

# Tangram

Revista de Educação Matemática

DOI: 10.30612/tangram.v8i1.19146

## **Quadriláteros: uma experiência fedathiana utilizando o modelo de Van Hiele**

*Quadrilaterals: A Fedathian Experience Using the Van Hiele Model*

*Cuadriláteros: Una Experiencia Fedathiana Utilizando el Modelo de Van Hiele*

**Roberto da Rocha Miranda**

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Fortaleza, Ceará, Brasil

E-mail: robertouece@gmail.com

Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-8599-6745>

**Marcília Cavalcante Viana**

Secretaria Municipal de Ensino de Fortaleza (SME)

Fortaleza, Ceará, Brasil

E-mail: marciliaviana80@gmail.com

Orcid: <https://orcid.org/0009-0009-9809-1214>

**Antônio Marcelo Araújo Bezerra**

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Fortaleza, Ceará, Brasil

E-mail: macloab@gmail.com

Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-4407-9614>

**Maria José Costa dos Santos**

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Fortaleza, Ceará, Brasil

E-mail: mazzesantos@ufc.br

Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-9623-5549>

**Resumo:** A prática desenvolvida com estudantes do curso de Doutorado em Ensino de Matemática e Ciências (RENOEN) do Instituto Federal do Ceará (IFCE) envolveu quadriláteros e seu reconhecimento, definição e classificação, tendo como objetivo examinar como a articulação da Sequência Fedathi (SF) e da Realidade Aumentada (RA) pode contribuir para a progressão dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, no estudo dos quadriláteros. Metodologicamente, a pesquisa é qualitativa, de natureza básica, exploratória e de campo. A Sessão Didática (SD) elaborada para essa oficina seguiu os pressupostos da SF e da análise dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico do Modelo de Van Hiele. Concluiu-se que a maioria dos participantes conheceram o aplicativo Sólidos RA, com uma atividade pautada em problematizações. Nesse processo, percebemos uma transição do nível (1) Visualização para nível 2 (Análise), assim como do nível 2 (Análise) para o nível 3 (Dedução Informal), indicando que a ferramenta favorece melhorias no processo de ensino e aprendizagem de Geometria na Educação Básica, de modo a possibilitar um efetivo desenvolvimento do pensamento geométrico.

**Palavras-chave:** Quadriláteros. Modelo de Van Hiele. Sequência Fedathi. Realidade Aumentada.

**Abstract:** The practice developed with students of the Doctoral Program in Mathematics and Science Education (RENOEN) at the Federal Institute of Ceará (IFCE) involved quadrilaterals and their recognition, definition, and classification, aiming to examine how the articulation of the Fedathi Sequence (FS) and Augmented Reality (AR) can contribute to the progression of the Van Hiele levels of geometric thinking in the study of quadrilaterals. Methodologically, the research is qualitative, basic, exploratory, and field-based. The Didactic Session (DS) designed for this workshop followed the assumptions of the FS and the analysis of the Van Hiele model levels of geometric thinking. It was concluded that most participants became familiar with the Sólidos RA application through an activity based on problematizations. In this process, we observed a transition from level (1) Visualization to level (2) Analysis, as well as from level (2) Analysis to level (3) Informal Deduction, indicating that the tool promotes improvements in the teaching and learning process of Geometry in Basic Education, enabling an effective development of geometric thinking.

**Keywords:** Quadrilaterals. Van Hiele model. Fedathi sequence. Augmented reality.

**Resumen:** La práctica desarrollada con estudiantes del Doctorado en Enseñanza de Matemáticas y Ciencias (RENOEN) del Instituto Federal de Ceará (IFCE) involucró cuadriláteros y su reconocimiento, definición y clasificación, con el objetivo de examinar cómo la articulación de la Secuencia Fedathi (SF) y la Realidad Aumentada (RA) puede contribuir a la progresión de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico de Van Hiele en el estudio de los cuadriláteros. Metodológicamente, la investigación es cualitativa, básica,

## Universidade Federal da Grande Dourados

exploratoria y de campo. La Sesión Didáctica (SD) elaborada para este taller siguió los supuestos de la SF y del análisis de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico del Modelo de Van Hiele. Se concluyó que la mayoría de los participantes conocieron la aplicación Sólidos RA, mediante una actividad basada en problematizaciones. En este proceso, se percibió una transición del nivel (1) Visualización al nivel (2) Análisis, así como del nivel (2) Análisis al nivel (3) Deducción Informal, lo que indica que la herramienta favorece mejoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría en la Educación Básica, posibilitando un desarrollo efectivo del pensamiento geométrico.

