Tangram
Revista de Educação Matemática

DOI: 10.30612/tangram.v8i1.19269

Introdução ao Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta de Sequência Didática e Suas Contribuições

Introduction to Calculus in High School: A Didactic Sequence Proposal and Its Contributions

Introducción al Cálculo en la Enseñanza Media: Una Propuesta de Secuencia Didáctica y Sus Contribuciones

Lucas de Oliveira
Programa de Pós-Graduação em Educação
Universidade de Passo Fundo – UPF – Passo Fundo, Rio Grande do Sul, Brasil
E-mail: 210707@upf.br
Orcid: https://orcid.org/0000-0003-3864-0997

Jeremias Stein Rodriguês
Departamento de Acadêmico de Linguagem, Tecnologia, Educação e Ciência - Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Santa Catarina – IFSC – Florianópolis, Santa Catarina, Brasil
E-mail: jeremias.stein@ifsc.edu.br
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-7869-5856

Resumo: Altos índices de reprovação em Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior indicam lacunas na formação matemática, decorrentes de metodologias ineficazes na educação básica. Este estudo propõe a inserção de noções introdutórias de Cálculo no ensino médio, visando analisar as potencialidades pedagógicas de uma sequência didática que conecte o currículo aos conceitos fundamentais. A metodologia qualitativa, bibliográfica e documental~~,~~ envolveu levantamento teórico, elaboração de uma sequência didática e análise de seu potencial. Os resultados sugerem que a abordagem precoce de conceitos como o método da exaustão, contextualizado historicamente e com apoio do GeoGebra, expanda o raciocínio lógico algébrico dos alunos, promovendo compreensão intuitiva do cálculo por aproximação e clareza nas aplicações de áreas. Conclui-se que essa abordagem contribui para superar dificuldades no ensino superior e desenvolver um raciocínio matemático mais estruturado.

Palavras-chave: Potencialidades. Cálculo Diferencial e Integral. Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Abstract: High failure rates in Differential and Integral Calculus in higher education indicate gaps in mathematical foundation, resulting from ineffective methodologies in basic education. This study proposes the introduction of introductory notions of Calculus in high school, aiming to analyze the pedagogical potential of a didactic sequence that connects the curriculum to fundamental concepts. The qualitative, bibliographic, and documentary methodology involved theoretical research, development of a didactic sequence, and analysis of its potential. The results suggest that the early approach of concepts such as the method of exhaustion, historically contextualized and supported by GeoGebra, expands students' logical-algebraic reasoning, promoting an intuitive understanding of calculus by approximation and clarity in area applications. It is concluded that this approach contributes to overcoming difficulties in higher education and developing a more structured mathematical reasoning.

Keywords: Potentiality. Calculus. Teaching and Learning Mathematics.

Resumen: Altos índices de reprobación en Cálculo Diferencial e Integral en la educación superior indican lagunas en la formación matemática, derivadas de metodologías ineficaces en la educación básica. Este estudio propone la inserción de nociones introductorias de Cálculo en la escuela secundaria, buscando analizar las potencialidades pedagógicas de una secuencia didáctica que conecte el currículo con los conceptos fundamentales. La metodología cualitativa, bibliográfica y documental, implicó revisión teórica, elaboración de una secuencia didáctica y análisis de su potencial. Los resultados sugieren que un enfoque temprano de conceptos como el método de la exhaustión, contextualizado históricamente y con apoyo de GeoGebra, expande el razonamiento lógico-algebraico de los estudiantes, promoviendo una comprensión intuitiva del cálculo por aproximación y claridad en las aplicaciones de áreas. Se concluye que este enfoque contribuye a superar dificultades en la educación superior y a desarrollar un razonamiento matemático más estructurado.

Palabras clave: Potencialidades. Cálculo. Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas.

Recebido em 18/06/2025
Aceito em 22/09/2025

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

É pouco comum discutir, mesmo que de forma superficial, conteúdos avançados de Matemática com alunos do ensino médio, ignorando as potencialidades que a abordagem de noções de Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, poderiam trazer. Desta forma, ao ingressar em cursos das áreas de exatas e engenharias no ensino superior, muitos estudantes chegam desprovidos de preparo, e encontram-se com uma das disciplinas mais temidas, o Cálculo Diferencial e Integral. Nela, uma cultura de naturalidade ao fracasso é o reflexo de uma rotina de reprovação, banalizando os altos índices de reprovação existentes (Godoy e Faria, 2012).

