Tangram
Revista de Educação Matemática

DOI: 10.30612/tangram.v9i1.19232

# O Conhecimento Especializado do Professor de Matemática no contexto da Divisão de Frações em uma Tarefa para a Formação

*The Specialized Knowledge of the Mathematics Teacher in the context of Fraction Division in a Task for Teacher Education*

*El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas en el contexto de la División de Fracciones en una Tarea de Formación*

**Gabriela Gibim**
Pecim/ Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Campinas- São Paulo, Brasil
E-mail:gabi.gibim@gmail.com.br
Orcid: https://org/0000-0002-7588-3579

**Laura Rifo**
Pecim/ Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Campinas- São Paulo, Brasil
E-mail: laurarifo@unicamp.br
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-1579-8073

**Nuria Climent**
Universidade de Huelva
Huelva, Espanha
E-mail: climent@ddcc.uhu.es
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-0064-1452

**Miguel Ribeiro**
Pecim/ Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Campinas- São Paulo, Brasil

Tangram
Revista de Educação Matemática

Universidade Federal da Grande Dourados
E-mail: cmribas78@gmail.com
Orcid: https://orcid.org/0000-0003-3505-4431

**Resumo:** Este estudo centra-se no conhecimento revelado por professores de matemática num curso de formação sobre frações. Os professores resolveram uma tarefa focando estimativa, dificuldades dos alunos e recursos no contexto da divisão de frações. Os resultados sugerem que os professores enfrentam alguns desafios, como: estimar o resultado de divisão de frações e elencar possíveis dificuldades conceituais dos alunos, conhecimento a respeito de recursos e como utilizá-los para o ensino da divisão de frações. Esta pesquisa se faz relevante, pois alunos e professores apresentam dificuldades em relação à divisão de frações, principalmente no que se refere ao sentido de número fracionário, representação e unidade de referência.

***Palavras-chaves***: Conhecimento Especializado. Divisão de fração. Formação de Professor.

**Abstract**

This study focuses on the knowledge revealed by mathematics teachers in a teacher education course on fractions. Teachers solved a task regarding estimation, student difficulties and resources in the context of dividing fractions. The results suggest that teachers face some challenges such as estimating the result of dividing fractions, listing students' possible conceptual difficulties, knowledge about resources and how to use them to teach fractions division. This research is relevant because students and teachers present difficulties in relation to the division of fractions, especially about the meaning of fractions, representation and reference unit.

***Keywords***: Specialized Knowledge. Fraction division. Teacher training.

**Resumen**

Este estudio se centra en los conocimientos revelados por profesores de matemáticas en un curso de formación sobre fracciones. Los profesores resolvieron una tarea sobre estimación, dificultades de los estudiantes y recursos en el contexto de la división de fracciones. Los resultados sugieren que los profesores enfrentan algunos desafíos como: estimar el resultado de dividir fracciones, enumerar las posibles dificultades conceptuales de los estudiantes, conocimiento sobre los recursos y cómo usarlos para enseñar a dividir fracciones. Esta investigación es relevante porque estudiantes y profesores presentan dificultades en relación con la división de fracciones, especialmente en lo que respecta al significado del número fraccionario, representación y unidad de referencia.

***Palabras clave***: Conocimiento especializado. División de fracciones. Formación de docentes.

**Recebido em 11/08/2025**
**Aceito em 12/12/2025**

Tangram
Revista de Educação Matemática
Universidade Federal da Grande Dourados

## INTRODUÇÃO

As pesquisas apontam que o conhecimento do (futuro) professor sobre os números fracionários é limitado (ver, por exemplo, Ball, 1990; Newton, 2008; Lo & Luo, 2012; Serrazina & Rodrigues, 2018). Assim, a formação, inicial e continuada necessita assumir o papel de desenvolver as especificidades do conhecimento do professor relacionadas com a atuação profissional de ensinar matemática. Para tanto, é necessário que, nas formações, os (futuros) professores tenham a oportunidade de desenvolver experiências significativas para que possam, posteriormente trabalhar com seus alunos (Hiebert et al., 2003). É importante que sejam também confrontados com situações concretas, experimentem diferentes estratégias e analisem diferentes situações, através de tarefas (Serrazina & Rodrigues, 2018).

Entende-se que, para ampliar o Conhecimento Especializado (Carrillo et al., 2018), é preciso descobrir também suas dificuldades, desafios e o que eles revelam em relação ao conhecimento matemático de determinado tópico (Li & Kulm, 2008). Desse modo, este estudo concentra-se no conhecimento revelado por professores — atuais e futuros — durante um curso de formação sobre a divisão de frações, tendo sido implementada uma Tarefa para Formação (TpF), que reúne um conjunto de questões que os (futuros) professores respondem e discutem no contexto formativo.

Neste trabalho focamos o conhecimento dos participantes relacionado à estimativa, às possíveis dificuldades dos alunos e aos recursos de ensino da divisão de frações. O foco recai, assim, sobre o Conhecimento Especializado do professor, complementando o foco dado aos alunos em grande parte das pesquisas. Diante disso, aqui focamos a seguinte pergunta: *Que conhecimento revelam (futuros) professores no contexto da divisão de frações, acerca da estimativa, das dificuldades dos alunos e dos recursos de ensino, ao resolverem uma Tarefa para a Formação?*

## ALGUMAS NOTAS TEÓRICAS

Em sala de aula, a estimativa é importante para que o aluno possa perceber que a matemática não é feita somente por resultados "exatos", mas envolve também a elaboração de argumentos, aproximações, raciocínios e justificativas (Fontanive et al., 2012; Brocardo, 2003). Para (2009), apesar da estimativa não ser um conteúdo do currículo de matemática, estimar é uma habilidade importante a ser desenvolvida. O trabalho com estimativa é recomendado e ressaltado na Base Nacional Curricular (BNCC) sendo referido que “no tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras (Brasil, 2018, p. 266). No entanto, apesar de os documentos oficiais darem ênfase ao cálculo de estimativas, trata-se de um conteúdo pouco ensinado, havendo pouca prática em fazer estimativa (Figueiredo & Santos, 2016).

Assim, além de realizar procedimentos e encontrar respostas exatas, é importante desenvolver estratégias para estimar respostas obtendo resultados aproximados. Realizar estimativas é uma das aprendizagens úteis para a vida social, contribuindo para entender o uso da matemática na vida cotidiana e de argumentos matemáticos na razoabilidade de resultados e raciocínios (Segovia et al., 1989). Entende-se estimativa como uma estratégia que utiliza diferentes técnicas de cálculo aproximado e, assim, o processo de estimar apoia-se em dimensões conceituais referentes aos números e às operações como ordem de grandeza, proporcionalidade e equivalência, e em procedimentos como decompor, substituir e compensar e em estratégias de cálculo mental. Esse cálculo mental ocorre de maneira flexível e acessível, usando as relações numéricas e propriedades aritméticas, sendo o seu aspecto-chave que ocorra “na cabeça”, e não “de cabeça” (Buys, 2008) e considera-se que os resultados intermediários podem ser anotados para que seja possível seguir o raciocínio. Entende-se, assim, cálculo mental como um conjunto de procedimentos sem recorrer a um algoritmo preestabelecido para obter o resultado exato ou aproximado (Parra, 1996). Isso é relevante, pois, por exemplo, no ensino de frações, a estimativa está ausente, sendo priorizado o cálculo exato (Monteiro & Pinto, 2005).

