento sistemático sobre sua relação com a EMC e a ECTS no Ensino Básico nos últimos dez anos. *Tangram*, *7*(1), 22-41.