O principal foco da disciplina é o estudo de limites, derivadas e integrais de funções reais. Em muitos cursos superiores, como nos de Ciência da Computação e nas chamadas engenharias 'duras' (elétrica, civil e mecânica), a aplicação desses conhecimentos tende a ser repetitiva e mecânica. Conforme apontam Escola e Ducatti (2012), o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, nesses contextos, frequentemente mantém a ênfase em exercícios repetitivos, mesmo após diversas modificações na abordagem pedagógica. Essa prática desconsidera a possibilidade de desenvolvimento do pensamento crítico e do próprio raciocínio lógico matemático, bem como ignora aplicações nas áreas finais dos cursos. Desse modo, poder-se-ia questionar se tais abordagens, focadas em uma perspectiva tecnicista, podem estar atreladas, ou não, aos altos índices de reprovação. Dessa forma:

> Deve-se questionar se esse esforço [enfoque constante na repetição para mera memorização] tem utilidade para simplesmente adestrar o aluno em operações mecânicas. Um aluno que pergunta, “qual é a fórmula?”, provavelmente aprendeu muito pouco. A questão é que é mais fácil aplicar fórmulas do que raciocinar. O mesmo aluno que exige aplicações nas matérias básicas entra em desespero quando elas são cobradas na prova. O que é compreensível, já que ainda não tem conhecimento necessário. Assim, sem querer eliminar todo o aprendizado operacional, deve-se levantar a questão da introdução do ensino conceitual no Cálculo (Soares de Mello e Soares de Mello, 2007, p. 3-4).

Destarte, questões tais “como se deu o desenvolvimento do Cálculo ao longo da história” podem ser levantadas em diversos momentos por parte dos discentes, na tentativa de justificar tal complexidade pelo grau de abstração envolvido e pela limitada familiaridade dos estudantes com essa abordagem inovadora no ensino da Matemática (Silva, 2009). Nesse contexto, os nomes de Newton e Leibniz, assim como suas contribuições para o desenvolvimento da disciplina, são eventualmente mencionados no processo de ensino. Contudo, a exploração aprofundada das razões e motivações que impulsionaram esses renomados cientistas, por meio da utilização da História da Matemática, frequentemente passa despercebida, conforme aponta Silva (2009).

Assim, poder-se-ia questionar: Quais as contribuições do ensino de noções introdutórias de Cálculo Diferencial e Integral trariam para estudantes do ensino médio? Ao buscar respostas a essa questão, destaca-se a relevância do formalismo presente na estrutura das diversas técnicas empregadas na resolução de problemas matemáticos. Entre estas, incluem-se, por exemplo, a manipulação algébrica rigorosa de expressões; a aplicação de propriedades de limites para analisar o comportamento de funções; a interpretação geométrica de derivadas para taxas de variação e otimização; e, a utilização de métodos de integração para cálculo de áreas e volumes. Tais técnicas, quando abordadas com o devido rigor, promovem o desenvolvimento de um raciocínio mais estruturado e a compreensão aprofundada dos conceitos.

A inserção de noções de Cálculo Diferencial e Integral, especialmente sob uma perspectiva histórica, permite abordar e compreender o desenvolvimento desta área do conhecimento, bem como as contribuições de cientistas ao longo da história das ciências. Torna-se, assim, imprescindível buscar evidências que demonstrem sua construção, enquanto resultado de um construto social próprio da época, articulado à colaboração de diversos cientistas, pouco mencionados. Diante disso, é pertinente enfatizar, durante o ensino do Cálculo Diferencial e Integral, seja no ensino superior ou médio, os fatores históricos e sociais que culminaram na disputa entre Newton e Leibniz em relação à origem desta disciplina.

Além disso, segundo Santos (2009), discutir as potencialidades do Cálculo Diferencial e Integral vai além do curso em que a disciplina estará sendo oferecida. Para o autor, o que realmente importa é se existe uma forma de torná-la mais próxima da realidade do educando e da sua futura profissão.

Por outro lado, nos cursos de bacharelado em engenharia, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, em uma variável, apresenta uma alta taxa de reprovação. Pesquisas, as mais recentes, apontam que os altos níveis de reprovação na disciplina podem indicar uma formação deficiente dos egressos em relação ao seu ensino médio (Lourenço, Hostetler e Edwards, 1998; Staron, 2016). Isso pode estar acontecendo devido à ausência de metodologias de ensino mais eficazes na educação básica, que promovam a capacidade de reflexão dos alunos e lhes permitam construir suas próprias conclusões a partir de situações-problema apresentadas.

Diante dessa realidade, uma formação puramente tecnicista pode ser uma das principais responsáveis por essa situação, em diversas ocasiões. Conforme aponta Rezende (2003), ao focar excessivamente no "como fazer" em detrimento do "o porquê" (o conhecimento conceitual), o modelo tecnicista não desenvolve a capacidade de abstração, de raciocínio lógico dedutivo e de reflexão crítica, necessários para a Matemática Superior. O conhecimento conceitual, fundamental no Cálculo Diferencial e Integral, envolve a compreensão do significado e a conexão entre diferentes ideias (limites, taxas de variação), permitindo ao aluno modelar situações-problema e decidir qual ferramenta matemática é a mais adequada para a resolução. Com isso, o estudante, treinado apenas em algoritmos, demonstra deficiência crítica ao tentar modelar problemas complexos ou aplicar a estrutura conceitual do Cálculo em situações não rotineiras, uma competência inegociável na formação de profissionais da área de Exatas.