No âmbito do ensino da divisão de frações, o foco acaba sendo nos procedimentos (regra), dificultando o desenvolvimento de outras estratégias, como cálculo mental e por estimativa (Ma, 1999; Serrazina & Rodrigues, 2018). Tais estratégias de cálculo e estimativa auxiliam na compreensão do próprio número, das operações e de sua aplicabilidade pois muitas vezes a dificuldade no algoritmo da divisão de frações está na não compreensão do que se faz e por que se faz.

Para favorecer a compreensão do cálculo é essencial que os alunos escolham suas próprias estratégias, façam representações pictóricas e usem diferentes tipos de recursos e materiais para encontrar a solução. Para que ocorram melhoras significativas no entendimento da divisão de frações é fundamental que os contextos formativos proponham tarefas que permitem explorar materiais manipulativos, problemas e representações (Lubinski et al., 1998; Newton, 2008; Redmond, 2009; Sharon & Swarthout, 2014).

Muitas das dificuldades dos alunos no âmbito das frações relacionam-se com, por exemplo, entender a relação entre numerador e denominador; compreender o todo de referência; assumir a fração como um numeral que representa dois números naturais (um o numerador e outro o denominador), em vez de considerarem como a representação de um número(Carrapiço, 2015). Muitas dessas dificuldades são comuns também nos professores, sendo necessária uma formação de conhecimento sólido e aprofundado das frações (Pinto & Ribeiro, 2013).

O uso de representações e materiais manipulativos se faz necessário não apenas para comunicar as ideias matemáticas, mas também para a sua própria construção (Godino et al., 2016). No entanto, muitos professores desconhecem ou não sabem usar estes materiais para ensinar a divisão de frações (Araújo, 2013; Perez, 2009) o que leva à necessidade de desenvolver o conhecimento do professor nesse âmbito pois conhecer os recursos, as suas potencialidades associadas a cada tópico e a como a sua exploração permite efetuar conexões com tópicos distintos ou com um mesmo tópico em etapas educativas distintas (Ribeiro et al., 2018) é algo fundamental para possibilitar que os alunos entendam a divisão de frações.

Esse conhecimento dos recursos para atribuir significado à divisão de frações está intrinsecamente relacionado com o tópico matemático que se pretende abordar (e não com o conhecimento pedagógico geral), o que pode ser desafiador para o professor, uma vez que exige lidar com estratégias intuitivas e particulares de cada aluno, e muitas dessas podem ser novas para os professores (Sharp et al., 2002). Esses recursos podem assumir um papel fundamental para compreender os algoritmos partindo de casos particulares com quantidades “manejáveis” e passando posteriormente para um entendimento mais abstrato.

Quando nos situamos no âmbito dos algoritmos da divisão de frações identificam-se, historicamente, alguns que se tornaram mais relevantes (Contreras, 2012): redução ao denominador comum, Inverte e Multiplica (IM), produtos cruzados e conversão de frações em decimais.

O algoritmo redução ao denominador comum consiste em transformar as frações em frações equivalentes com mesmo denominador, reduzindo, assim, a divisão de frações a uma divisão de números inteiros, já que irá dividir apenas os numeradores ($\frac{1}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{1}{12} \div \frac{15}{12} = \frac{1}{15}$). No algoritmo Inverte e Multiplica a fração correspondente ao divisor é invertida e o dividendo é multiplicado por essa nova fração ( $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, e $b \neq 0, d \neq 0$). Deste algoritmo deriva a denominada “regra do sanduiche”

$$\left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left[\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}\right]\right)$$

O algoritmo produtos cruzados consiste em multiplicar os numeradores com os denominadores ($\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$) – este algoritmo deriva do algoritmo de redução ao denominador comum e também do Inverte e Multiplica.

O algoritmo conversão de frações em decimais consiste em transformar as frações em decimais e operar com eles, expressando depois o resultado em forma de fração ($\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = 0{,}75 \div 0{,}5 = 1{,}5 = \frac{3}{2}$). Note-se que, portanto, este não corresponde efetivamente a um algoritmo para dividir frações, pois as frações apenas existem no início e no final, não estando envolvidas no processo. Esta é uma estratégias que alunos e professores usam frequentemente para não operar com frações, mas por o fazerem de forma mecanizada fornecem respostas equivocadas e sem sentido, além de apresentarem dificuldade em estimar e realizar cálculo mental (Monger et al., 2021; Giongo et al., 2013).

Para ensinar frações com compreensão, Huinker (2002) sugeriu a necessidade de mudar o objetivo da instrução fracionária de aprender regras computacionais para desenvolver o senso numérico e o senso de operação fracionária pois, com um foco procedimental, se o algoritmo for esquecido pelo aluno, este não consegue recorrer a outra estratégia para resolver a situação (Kieren, 1980).

Nessa perspectiva, desenvolver o sentido de operação demanda uma discussão especializada, envolvendo a compreensão das operações, suas propriedades e relações entre elas. Esse entendimento associa-se a dificuldades em compreender que, na divisão, nem sempre o quociente é menor que o dividendo (Brocado et al., 2003; Serrazina & Rodrigues, 2018), sendo tais dificuldades comuns também aos professores (Ma,1999; Luo & Lo, 2012; Ball; 1990; Newton, 2008).

Durante as discussões em torno da divisão de frações, os alunos efetuam erros típicos que podem ser caracterizados em três categorias (ver Özel (2013) e Tirosh (2000) para as duas primeiras): de base algorítmica, que ocorrem quando se equivoca em um ou dois passos de um algoritmo; de base intuitiva, que resultam de generalização equivocadas, como pensar que o quociente deva ser sempre menor que o dividendo; de base formal, relacionados a conhecimentos incorretos sobre frações e propriedades da divisão de frações, como acreditar que a divisão é comutativa (Moriel, 2014).

Logo, o professor deve ter um conhecimento sobre estes erros de modo que permita uma ação para superá-los por meio de estratégias considerando o erro como um recurso potente no processo de aprendizagem (Sosa et al., 2019). Este conhecimento do professor que permite antecipar as dificuldades dos alunos em cada um dos tópicos matemáticos e considerá-los no desenvolvimento da prática matemática, faz parte das especificidades do seu conhecimento (Bayound, 2011; Carrillo et al., 2018). É esse Conhecimento Especializado do professor de matemática que permite que tenha uma consciência do potencial das tarefas, estratégias e para ensinar o conteúdo matemático, considerando, inclusive, limites, potenciais e eventuais obstáculos que possam surgir (Carrillo et al., 2018).

Esse Conhecimento Especializado do professor é entendido aqui no sentido do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*[1] – MTSK (Carrillo et al., 2018), referindo-se, portanto, a um conhecimento profissional específico do professor de Matemática, envolvido e requerido para essa prática profissional de possibilitar que os alunos entendam, construído desde a formação inicial do professor e ao longo de sua

[1] De modo similar à nomenclatura da conceitualização do conhecimento do professor, aqui, se assume também a nomenclatura em inglês, associada à mesma justificação anteriormente apresentada.