Em vista disso, muitas universidades optam por oferecer a disciplina de Pré-Cálculo e/ou uma introdução aos conceitos de Cálculo de uma forma aberta ao público em geral. A Universidade Federal de Santa Catarina, por intermédio do PROEX[1], tem

[1]Pró-Reitoria de Extensão da UFSC, preparação ao exame de proficiência em Pré-Cálculo

sido idealizadora de diversas formações gratuitas, deste tipo de atividade em formato presencial e a distância.

Com essa inserção, busca-se nivelar os discentes para que estejam aptos a seguir no curso com um grau de aproveitamento maior. No entanto, por que não inserir tal tópico no ensino médio? Nesse sentido, alguns pesquisadores sugerem o ensino do Cálculo já nessa formação. Machado (2015) afirma que o melhor jeito de corrigir problemas no aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral é justamente no ensino médio, onde o estudante irá conhecer as ideias mais relevantes da disciplina por meio de funções simples, tais como as polinomiais.

Assim, a respectiva pesquisa busca enfatizar as potencialidades de uma sequência didática com vistas a uma breve introdução ao estudo de tópicos de Cálculo, em sucinta contextualização histórica, em turmas do ensino médio. Nesse sentido, analisam-se as potencialidades que a abordagem de noções de Cálculo Diferencial e Integral poderiam trazer para estudantes do ensino médio, a partir de considerações e reflexões acerca de alguns exemplos de uma sequência didática.

Dessa forma, o foco desta pesquisa estará centrado em fazer uma análise acerca das potencialidades da inserção de tópicos de Cálculo Diferencial e Integral, tais como a ideia intuitiva de limites, derivada e integral, na formação dos estudantes do ensino médio, evidenciando assim, como essa abordagem poderia contribuir no desenvolvimento discente. Esta perspectiva surge como possibilidade para, quem sabe, superar algumas das dificuldades encontradas ao longo da formação escolar, além de possibilitar o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático.

O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO E SUAS POTENCIALIDADES

A Lei de Diretrizes e Bases - LDB (Brasil, 1996) em seu artigo 22 diz: “A educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhes meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores”. Assim, pode-se entender que é direito do aluno e dever da escola oferecer meios de estimular um estudo mais profundo para sua

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.08, e025045. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

evolução acadêmica. Desta forma, ao falar sobre a inclusão de conceitos de Cálculo, ao longo do ensino médio, é preciso deixar claro que, pesquisadores, como Duclos (1992), defendem o ensino do Cálculo Diferencial e Integral ao longo deste período de formação, desde que o mesmo seja introduzido de maneira a contribuir e não prejudicar, ou seja, de uma forma conveniente e bem estruturada.

Rocha (2018) deixa claro que reestruturar a grade curricular já existente seria factível, possibilitando, quem sabe, falar sobre os principais temas característicos do Cálculo Diferencial e Integral nas disciplinas já trabalhadas ao longo do cotidiano escolar. Essa concepção busca ampliar o desenvolvimento de novas aptidões, fazendo com que o discente se familiarize com novos símbolos e conceitos.

> A proposta não é antecipar o modo com que o Cálculo é ensinado nas universidades, pois não resolveria o problema, uma vez que, conforme apresentado, as dificuldades com o cálculo estão relacionadas à falta de conhecimento dos seus conhecimentos básicos. O professor da disciplina de cálculo 1 possui a difícil tarefa de ensinar o conteúdo com todo o seu formalismo e demonstrações e, ao mesmo tempo, falar sobre ideias básicas que compõem a disciplina. O intuito é antecipar os conceitos básicos e despertar no aluno as ideias fundamentais de forma fácil e sem repetição de fórmulas prontas, para que ele saiba usá-las em problemas do cotidiano (Rocha, 2018, p. 28).

De uma forma mais geral, a Base Nacional Comum Curricular indica que “novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar e que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos” (Brasil, 2018, p. 529). Desse modo, seria exequível inserir as ideias principais de limites, ao abordar temas que envolvem o estudo de sequências ou, de uma forma mais específica, ao se trabalhar com a soma dos termos de uma Progressão Geométrica do tipo infinita, por exemplo. Nestes cenários várias possibilidades surgem, como discutir os conceitos elementares de limites, sem todo o rigor matemático que o Cálculo Diferencial e Integral exige.