Tangram
Revista de Educação Matemática

Universidade Federal da Grande Dourados

carreira (Climent, 2002). Formam parte desse Conhecimento Especializado o Conhecimento Matemático (*Mathematical Knowledge* – MK), e o Conhecimento Pedagógico do conteúdo (Pedagogical Content Knowledge – PCK).

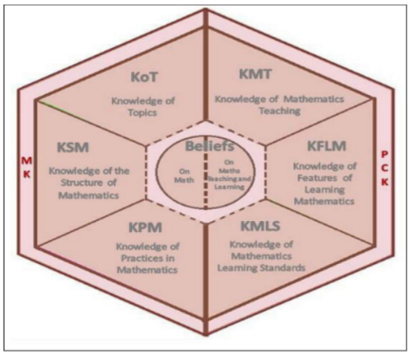



***Figura 1***. *Domínios do Mathematics Teachers' Specialised Knowledge*

Fonte: Carrillo et al. (2018)

Considerando o nosso foco, discutimos os subdomínios do MK (KoT) e PCK (KMT, KFLM) e apresentamos exemplos do conteúdo desse conhecimento no âmbito da divisão de frações.

O *Knowledge of Topics* (KoT) inclui o conhecimento matemático do professor sustentando o entendimento do que se faz, de como se faz e do porquê se faz de determinada forma, além do conhecimento de diferentes tipos de registro de representação e das múltiplas possíveis definições para um mesmo conceito. No contexto da divisão de frações, inclui, por exemplo, conhecer os distintos sentidos atribuídos a essa operação, como medição e partição (Simon, 1993); conhecer distintos procedimentos (algoritmos) – tradicionais ou não comuns; conhecer as propriedades, como a relação entre divisor e a unidade de medida entre o dividendo e o todo a medir; conhecer a equivalência de frações, ligada ao conceito de número racional como representante de uma classe de números equivalentes; conhecer diferentes tipos de frações, e distintas formas de representação associadas ao cálculo da divisão de frações, como pictóricas e algébrica, incluindo a modelação.

O *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) corresponde ao conhecimento matemático do professor em relação a teorias de ensino, recursos materiais e virtuais, estratégias, técnicas, tarefas e exemplos. No âmbito da divisão de frações inclui, por exemplo, conhecer abordagens envolvendo problemas aritméticos, geométricos ou contextualizados, lançando mão de recursos didáticos (tira de frações, reta numérica, área) para representar a divisão de frações, tendo conhecimento das limitações/potencialidades destes recursos; conhecer a abordagem baseada na comparação entre dois modos de resolução da divisão de frações, por exemplo, o geométrico e de diferentes algoritmos permitindo optar pela estratégia mais potente.

No *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM), inclui-se o conhecimento sobre como os alunos aprendem, envolvendo, por exemplo, conhecer que os estudantes do sétimo ano apresentam um desenvolvimento cognitivo adequado para compreender e resolver problemas de divisão de frações, e o conhecimento acerca das características deste processo de aprendizagem, tais como erros comuns (por exemplo, compreender a diferença conceitual entre dividir por 2 e dividir por $\frac{1}{2}$) e suas prováveis fontes, dificuldades e obstáculos enfrentados pelos alunos, bem como a linguagem normalmente utilizada na abordagem de cada conceito.

## CONTEXTO E MÉTODO

Este trabalho centra-se no conhecimento revelado e mobilizado por seis professores (atuais e futuros) do ensino básico, que trabalham com alunos de sete a 14 anos e que participaram de uma formação on-line com duração de seis horas. O grupo de participantes era composto por dois professores com formação em matemática e experiência de mais de cinco anos (Bruno e Ana); dois futuros professores que estavam no último ano da Licenciatura em Matemática (Dina e Carlos), e duas pedagogas com experiência de mais três anos (Célia e Eva).

As informações foram coletadas utilizando um questionário on-line; observações durante a formação no *Google Meet*; as produções dos participantes para as tarefas propostas e as gravações áudio e vídeo das sessões on-line e do *chat*. Na formação, os participantes responderam a uma Tarefa para a Formação TpF Ribeiro; Almeida: Mellone, 2021) tendo como ponto de partida uma tarefa matemática para alunos de determinado nível educativo (aqui alunos do 7º ano).

A TpF é composta por duas partes associadas a objetivos formativos focados no desenvolvimento do conteúdo do conhecimento especializado que se associa a alguns dos subdomínios do MTSK e ao Conhecimento Interpretativo (Menezes & Ribeiro, 2023). A TPF que aqui se discute foi conceitualizada com o objetivo de promover o desenvolvimento do Conhecimento Especializado da divisão de frações, tendo um foco na estimativa, sentido de número, dificuldades dos alunos e recursos, levando em consideração as fragilidades do conhecimento do professor e permitindo uma discussão que faça a correlação entre a teoria e a prática do professor (Ribeiro et al., 2021). Além disso o contexto formativo pretendia também que os professores antecipassem as dificuldades dos alunos, de modo que as pudessem assumir como ponto de partida para desenvolver o seu Conhecimento Especializado (Menezes; Ribeiro, 2023).

A Parte I teve como ponto de partida uma proposta destinada a alunos do 7.º ano, focando a divisão de frações, e a partir da qual foi incluído um conjunto de perguntas para os (futuros) professores, focando o conteúdo do MTSK.

A Parte II baseou-se em um conjunto de produções de alunos do 7.º ano (reais ou simuladas), com o objetivo de acessar e desenvolver o conteúdo do Conhecimento Interpretativo dos participantes.

A TpF foi composta por três perguntas com nove subperguntas, no entanto, aqui discutem-se apenas quatro: 1(b), (c), (d) que correspondem a questões para os professores relacionadas aos subdomínios do MTSK; e a subquestão i e ii), que faz parte da tarefa para os alunos. Na Figura 2 apresenta-se a Parte I da TpF com as perguntas específicas que se discutem aqui.

**Tarefa: Operando com frações**

(Deve explicar sempre o seu raciocínio, descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, desenhos, ...).

Considere as seguintes expressões abaixo:

a) 5÷2

$b)\ \frac{2}{5} \div 4$

$c)\ 7 \div \frac{1}{2}$

$d)\ \frac{12}{15} \div \frac{3}{5}$

**i)** Sem recorrer ao algoritmo, indique qual considera que é o valor aproximado ou exato de cada uma das expressões. Explique seu raciocínio.

**ii)** Resolva cada uma das expressões anteriores, indicando o valor exato, apresentando o processo para encontrar a resposta.

**iii)** Formule um problema para cada uma das expressões anteriores, considerando que a resolução implique a expressão específica.

1. Considere a tarefa acima:

| |
|---|
| **a)** Resolva a tarefa (do quadro acima) por si mesmo. |
| **b)** Represente, pelo menos, de duas maneiras distintas (pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, desenhos...) cada uma das expressões a, b, c e d. Justifique a sua resposta. |
| **c)** Indique um conjunto de possíveis dificuldades específicas que os alunos podem revelar na resolução dessa tarefa (aponte o ano dos alunos). |
| **d)** Se você tivesse que ensinar divisão de frações para uma turma de sétimo ano, como você faria? Usaria algum recurso? Qual(ais)? Por quê (com que objetivo)? |

**Figura 2.** Tarefa para a Formação (autores).

Fonte: Elaborada pelos autores

Na tarefa para os alunos, dentro do retângulo, consideram-se quatro expressões, a partir das quais se efetuam algumas questões. a ordem da expressões é importante (divisão com inteiros; com dividendo fracionário e divisor inteiros; dividendo inteiro e divisor fracionário; dividendo e divisor fracionários) pois considera-se o desenvolvimento cognitivo dos alunos (Contreras, 2012; Lopes, 2008) e dos professores (Siegler & Lortie-Forgues, 2017).