Para Machado (2015), o professor poderia começar com uma ideia simples, como desenvolver conceitos de integrais e derivadas, levando em conta somente o tratamento de funções do 1º grau, apenas com as ideias mais relevantes. Além disso, poder-se-ia tratar essa temática nos anos finais do atual ensino médio, fazendo

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.08, e025045. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

contrapontos em relação ao seu estudo em geometria, na busca de áreas de figuras fundamentais ou, também, contextualizar o conceito de derivada como taxa de variação instantânea no estudo de funções aplicadas de forma interdisciplinar na física. Tais possibilidades estão em consonância com a competência número 3, da BNCC, quando diz que é necessário:

> Utilizar estratégias e conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2018, p. 531).

Rocha (2018) reitera que, desta forma, é fácil observar que a inserção de tais tópicos ao longo do ensino médio é apenas uma questão de organização e otimização dos atuais programas de ensino e de um olhar sob novas perspectivas do professor em relação àquilo que é ensinado no Ensino Médio. Assim, deve-se ter uma proposta de ensino diferenciada, que possa ser inserida de forma gradual no currículo, a fim de possibilitar com que o discente seja apresentado a esses conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral. No entanto, é necessário articular esta inserção com uma metodologia compatível, possibilitando o avanço dos estudos e do interesse do educando para com a disciplina, nessa perspectiva a competência número 5, da BNCC, estabelece ser imprescindível:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 541).

O que se está propondo, nesta pesquisa, é a discussão simples, no entanto, importante, da inserção de ideias intuitivas de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio, sob uma ótica mais introdutória e apropriada para esse nível escolar, ou seja, tratar de uma forma menos formal as concepções geradoras dessa temática.

METODOLOGIA

A metodologia adotada para a realização deste trabalho é de natureza qualitativa, fundamentada em procedimentos de pesquisa bibliográfica e documental. O percurso metodológico foi estruturado em etapas interdependentes, visando atender ao objetivo de desenvolver e analisar o potencial de uma sequência didática voltada ao ensino de noções introdutórias de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio.

A fase inicial da pesquisa consistiu em uma revisão de literatura, que explorou os referenciais teóricos sobre sequências didáticas. Notadamente, a partir das contribuições de Zabala (1998), bem como o panorama do ensino de Cálculo Diferencial e Integral na educação básica, com base em artigos e documentos oficiais. Superada essa etapa de fundamentação, procedeu-se à elaboração da sequência didática, um processo criativo e técnico, no qual as atividades foram desenhadas para garantir alinhamento curricular, progressão conceitual e contextualização com a realidade dos alunos.

A etapa final, por sua vez, foi dedicada à análise documental da proposta. Nesta fase, a sequência didática foi examinada como objeto de estudo, e seu potencial pedagógico foi avaliado a partir de critérios predefinidos, como a capacidade de estimular o raciocínio lógico matemático, o diálogo com os saberes prévios dos estudantes e a adaptabilidade para diferentes contextos de sala de aula. Portanto, a metodologia trilhada permitiu não apenas a construção de um recurso pedagógico, mas também, uma análise aprofundada de suas potencialidades, em conformidade com os objetivos deste artigo.

MÉTODO DA EXAUSTÃO

O método da exaustão, amplamente utilizado na matemática, permite calcular áreas e volumes com precisão crescente. Por meio da divisão de figuras em partes menores, ele proporciona uma compreensão mais profunda dos conceitos geométricos.

O desenvolvimento de estratégias para o cálculo de áreas de figuras não poligonais remonta à Grécia Antiga, segundo Boyer (2012), embora os gregos já dominassem o cálculo de áreas de polígonos por meio da subdivisão em triângulos, eles enfrentavam dificuldades com figuras que continham contornos curvos. A solução para este problema começou a ser delineada por Eudoxo, a quem se atribui a criação do método da exaustão. Eves (2004) descreve que a lógica do método, por vezes chamado de Axioma de Arquimedes, consistia em inscrever e circunscrever polígonos regulares em uma figura curva, como a circunferência. A ideia, conforme apontam ambos os historiadores, era construir uma sequência de polígonos cujas áreas, tanto por falta quanto por excesso, se aproximam progressivamente da área exata da figura, reduzindo o espaço entre o polígono e a curva (Boyer, 2012; Eves, 2004).

A construção pode ser evidenciada através do *software* Geogebra, seguindo cinco passos[2] para elaborar a atividade. O GeoGebra é uma ferramenta poderosa para a demonstração do método da exaustão, pois permite visualizar e interagir com conceitos geométricos de forma dinâmica. Ao dividir uma figura em partes menores, os alunos conseguem observar como as áreas se aproximam do valor real à medida que aumentam as subdivisões. Utilizando o *software* GeoGebra, o professor então determina uma circunferência de raio 1 e inscrita nela, um polígono com a quantidade de lados determinada por um controle deslizante. Assim, ao aumentar o valor do controle deslizante, o número de lados no polígono inscrito aumentará. Com essa construção simples, espera-se que o educando consiga compreender que, ao variar o valor de n, do controle deslizante, o número de lados do polígono inscrito no círculo irá aumentar e sua área vai se aproximar da área real do círculo.