Em i) pretende-se aceder o conhecimento dos participantes associado a estimativas. Já ii) objetiva discutir e conhecer que procedimentos são usados para resolver a divisão de frações – buscando ampliar, durante a formação, o conhecimento dos participantes em relação a diferentes procedimentos comuns e não comuns.

Na pergunta b), pretende-se aceder ao conhecimento dos participantes em relação às diferentes representações, ou seja, diferentes formas de exteriorizar uma imagem mental como pictóricas (desenhos), simbólicas (símbolos conhecidos) e gráficas – pois essa é uma das dificuldades dos professores (Li & Kulm, 2008; Ma, 1999; Rivzi & Lawson, 2007). A pergunta c) pretende aceder ao conhecimento do professor sobre possíveis dificuldades específicas que os alunos podem revelar na resolução da tarefa para os alunos, permitindo também, posteriormente, no contexto formativo, relacionar as dificuldades dos professores com as dos alunos. Em d) pretende-se aceder ao que os participantes revelam conhecer em relação ao ensino de divisão de frações (como ensinam, que exemplos usam, procedimentos, estratégias, recursos tecnológicos ou manipulativos).

Para a análise, consideram-se aqui as produções escritas e as gravações do Meet das reflexões realizadas em grupo com os professores e futuros professores. Note-se que o foco não é o que os docentes acham, mas, sim, o que revelam conhecer e, desse modo, para a análise toma-se como lente teórica o conteúdo dos subdomínios do MTSK. Considera-se, assim, as evidências de conhecimento relativo a dificuldade dos alunos (KFLM), recursos (KMT), propriedades, conceitos, fenomenologia, procedimentos e registros de representação (KoT).

## ANÁLISE E DISCUSSÃO

A análise das produções para a Tarefa para a Formação revela que os participantes possuem algumas das mesmas dificuldades que os alunos em relação à divisão de frações (Ball, 1990; Ma,1999; Lo & Luo, 2012). Percebe-se que isso gerou dificuldades para os professores e futuros professores no que se refere ao ensino desse tópico, o que ficou evidente em suas falas, quando mencionaram, por exemplo, a falta de espaço na universidade, tanto nos cursos de Matemática, quanto nos de Pedagogia, para a abordagem desse conteúdo.

> *Dina: "Isto deveria ser trabalhado no curso de pedagogia, pois este tema é conteúdo dos Anos Iniciais, porque nos Anos Finais trabalhamos conteúdos mais avançadas com os alunos e estes são temas iniciais".*
>
> *Célia: "Para mim isto é algo que é tratado, ou deveria ser na Licenciatura em Matemática porque não somos especialistas em matemática, não sabemos essas coisas mais profundas do conteúdo".*
>
> *Eva: "Eu mesma não trabalho com alunos do 5°ano porque tenho dificuldade na matemática e não saberia como ensinar este conteúdo".*

Verifica-se aqui o conhecimento dos professores sobre a sequência de temas anteriores e posteriores (KMLS), bem como sobre o que cada professor deveria conhecer e ensinar. Os professores dos Anos Finais (Bruno, Ana) e os futuros professores (Dina e Carlos) se sentiam despreparados e desconfortáveis para ensinar o tópico de divisão de frações, o que corrobora outros resultados que apontam que o conhecimento do professor é limitado (Newton, 2008, Ball, 1990; Serrazina & Rodrigues, 2018).

Com relação à pergunta i), que forma parte da tarefa para os alunos, ("*Sem recorrer ao algoritmo, indique qual considera que é o valor aproximado ou exato de* *cada uma das expressões. Explique seu raciocínio")*, Ana realizou um cálculo mental com estimativa, antecipando o espaço do resultado: *"As primeiras são mais fáceis, já a última pensei assim, eu sei que $\frac{12}{15}$ é menor que 1 e maior que $\frac{3}{5}$ então a resposta será maior que 1, fiz uma estimativa".* Percebe-se que Ana detem um conhecimento sobre sentido numérico fracionário, pois realizou uma estratégia usando $\frac{12}{15}$ como ponto de referência para compará-lo com 1 e $\frac{3}{5}$ para, assim, obter informações que a auxiliassem a estimar a solução sem precisar usar um algoritmo predeterminado para isso. Além disso, fez o cálculo mental utilizando relações numéricas e propriedades aritméticas para encontrar o resultado (Buys, 2008; Parra, 1996).

Já dois dos professores (Eva e Carlos) disseram realizar o algoritmo Inverte e Multiplica (IM) na cabeça, porém, ao explicar como pensaram, apenas descreveram as etapas de resolução do algoritmo IM. A professora Eva relatou: *"Eu fiz o algoritmo Inverte e Multiplica na cabeça, por exemplo, fiz $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$", repeti a primeira e multipliquei pelo inverso da segunda"*, evidenciando o algoritmo como a principal ou única estratégia de cálculo utilizada para resolver a divisão de frações, mesmo em contexto em que foi solicitado indicar o valor exato ou aproximado sem recorrer ao algoritmo. Esse tipo de resposta para a tarefa para o aluno salienta a centralidade do algoritmo na prática do professor (KMT – estratégias de ensino) e um conhecimento limitado de estratégias de estimativa e cálculo mental (KoT – propriedades; fenomenologia e aplicações), que se relacionam também à forma como se entende a matemática e as experiências anteriores dos participantes relativamente ao ensino prematuro do algoritmo, que limita o desenvolvimento de outras estratégias, como cálculo mental e estimativa (Monteiro & Pinto, 2005; Ma, 1999; Serrazina & Rodrigues, 2018).

Já o professor Bruno apontou que *"é simples, parece automático. A primeira $\frac{5}{2}$ já sei que é 2,5. As outras preciso pensar mais, passei para decimal e dividi"*, e efetuou a operação transformando a quantidade em uma representação decimal, apoiando as suas formas de proceder nas relações numéricas entre fração e decimais (KoT – fenomenologia e aplicações). O mesmo ocorreu com a professora Célia: *"pensei no valor monetário de 5 reais dividido para 2 pessoas. No caso de $\frac{2}{5} \div 4$ e $7 \div \frac{1}{2}$ também pensei na forma decimal por ser mais fácil, depois transformei para fração."*

Tangram
Revista de Educação Matemática

Universidade Federal da Grande Dourados

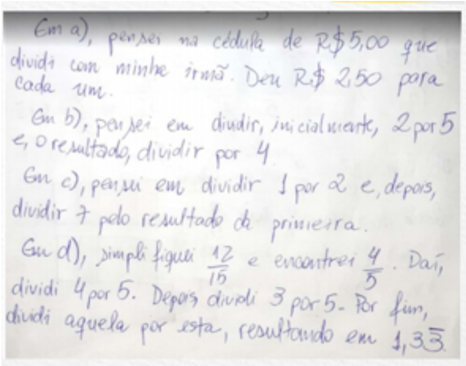
| | | |
|---|---|---|
| $5 \div 2$<br><br>$\frac{2}{5} \div 4$<br><br>$7 \div \frac{1}{2}$<br><br>$\frac{12}{15} \div \frac{3}{5}$ |  | **Carlos: a)** Pensei na cédula de R$ 5,00 que dividir com minha irmã deu R$ 2,50 para cada um.<br>**b)** Pensei em dividir, inicialmente, 2 por 5 e, o resultado dividir por 4.<br>**c)** pensei em dividir 1 por 2 e, depois, dividir 7 pelo resultado da primeira.<br>**d)** Simplifiquei $\frac{12}{15}$ e encontrei $\frac{4}{5}$. Daí, dividi 4 por 5. Depois dividi 3 por 5. Por fim dividi aquela por esta, resultando em 1,33... |



**Figura 3.** Produção do professor Carlos.

Fonte: produção dos professores

Os professores (Bruno, Célia, Carlos) escolheram o algoritmo alternativo, a conversão das frações em decimais, que consiste em “transformar as frações em decimais e operar com eles, expressando depois o resultado em fração novamente” (Contreras, 2012). Com isso, os professores revelaram um conhecimento sobre o sentido de quociente de fração e conexão entre frações e decimais (KoT – fenomenologia e aplicações).

Já a professora Dina, além da representação decimal, utilizou a representação pictórica para auxiliar na resolução: *“Eu imaginei um desenho, a representação pictórica, dividir 5 quadrados para 2 pessoas, ou 7 quadrados na metade cada um, os outros passei para a forma decimal para estimar por ser mais fácil.”*

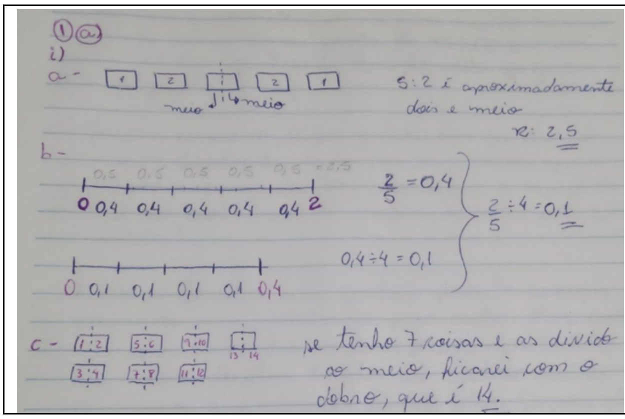
| | |
|---|---|
|  | 5÷ 2 é aproximadamente dois e meio<br><br>Se tenho 7 coisas e os divido ao meio ficarei com o dobro que é 14. |



**Figura 4.** Produção da professora Dina.

Fonte: produção dos professores

A professora Dina tentou utilizar a estratégia da representação pictórica. No entanto, ao tentar representar a operação $\frac{2}{5} \div 4$, se equivocou, porque considerou $\frac{2}{5}$ não como um número racional (Carrapiço, 2015), mas como um numeral que representa dois números naturais (KoT – definição de números racionais). A representação indica um segmento de reta que vai de zero a dois, sendo dividido em cinco partes iguais, considerando que cada parte ao final equivale a 0,4. Depois, tem-se a representação desse segmento de 0,4 dividido em 4 partes iguais, tendo 0,1 cada parte ao final. Esse conhecimento associa-se a KoT (definição e registro de representação) pois, para se realizar uma representação adequada, é importante conhecer a definição dos números naturais e fracionários. Desse modo, a representação da professora Dina se mostrou incorreta, pois apresentou a divisão entre números naturais (2 ÷5) ÷ 4, e não uma divisão de um número fracionário por um natural $\frac{2}{5}$ ÷ 4. Uma das representações possíveis para a operação $\frac{2}{5}$ ÷ 4 seria a apresentada na Figura 5.

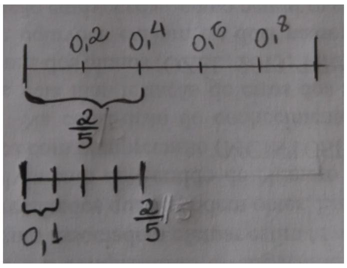



**Figura 5.** Uma das possíveis representação de $\frac{2}{5} \div 4$

Fonte: Elaborada pelos autores

A representação do $\frac{2}{5}$ seria um inteiro dividido em 5 partes, sendo tomadas duas dessas partes, ou seja, cada parte valeria 0,2, assim, $\frac{2}{5}$ corresponderia a 0,4. Toma-se o segmento $\frac{2}{5}$ e o divide em 4 partes iguais, tendo 0,1 ao final.

O mesmo equívoco ocorreu quando Dina tentou explicar seu raciocínio para a operação $\frac{12}{15} \div \frac{3}{5}$. Dina demonstrou um conhecimento (KoT – definição) relacionado às frações equivalentes, quando simplificou a fração $\frac{12}{15}$ para $\frac{4}{5}$, no entanto, ao representar a fração, indicou um segmento de reta de 0 a 4 e o dividiu em 5 partes, considerando que cada parte equivaleu a 0,8. Assim, a representação de Dina se mostrou incorreta, pois apontou também uma representação entre números naturais $4 \div 5$, e não a representação de um número fracionário $\frac{4}{5}$. Percebe-se ainda uma dificuldade na unidade de referência, pois o todo seria o $\frac{4}{5}$, ou seja, 0,8 e não 5 partes de 0,8.

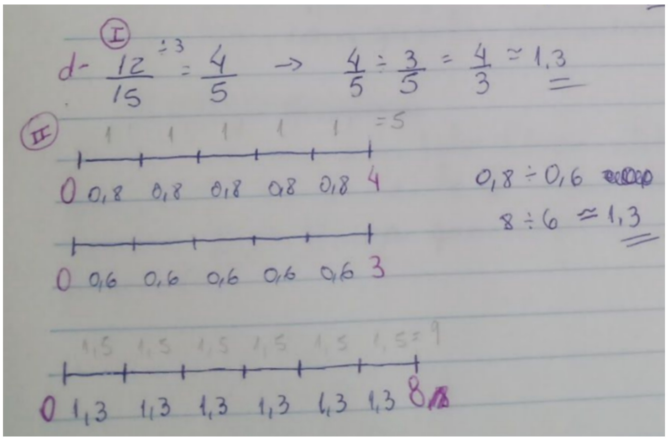



***Figura 6.*** Produção da professora Dina.

*Fonte: produção dos professores*

O mesmo ocorreu nas representações apresentadas para $\frac{3}{5}$ e $\frac{8}{6}$. A professora detinha um conhecimento (KoT – definições, propriedades e fundamentos) em relação aos efeitos operatórios da divisão de decimais, pois considerou que $0{,}8 \div 0{,}6$ teria o mesmo quociente que $8 \div 6$. Observam-se aqui dificuldades da relação entre numerador e denominador e da compreensão conceitual da unidade de referência, ou seja, em relação ao todo. Qual seria o todo a considerar, isto é, a unidade de referência a ser considerado, acarretando, desse modo, a dificuldade em realizar uma representação para a operação da divisão de frações.