Essa abordagem visual, demonstrada na Figura 1, facilita a compreensão do conceito de limite, essencial para o método da exaustão. Além disso, o *software* possibilita simulações e experimentações que tornam o aprendizado mais envolvente,

---

[2] 1º Passo: No campo de entrada, inserir o comando curva(cos(t), sen(t), t, 0, 2*pi);
2º Passo: Na parte superior, clicar em controle deslizante (que nomeamos “n”), logo após clicar em qualquer parte da tela, selecionar inteiro, valor mínimo 3 e valor máximo 100, incremento 1;
3º Passo: No campo de entrada, digitar sequência(a(2*pi*j/n), j, 1, n);
4º Passo: No campo de entrada, digitar Polígono(l1), sendo I1 a sequência do passo anterior;
5º Passo: Variar o controle deslizante e analisar os valores de pi na janela esquerda.

ajudando os estudantes a internalizar os princípios fundamentais da matemática de maneira intuitiva.

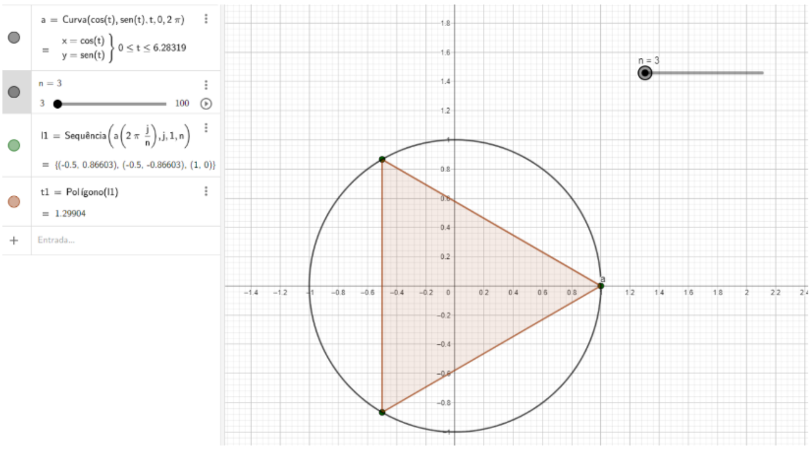

Figura 1. Método da Exaustão..

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2024.

Ao aumentar o valor de n, estabelece-se um polígono que está cada vez mais próximo da forma da circunferência. A Figura 02 mostra que o polígono de n = 100 lados tem área de 3,13953. Como o círculo de raio 1 tem área dada por $\pi r^2 = \pi$, tem-se que a área do polígono está se aproximando da área do círculo.

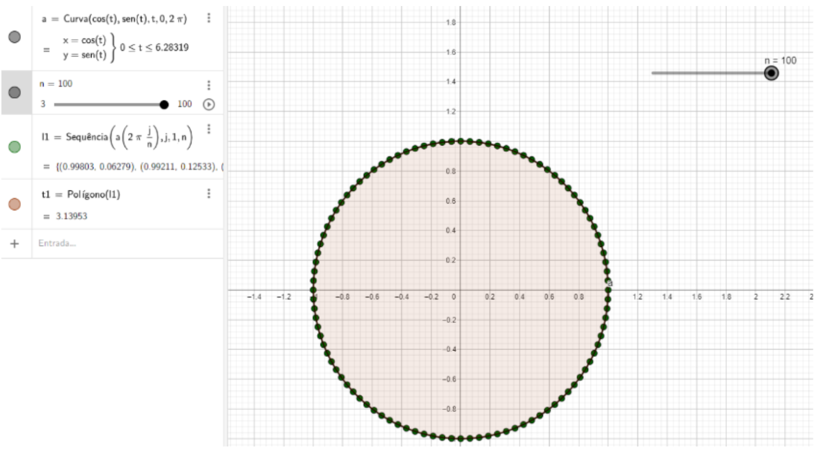

Figura 2. Método da Exaustão-Polígono de 100 lados.

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2024.

Além de promover o uso e apresentar as aplicações do GeoGebra, a execução desta atividade dialoga com a habilidade “Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais" apresentada na BNCC (Brasil, 2018, p. 536).

É importante ressaltar que tais atividades não buscam determinar conceitos fundamentais do Cálculo de modo formalizado, mas sim, possibilitar ao aluno compreender um raciocínio que vai além daquele realizado normalmente na sala de aula. Contudo, pode-se mostrar aos alunos que conforme se aumenta~~mos~~ o número de lados do polígono inscrito (ou circunscrito), mais próximo se está da área real do círculo.

Além disso, o professor poderia discutir com os alunos o conceito de infinito, mostrando que este não é um número, e apresentar situações em que tal perspectiva é aplicada. A partir disso, também seria possível discutir a aproximação, o fato de que as áreas dos polígonos se aproximam da área do círculo através do método da exaustão, ou seja, que a área do círculo seria o limite da área do polígono quando o número de lados tende ao infinito.