Os professores revelaram dificuldades em explicar estratégias para estimar ou realizar o cálculo mental do valor das operações solicitadas, como a fala do professor Carlos: “*para mim é difícil estimar, já penso logo no algoritmo em minha cabeça*. Célia: *eu penso logo no IM ou transformo em decimais, foi assim que aprendi, não sei outra forma de explicar ou fazer*”. Verifica-se que estimar e realizar cálculo mental é uma dificuldade não só dos alunos, mas também dos professores, porque usam o algoritmo de forma mecanizada e não são capazes, muitas vezes, de exprimir por escrito o raciocínio que usam (Monger et al., 2021; Giongo et al., 2013).

Já na questão *ii) “Resolva cada uma das expressões anteriores indicando o valor exato, apresentando o processo para encontrar a resposta”,* todos os professores apresentaram um resultado correto para as operações, tendo quatro deles escolhido converter para decimal, e dois, o algoritmo Inverte e Multiplica.

Bruno apresentou outra forma de representar a divisão de frações, usando um traço maior entre o dividendo e o divisor (fração composta), recorrendo à regra do “sanduíche” - regra mnemônica associada ao algoritmo IM (García, 2013).

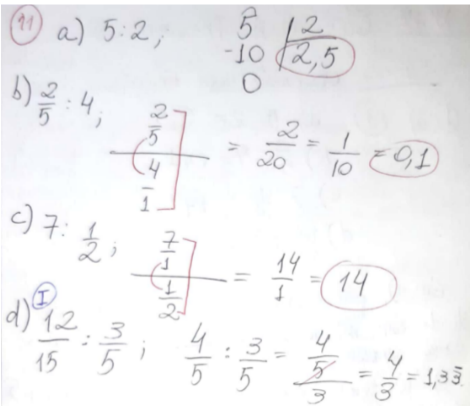


**Figura 7.** Produção do professor Bruno.

Fonte: produção dos professores

Ao ser questionado se utilizava esta representação com os alunos, o professor alegou que sim, mas que esta seria mais difícil de ser compreendida por eles.

*Bruno: “Já tentei ensinar pela regra do sanduíche, mas para os alunos é difícil entender essa notação. Para eles é complicado ver a divisão escrita desse jeito, então não ensino mais assim, agora ensino pelo IM”.*

O professor usou a regra do sanduíche, que deriva do IM (representada na Figura 7), como uma estratégia pessoal de resolução das operações, mas não a utilizava como estratégia de ensino (KMT – Estratégia, técnicas, tarefas e exemplos), por sua experiência indicar uma dificuldade dos alunos em relação à notação da divisão de frações. Outro conhecimento (KoT – procedimentos) revelado refere-se aos procedimentos requeridos no método da divisão pela “chave” de um inteiro por decimal (letra a), como apresentado na Figura 7.

Os professores, ao serem questionados sobre as possíveis dificuldades dos alunos (pergunta c), apresentaram desafios em efetuar essa antecipação (KFLM – fortalezas e dificuldades), não fazendo parte da sua prática profissional usual (Sosa et al., 2019). Os professores anteciparam algumas dificuldades sustentadas na sua experiência anterior enquanto professores ou enquanto alunos – ensinamos como consideramos que fomos ensinados (Cooney, 1994; Lampert, 1988) –, e não sustentados nas discussões matemáticas envolvidas na tarefa específica.

Os professores que tinham experiência de sala de aula (Bruno e Ana) elencaram algumas dificuldades dos alunos, conceituais e procedimentais, tendo por base experiências anteriores de alunos reais (KFLM – fortalezas e dificuldades).

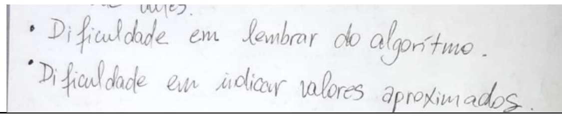
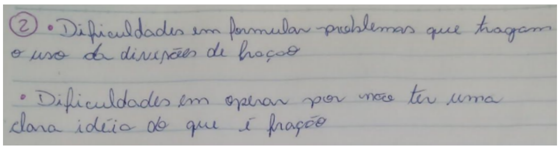
| | |
|---|---|
| **Bruno:**<br>Dificuldades em lembrar do algoritmo.<br>Dificuldades em indicar valores aproximados. |  |
| **Ana:**<br>Dificuldade em formular problemas que tragam o uso da divisão de frações.<br>Dificuldades em operar por não ter uma clara ideia do que é fração. |  |

**Figura 8.** Produções de Bruno e Ana.

Fonte: Elaborado pelos autores

Os professores apontaram algumas dificuldades dos alunos durante as discussões, por exemplo: dificuldades no algoritmo, em fazer aproximações, com o conceito de fração e em elaborar problemas com a divisão de frações. Todavia, estas coincidem com as reveladas pelos próprios professores durante a resolução da Tarefa para a Formação. Outra dificuldade conceitual citada por Bruno foi em considerar que o dividendo não pode ser menor que o divisor e dificuldades com frações.

*Bruno: "uma dificuldade seria no* $\frac{2}{5} \div 4$, *pois muitas vezes os alunos não compreendem como o dividendo pode ser menor que o divisor. Se eu trabalho com decimais 0,4 é menor que 4, mesmo alunos do ensino médio tem essa dificuldade".*

*Carlos: "Não sei qual dificuldade os alunos poderiam ter em relação a tarefa porque ainda não leciono."*

*Ana: "uma dificuldade seria nas frações mesmo, porque os alunos vão bem quando trabalham com números naturais, mas a fração é mais difícil para eles."*

Já os futuros professores e professores não souberam apontar quais poderiam ser as dificuldades dos alunos, alegando que ainda não lecionavam, por isso, não tinham esse conhecimento por falta de experiência. Contudo, antecipar as dificuldades dos alunos forma (deverá formar) parte do nosso Conhecimento Especializado enquanto professores, o que levanta a problemática da necessidade de uma formação que permita desenvolver este conhecimento.

Em relação aos recursos, em *d) "Se você tivesse que ensinar divisão de frações para uma turma de sétimo ano, como você faria? Usaria algum recurso? Qual(ais)? Por quê (com que objetivo)?*)", os professores alegaram ensinar a divisão de frações pelo algoritmo do Inverte e Multiplica e sustentaram essa opção pelo que se apresenta nos livros didáticos e por ser a forma que aprenderam enquanto alunos dos anos iniciais e finais. Dois professores (Bruno, Dina) indicaram como forma de ensino a regra do multiplicar cruzado que deriva do IM (Contreras, 2012), mostrando alguns recursos manipulativos, como o Tangram e a tira de frações.

*Bruno: "Eu costumo usar nas minhas aulas o Tangram, porque os alunos gostam".*

*Ana: "eu uso geralmente o IM é que vem nos livros didáticos e é como aprendi".*

*Dina: "eu ensino multiplicar em X, isso não está nos livros didáticos, mas muitos alunos acham mais fácil assim".*

*Célia: "Eu utilizo a tira de frações".*

*Eva: "Eu uso softwares de matemática".*

Porém, ao exemplificar e explicar como utilizavam os recursos para o ensino da divisão de frações, os professores não explicaram, dizendo não usar para o ensino da divisão de frações especificamente. Este tipo de resposta revela que conhecem os recursos – *softwares*, tira de frações, tangram (KMT – recursos), mas não os utilizam, ou não sabem como utilizá-los para abordar, sobretudo, a divisão de frações (Araújo, 2013; Flores, 2013; Bulgar, 2003; Perez, 2009; Moreira, 2013).

## CONCLUSÃO

Concorda-se com Li e Kulm (2008), quando afirmam que, para ampliar o Conhecimento Especializado do professor, é necessário descobrir suas dificuldades em relação ao seu conhecimento, assim como as próprias percepções dos professores sobre suas necessidades. Sob esse aspecto, esta investigação trouxe luz a alguns pontos em relação ao Conhecimento Especializado do professor, facultando, assim, uma resposta à questão de investigação: *Que conhecimento revelam (futuros)* *professores no contexto da divisão de frações, acerca da estimativa, das dificuldades dos alunos e dos recursos de ensino, ao resolverem uma Tarefa para a Formação?*

**Tabela 1**

Conhecimento revelado pelos professores em relação à estimativa, dificuldades dos alunos e recursos no contexto da divisão de frações.

| **Conhecimento Especializado revelado pelos professores sobre estimativa, dificuldades dos alunos e recursos no contexto da divisão de frações.** | | |
|---|---|---|
| KoT | Fenomenologia e aplicações | - Conhece a conexão entre decimais e frações e representa a fração em decimais.<br>- Conhece o sentido de quociente. |
| | Definições, Propriedades e fundamentos | - Conhece equivalência de frações.<br>- Conhece comparação entre frações.<br>- Conhece os efeitos operatórios da divisão de decimais 0,8 ÷ 0,6 é equivalente a 8 ÷ 6.<br>- Conhece inverso multiplicativo. |
| | Registro de representação | - Conhece a linguagem aritmética, comum e figural (reta e região). |
| | Procedimentos | - Conhece procedimentos alternativos e diferentes procedimentos para resolver a divisão de frações, como inverter e multiplicar- IM, regra do sanduíche, método chave, multiplicar cruzado. |
| KMT | Recursos materiais e virtuais | -Conhece recursos como Tangram, tira de frações e softwares, no entanto, não utiliza, ou não tem conhecimento de como usar para o ensino da divisão de frações propriamente. |
| | Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos | - Usa o algoritmo IM como prática de ensino. |
| KFLM | Fortalezas e Dificuldades | - Conhece as dificuldades dos alunos em relação a:<br>• recordar do algoritmo IM para efetuar a operação;<br>• indicar valores aproximados;<br>• operar por não ter a ideia clara do que é fração;<br>• operar quando o dividendo é menor que 1;<br>• Conhecer dificuldade dos alunos com a representação; fração composta (regra do sanduíche), e<br>• Compreender que dividendo pode ser menor que o divisor. |

Fonte: Elaborado pelos autores

Os professores também apresentaram alguns desafios e dificuldades em relação à estimativa, impedimentos dos alunos e recursos no contexto da divisão de frações, como:

(i) Estimar e utilizar estratégias além do algoritmo;

(ii) representar a divisão de frações e frações (dificuldade conceitual entre número natural e racional);

(iii) unidade de referência e em relação ao todo a ser considerado;

(iv) elencar dificuldades conceituais dos alunos em relação ao tópico;

(v) saber utilizar os recursos conhecidos (tira de frações, reta numérica e região) ou outros no ensino de divisão de frações.

Os professores revelaram um conhecimento alinhado com as dificuldades dos alunos, como na relação entre numerador e denominador e na compreensão conceitual da unidade de referência e representação (Pinto & Ribeiro, 2013). Desse modo, há a necessidade de se realizar pesquisas com foco no Conhecimento Especializado do professor, referente ao sentido do número racional e suas operações.

Além disso, apresentaram o algoritmo como a única ou principal estratégia de resolução da operação, tendo dificuldades em explicar outras estratégias de resolução para a divisão de frações, como estimativa, cálculo mental e representação. Assim, esta investigação corrobora as pesquisas que afirmam que é essencial que estratégias para estimar sejam trabalhadas com os alunos, pois, a menos que estratégias específicas sejam ensinadas, poucos estudantes terão condições de desenvolvê-las por si próprios. Portanto, se fazem essenciais formações de professores a respeito do sentido de número e estimativa. Além disso, de acordo com Brocardo et al. (2003), o uso de algoritmos tem se tornado cada vez menos relevante na atualidade, enquanto a capacidade de estimar e realizar cálculos de forma flexível mostra-se mais útil e necessária.

Os professores também apontaram os desafios em relação ao uso de recursos e elencar possíveis dificuldades dos alunos quanto ao tópico. Desse modo, é preciso desenvolver o Conhecimento Especializado dos professores referente à utilização de materiais manipulativos, representações pictóricas e relações entre os números, e só depois apresentar os algoritmos aos alunos para que eles tenham a possibilidade de ampliar o seu conhecimento matemático com compreensão, pois, ao trabalhar e discutir estratégias de ensino com os professores, possibilita-se que eles desenvolvam e ampliem seu conhecimento sobre a divisão de frações, relacionando-o com estratégias, exemplos e recursos (KoT), uma vez que o conhecimento matemático constrói o conhecimento pedagógico do professor (Ma, 1999).

Com relação às dificuldades dos alunos, esta investigação vai ao encontro da pesquisa de Bayound (2011), que aponta que os professores foram melhores em identificar padrões de erros dos alunos do que os licenciandos, mesmos que estes correspondam, em sua maioria, a erros procedimentais. Depreende-se, então, que a formação inicial e continuada deve familiarizar os professores com os processos equivocados dos alunos para dividir frações (Tirosh, 2000), pois isso tem impacto e interfere na ação de ensinar o tópico por parte do professor.

Entende-se que pesquisas futuras são essenciais no que tange à elaboração de uma sequência de atividades e/ou Tarefas para Formação para se trabalhar estimativa, a fim de colaborar com o desenvolvimento dessa habilidade e desenvolvimento de sentido de número fracionário, assim como atividades cujo foco seja o uso de recursos para o ensino da divisão de frações especificamente.

## AGRADECIMENTOS

Este estudo foi parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código Financeiro 88881.311131/2018-00 e 88887.696474/2022-00.

Projeto PID2021-122180OB-I00 (Governo da Espanha) e pela Red Iberoamericana sobre Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (RED MTSK) patrocinado pela AUIP.

## REFERÊNCIAS

Andrés de Zaragoza, Juan (1515). *Sumario breve de la práctica de la arithmética y todo el curso de larte mercantinol bien declarado: el qual se llama maestro de cuento*. Impresor Juan Joffre.

Araújo, W. A. D. (2013). O uso do FRAC-SOMA 235 no processo de ensino e aprendizagem de frações para o ensino fundamental. In *Anais do 11º Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)* (pp. 1–10). Curitiba, PR. http://sbem.bruc.com.br/XIENEM/pdf/72_1718_ID.pdf

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Bayound, J. M. (2011). *A comparison of pre-service and experienced elementary teachers' pedagogical content knowledge (PCK) of common error patterns in fractions.* [Doctoral Thesis]. American University of Beirut, Beirut, Líbano.