COORDENADAS DO VÉRTICE DE UMA PARÁBOLA

O estudo das propriedades das curvas é um dos pilares da história da matemática. A investigação das seções cônicas, por exemplo, remonta à Antiguidade, com matemáticos gregos como Apolônio de Perga, que em sua obra Cônicas já explorava detalhadamente as características de figuras como a parábola (Boyer, 2012). Séculos mais tarde, no século XVII, a conexão entre geometria e álgebra foi formalizada. Eves (2004) destaca o papel de René Descartes, que, com a criação da geometria analítica, permitiu que as propriedades geométricas das parábolas, como a localização de seu vértice, fossem expressas por meio de equações quadráticas.

Esse interesse histórico não se limitou às cônicas. Conforme aponta Boyer (2012), o século XVII foi particularmente fértil no estudo de novas curvas, como a catenária (e não a velária, que é a forma que um tecido assume), a cicloide e a braquistócrona. A busca por soluções para problemas associados a essas curvas como a determinação de pontos de máximo e mínimo, o cálculo de tangentes e a otimização de trajetórias (como no problema da braquistócrona) foi um dos principais fatores que motivaram o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral por Newton e Leibniz (Eves, 2004; Boyer, 2012). O estudo de pontos de máximo e mínimo de uma parábola é um conteúdo previsto para o ensino médio. Conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), espera-se que os alunos desenvolvam a habilidade de "analisar gráficos de funções [...] para identificar e interpretar os pontos de máximo e de mínimo" (Brasil, 2018, p. 535), o que, no caso da função quadrática, corresponde à determinação das coordenadas do vértice da parábola.

Assim, neste momento, busca-se caracterizar a expressão que determina os vértices de uma dada curva, tendo em vista que a mesma é constantemente estudada ao longo do ensino médio. Para tal demonstração, seria necessário usar artifícios do Cálculo, com algumas demonstrações fundamentais, possibilitando que, dessa forma, o educando consiga associar um conceito do Cálculo e sua aplicabilidade em situações previamente já estudadas.

A seguir, o método de completar quadrados é utilizado para determinar a fórmula das coordenadas do vértice de uma parábola. Usualmente, essas coordenadas são apresentadas para os alunos da seguinte forma:

$$X_V = \frac{-b}{2a} \; e \; Y_V = \frac{-\Delta}{4a} \tag{1}$$

Para tal demonstração, considera-se primeiramente uma função do segundo grau genérica, expressa por

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{2}$$

Dada a função do segundo grau, o professor pode realizar um exercício de completar quadrados para estabelecer a seguinte expressão

$$ax^2 + bx + c = a(x + b/2a)^2 - b^2/4a + c \tag{3}$$

Como a única parte variável é aquela entre parênteses, tem-se que, se "a" for positivo, o menor valor obtido pela função se dará quando essa parcela for nula, pois ele não adiciona nada ao resto da expressão. De modo semelhante, se "a" for negativo, o maior valor obtido pela função se dará quando essa soma for nula, pois

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.08, e025045. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

ele não vai subtrair nenhum valor do resto da expressão; com isso, o vértice irá ocorrer quando

$x + b/2a = 0 \;\rightarrow\; x = -b/2a$	(4)

Quando esse valor for aplicado na função, obtém-se a coordenada Y_V que será dada por:

$f(-b/2a) = a(-b/2a + b/2a)^2 - b^2/4a + c = -(b^2 - 4ac)/4a$	(5)

Nessas etapas é possível observar o uso da manipulação algébrica, o trabalho com o uso de produtos notáveis, relação dos pontos de uma função e análise do gráfico de uma parábola. Com isso, o professor consegue estabelecer como são determinadas as fórmulas que, de outro modo, seriam apenas apresentadas aos alunos.

Tal perspectiva permite, mesmo que superficialmente, que as fórmulas utilizadas surgem da aplicação do conhecimento já estabelecido, seja ele mais avançado ou não. Além disso, a atividade permite que o professor aborde as habilidades EM13MAT503[3] (Brasil, 2018, p. 541) e EF09MA09[4] (Brasil, 2018, p. 317), através da manipulação algébrica e do desenvolvimento do raciocínio lógico matemático.

Uma outra maneira de evidenciar as origens de tal fórmula, seria utilizar o conceito de cálculo, mais especificamente o conceito de derivada. Vale salientar que tal conceito deve ser tratado, com o aluno do ensino médio, no menor grau de formalidade possível, apenas fazê-lo compreender a essência do conceito. Assim, uma possibilidade de tratar o conceito de derivada seria: é uma forma de medir como algo muda em relação a outra coisa. Pode-se pensar nela como a velocidade de um carro em que ela diz o quão rápido o carro está se movendo em um determinado instante, ou seja em outras palavras, “é a taxa de variação de uma quantidade em um ponto específico”.

[3] Investigar pontos de máximo e mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, matemática financeira ou cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
[4] Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Primeiramente, é preciso definir de maneira informal o que é a derivada, a mesma pode ser descrita como uma taxa média de variação e seu respectivo comportamento está associado a uma reta tangente. Mais especificamente, tem-se que a derivada está vinculada com a inclinação da reta tangente, sendo positiva quando a reta é crescente, negativa quando é decrescente e, nula quando a reta é constante.

Além disso, utilizar-se-á do conceito da derivada de um polinômio, por intermédio da chamada "regra do tombo", em que o valor do expoente desce multiplicando e o seu expoente original diminui em uma unidade. Desta forma ao se derivar a função do segundo grau, obtém-se

$$f'(x) = 2ax + b \tag{6}$$

Observa-se que os termos a, b e c são números constantes, assim, bastou aplicar a regra da derivação de um polinômio. A determinação da coordenada X_V pode ser feita elegantemente com o uso do Cálculo Diferencial e Integral ao derivar a função polinomial de segundo grau, obtém-se uma nova função que representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico em qualquer ponto. O significado geométrico deste procedimento é fundamental: o vértice, por ser o ponto máximo ou mínimo da parábola, é o único local onde a reta tangente à curva é perfeitamente horizontal. Uma reta horizontal possui, por definição, um coeficiente angular nulo, portanto, para localizar a abscissa do vértice, impõe-se a condição de que o valor da derivada seja igual a zero. Ao resolver a equação resultante desta condição, chega-se diretamente à conhecida fórmula para a coordenada X_V, é crucial notar que essa condição de derivada nula é uma característica exclusiva do vértice, em qualquer outro ponto da parábola, a derivada terá um valor não nulo, indicando uma tangente inclinada.

$$2ax + b = 0 \Rightarrow X_V = \frac{-b}{2a} \tag{7}$$

Uma vez determinada a abscissa do vértice X_V, sua respectiva ordenada Y_V é obtida simplesmente ao substituir esse valor na função polinomial do segundo grau original, cujo resultado corresponde diretamente à coordenada para chegar ao Y_V , com um pouco de manipulação algébrica encontra-se:

$$Y_V = \frac{-b^2+4ac}{4a} \Rightarrow Y_V = -\frac{b^2-4ac}{4a} \Rightarrow Y_V = \frac{-\Delta}{4a} \tag{8}$$

Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados - MS, V.08, e025045. Universidade Federal da Grande Dourados, e-ISSN: 2595-0967

Com este tipo de atividade se pode perceber a potencialidade na apresentação de conceitos mais avançados, mesmo que de modo superficial, justificando assim, sem perder o seu rigor, tal comportamento atrelado às retas tangentes de uma dada função. Espera-se que, desta forma, o professor consiga demonstrar a origem de uma fórmula muito usada ao longo do ensino médio, expondo sua estrutura. Essa abordagem permitirá que o aluno compreenda, mesmo superficialmente, que a fórmula pode surgir da aplicação de conhecimentos avançados da matemática, não sendo apenas uma fórmula apresentada, muitas vezes, sem contextualização. Para além do que foi dito, ao desenvolver tal atividade com as suas respectivas passagens algébricas, o aluno poderá ampliar seus conhecimentos e, quem sabe, os seus saberes no que diz respeito ao seu desenvolvimento lógico matemático, possibilitando o desenvolvimento da habilidade EM13MAT503, estabelecida na competência número cinco, da BNCC.

A abordagem geométrica da derivada, mesmo de forma introdutória, permite aos discentes transcender o campo da matemática e aplicar o conceito de ponto de máximo ou mínimo em outras áreas do conhecimento. A escolha da Física e da Economia como campos de aplicação é particularmente relevante, pois ambos apresentam fenômenos frequentemente modelados por funções quadráticas no ensino médio.

Na Física, por exemplo, ao estudar o lançamento de projéteis, a trajetória do objeto descreve uma parábola cujo vértice representa a altura máxima atingida. Na Economia, a função do lucro de uma empresa pode ser modelada por uma parábola, onde o vértice indica o preço de venda que maximiza os ganhos.

A intenção não é aprofundar as definições formais do Cálculo, mas sim, utilizar sua lógica fundamental, a busca por pontos onde a taxa de variação é nula, como uma ponte. Isso conecta o conhecimento curricular do ensino médio (função quadrática) a uma poderosa ferramenta de otimização, ilustrando a relevância e a aplicabilidade do pensamento matemático.