Buys, K. (2008). Mental Arithmetic. In M. Huevel- Panhuizen, K. Buys, & A. Treffers (Eds.), *Children Learning Mathematics*: *A Learning-Teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (pp. 173-2020. Sense publishers.

Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília-DF: Ministério da Educação.

Brocardo, J., Di, L., & Kraemer, J. (2003). *Algoritmos e sentido do número*. *Educação Matemática*, *75*, 11-15.

Bulgar, S. (2003). Using Research to Inform Practice: Children Make Sense of Division of Fractions. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 157-164.

Carrapiço, R. (2015). *Cálculo mental com números racionais: Um estudo com alunos do 6. ano de escolaridade* [Tese de doutorado]. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's Specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática.* [Tese de Doutorado]. Universidad de Huelva.

Contreras, M. (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones: un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje*. [Tese de doutorado]. Universidad de Valencia, Valencia.

Cooney, T. J. (1994). Research on teacher education. In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(3), 355-376.

Figueiredo, H. A., & dos Santos Soares, F. (2016). *Utilizando Problemas de Fermi para Estimar.* Encontro Nacional de Educação Matemática, Brasília.

Fontanive, N. S., Klein, R., & Rodrigues, S. S. (2012). Boas práticas docentes no ensino da Matemática. *Estudos & Pesquisas Educacionais*, 3, 195-277.

Flores, P. (2013). ¿Por qué multiplicar en cruz? Curso de formación inicial de profesores de matemáticas en la Universidad. [Artigo]. 7º Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Montevideo, Uruguay.

García, A. I. M. (2013). *Conocimiento profesional de un grupo de profesores sobre la división de fracciones.* [Dissertação de Mestrado]. Universidad de Granada, Granada.

Giongo, I. M., Quartieri, M. T., & Rehfeldt, M. J. H. (2013). *Problematizando o uso da Estimativa em aulas de Matemática da escola básica*. [Artigo]. 11º Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, Paraná.

Godino, J.D., Batanero, C. Font, V., Contreras, A., & Wilhelmi, M. R. (2016). *The theory of didactical suitability: Networking a system of didactics principles for mathematics education form different theoretical perspectives*. [Article]. 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg, Germany.

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM standards. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), A research companion to Principles and Standards for School Mathematics (pp. 5‑26). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Huinker D. (2002). Examining dimensions of fraction operation sense. In B. Litwiller (Ed.) *Making sense of fractions, ratios, and proportions.* National Council of Teachers of Mathematics.

Kelly, C. (2006). Using manipulatives in mathematical problem solving: A performance-based analysis. *The Mathematics Enthusiast*, *3*. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1049.

Kieren, T. E. (1980). *Five Faces of Mathematical Knowledge* Building. Department of Secondary Education, University of Alberta.

Lampert, M. (1988). What can research on teacher education tell us about improving quality in mathematics education? *Teaching and Teacher Education*, *4*(2), 157-170.

Li, Y.; Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: the case of fraction division. *ZDM, 40*(5), 833-843.

Lo, J. J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(6), 481-500 https://link.springer.com/journal/10857

Lopes, A. J. (2008). O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Bolema, 21*(31) 1-22.

Lubinski, C. A.; Fox, T.; Thomason, R. (1998). Learning to make sense of division of fractions: *One K-8 preservice teacher's perspective. School Science and Mathematics*, *98*(5), 247-251. https://www.semanticscholar.org/paper/Learning-to-Make-Sense-of-Division-of-Fractions%3A-Lubinski-Fox/241a78189841638524ae1776410ce0dd95216795.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum.

Menezes; Ribeiro (2023). *Pensar e fazer pesquisa na formação de professor com foco no Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor*. Campinas: Cognoscere.

Monger, W., Sander, G. P., & Tortora, E. (2021). Estudo sobre o uso da estimativa na resolução de tarefas matemáticas por alunos do quinto ano do Ensino Fundamental. *Revista De Educação Matemática, 18*, e021027.

Moreira, I. M. B. (2013). O ensino das operações com frações envolvendo calculadora. In *Anais do VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM)* (pp. 2996‐3005). Montevideo, Uruguai. http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1231.pdf

Moriel Junior, J. G. (2014). *Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações* (Tese de doutorado, Universidade Federal de Mato Grosso).

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14*(1), 89-107.

Mcintosh, A., Reys, B., & Reys, R. E. (1992). Uma proposta de quadro de referência para examinar o sentido básico de número. *For the Learning of Mathematics*, *1*(3), 1-17.

Newton, K. J. (2008). An Extensive Analysis of Preservice Elementary Teachers' Knowledge of Fractions. *American Educational Research Journal*, *45*(4), 1080-1110.

Özel, S. (2013). An Analysis of In-service Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Division of Fractions. Anthropologist, 16(1-2), 1-5.

Parra, C. (1996). Cálculo Mental na escola primária. In C. Parra, I. Saiz, I. (Orgs.) *Didática da Matemática*. Artmed.

Perez, B. F. (2009). Materiales para la enseñanza de las fracciones. *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas*, 24, 1-8.

Pinto, H., & Ribeiro, M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos ‐ o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas*, *33*(1), 77‐96.

Redmond, A. (2009). *Prospective elementary teachers' division of fractions understanding: A mixed methods study* (Doctoral thesis, University of Phoenix).

Ribeiro, M. (2018). Das generalidades às especificidades do conhecimento do professor que ensina matemática: Metodologias na conceitualização (entender e desenvolver) do conhecimento interpretativo. In *Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática* (Vol. 13, pp. 167‑185). Biblioteca do Educador / SBEM.

Ribeiro, M., Almeida, A., & Mellone, M. (2021). Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, *14*(35), 1‑32.

Rizvi, N. F., & Lawson, M. J. (2007). Prospective teachers' knowledge: Concept of division. *International Education Journal*, *8*(2), 377–392. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ834275.pdf

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

Segovia, I., & Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *17*(1), 449-536.

Serrazina, L., & Rodrigues, M. (2018). Formação de professores e desenvolvimento do sentido do número. In R. F. Carneiro, A. C. Souza, & L. F. Bertini (Orgs.), *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental*:

*Práticas de sala de aula e de formação de professores* (pp. 138-162). Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Sharp, J.; Garofalo, J.; Adams, B. (2002). Children's development of meaningful fraction algorithms: a kid's cookies and a puppy's pill. In B. Litwiller, G. Bright (Orgs.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions*: *Yearbook* (pp.18-28). NCTM.

Sharon, V. V., Swarthout, M. B. (2014, 27 February - 01 March). *Evaluating instruction for developing conceptual understanding of fraction division.* [Artigo]. 41th Annual Meeting of the Research Council on Mathematics Learning. San Antonio, Texas.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2017). Hard lessons: Why rational number arithmetic is so difficult for so many people. Current Directions in Psychological Science, 26(4), 346-351. https://doi.org/10.1177/0963721417700129

Simon, M. A. (1993). Prospective Elementary Teachers' Knowledge of Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 233-254.

Sosa, L., Guzmán, M. V., & Ribeiro, M. (2019). Conhecimento do professor sobre dificuldades de aprendizagem no tópico adição de expressões algébricas no Ensino Médio. *Educação Matemática Pesquisa*, *21*(3), 369-397.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research of Mathematics Education*, *31*(1) 5-25.