Considerações Finais

Para além daquilo que foi discutido neste texto, percebem-se as potencialidades que os exemplos trazidos, na forma de sequência didática, podem agregar no respectivo processo de ensino e aprendizagem. Algumas vezes, a falta de contextualização faz com que o discente não consiga compreender algumas passagens algébricas e ou, até mesmo, a origem de uma dada fórmula usada em seu dia a dia.

Assim, uma breve apresentação de noções do Cálculo no âmbito do ensino básico poderia ser viável, desde que as devidas ponderações e ajustes necessários fossem feitos em relação àquilo que se pretende ensinar. Tomando como base uma abordagem menos formal, tal perspectiva também poderia buscar fazer conexões históricas, justificando assim as suas passagens e limitações do período em que foi desenvolvida.

Os exemplos da sequência didática foram pensados de uma forma ampla, de modo que existem muitos outros, e que ficaria a critério do professor aplicá-la no respectivo nível de ensino que está lecionando. Além disso, vale salientar, que o objetivo da sequência apresentada é de evidenciar algumas ferramentas do Cálculo que podem ser utilizadas em momentos específicos do currículo já existente da educação básica. Nela, o grau de abstração e o formalismo não são os mesmos do ensino superior, sendo necessárias adaptações e considerações extras que podem ser feitas pelo professor.

Assim, com tais aplicações é possível discutir questões como a noção de infinito ao longo do ensino médio, seja a partir do método da exaustão ao determinar aproximações da área de um círculo, ou quem sabe, exceder além de exemplos trazidos na presente discussão, como a soma de uma progressão geométrica infinita. Já no decorrer da segunda atividade, foi possível evidenciar a potencialidade do uso de manipulações algébricas, utilizando-se em um primeiro momento, do método de completar quadrados e, em um segundo momento, usando um dos conceitos fundamentais do cálculo, o conceito informal de derivada. A partir disso~~,~~ enfatizou-se a aproximação entre aquilo que foi discutido com alguns dos pressupostos trazidos pela BNCC, como, por exemplo, a habilidade EF09MA09, ao fazer o uso de técnicas de fatoração de expressões algébricas, relacionando-as com produtos notáveis, justificando a origem de fórmulas muito usadas no ensino médio, indo além daquilo que é ensinado regularmente.

A conclusão deste estudo aponta para a possibilidade de trabalhos futuros, centrados na aplicação prática das sequências didáticas propostas. Um desdobramento relevante seria a implementação em sala de aula, seguida da coleta de dados e da análise das implicações pedagógicas. Essa investigação permitiria validar empiricamente as contribuições da abordagem para o processo de ensino e aprendizagem na formação dos estudantes.

REFERÊNCIAS

BRASIL. (1996). **Lei de Diretrizes e Bases** - Lei 9394/96, de 20 de dezembro de 1996, p. 20.

BRASIL. (2018). Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**.

BOYER, C. B., & MERZBACH, U. C. (2012). **História da Matemática**. Blucher.

DUCLOS, R. C. (1992). Cálculo do 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, 20, 26-30.

ESCOLA, J. P. L., & DUCATTI, J. A. (2012). Software didático para ensino de Cálculo nas séries iniciais dos cursos superiores de Engenharia e Ciência da Computação. In **Anais do VII WORKSHOP** Pós-Graduação e Pesquisa do Centro Paula Souza.

EVES, H. (2004). Introdução à história da matemática. **Unicamp**.

GODOY, L. & FARIA, W. (2012). **O Cálculo diferencial e integral e suas aplicações no ensino da engenharia**: Uma análise de Currículo. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO INATEL (pp. 125-132).

LOURENÇO, R. E., HOSTETLER, R. P., & EDWARDS, B. H. (1998). **Cálculo com aplicações.** 4. ed. LTC.

MACHADO, N. J. (2015). **Cálculo no ensino médio**: já passou da hora. São Paulo: Blog Imaginário Puro. Disponível em: https://imaginariopuro.wordpress.com/2015/10/28/calculo-no-ensino-medio-ja-passou-da-hora/. Acesso em: 06 de Dezembro de 2023

ROCHA, J. S. de M. (2018). **O ensino de cálculo no ensino médio**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT), Departamento de Matemática e Estatística, universidade Federal de São João Del Rei, São João Del Rei, 2018.

REZENDE, W. M. (2003). **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

SANTOS, J. V. de L. (2009). **Formação básica em engenharia**: a articulação das disciplinas pelo cálculo diferencial e integral. 202 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SILVA, I. L. do N. (2009). **Equalizações diferenciais: aspectos históricos, teoria e aplicações em física**. 36 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba.

SOARES DE MELLO, M. H. C., & SOARES DE MELLO, J. C. C. B. (2007). **Reflexões sobre o ensino de Cálculo**. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (pp. 1-4).

STARON, F. (2016). O monstro da reprovação em cálculo diferencial e integral. In: **CONEX** (pp. 1-7).

Zabala, A. (1998). A Prática Educativa: Como educar. **Artmed.**