**Palabras clave:** Cuadriláteros. Modelo de Van Hiele. Secuencia Federathi. Realidad aumentada.

**Recebido em** 08/03/2025  
**Aceito em** 10/07/2025

## INTRODUÇÃO

O ensino de Geometria enfrenta dificuldades, exigindo dos professores não apenas o domínio do conteúdo, mas a capacidade de inovar na sua prática pedagógica. Para superar essas dificuldades, pesquisadores como Santos (2022) ressaltam a importância da formação continuada, com foco na integração de tecnologias digitais.

Esses recursos, quando usados de forma intencional, podem engajar e motivar os estudantes, que são considerados "nativos digitais" (Prensky, 2012) por terem um contato natural com a tecnologia desde a infância. No entanto, estudos de Proença e Pirola (2009) mostram que, apesar desse contato, muitos estudantes ainda têm dificuldade em conceituar e classificar figuras geométricas, o que reforça a necessidade de o professor intervir de forma mais socialmente significada para melhorar o aprendizado dos conceitos geométricos.

Diante desse cenário, a vivência relatada no texto aborda o entrelace entre o Modelo de Van Hiele, a Sequência Fedathi (SF) e a Realidade Aumentada (RA). Possibilitando uma abordagem pedagógica para o ensino de Geometria, a partir de

tecnologias acessíveis como os smartphones dos próprios estudantes (Lopes et al., 2017; Soares, 2024).

A Realidade Aumentada (RA), que permite a interação de objetos virtuais com o ambiente real, foi a tecnologia escolhida, especificamente através do aplicativo Sólidos RA<sup>1</sup>. Este aplicativo, com seus cinco módulos (visualização, planificação, criação, modelagem e geoplano), foi selecionado por contribuir para a visualização espacial, uma das maiores dificuldades dos estudantes em Geometria (Pais, 2006; Soares, 2024; Santiago & Araújo, 2024). Além disso, a ferramenta estimula a exploração investigativa e a construção colaborativa do conhecimento (Moura et al., 2020; Santiago & Araújo, 2024).

Assim, a pesquisa teve como pergunta orientadora: Como a articulação da Sequência Fedathi e da Realidade Aumentada contribui para a progressão dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele no estudo dos quadriláteros?

A metodologia seguiu os princípios da Sequência Fedathi (SF), que propõe uma ruptura com o modelo de ensino baseado em metodologias de cunho transmissivas. Nessa abordagem, o professor deixa de ser o único detentor do conhecimento e passa a ser um mediador, incentivando o aluno a ser um agente ativo na construção de sua própria aprendizagem (Borges Neto, 2018). A SF busca instigar a curiosidade dos estudantes com problemas contextualizados, de acordo com seu nível cognitivo, em vez de oferecer respostas prontas.

A experiência estruturou-se em uma Sessão Didática (SD) realizada em 2023, com a participação de estudantes de Doutorado em Ensino de Matemática e Ciências (RENOEN) do Instituto Federal do Ceará (IFCE). A SD utilizou o aplicativo Sólidos RA para o estudo de quadriláteros, combinando a ferramenta tecnológica com o Modelo de Van Hiele para desenvolver o pensamento geométrico dos participantes.

---

<sup>1</sup> O aplicativo pode ser baixado em smartphones com o sistema Android, disponível na play Store, através do link: [https://play.google.com/store/apps/details?id=com.LuMu.Games.Sólidos.RAY & hl=pt\\_BR](https://play.google.com/store/apps/details?id=com.LuMu.Games.Sólidos.RAY&hl=pt_BR).

## **MODELO DE VAN HIELE E SEQUÊNCIA FEDATHI**

O modelo de Van Hiele, desenvolvido por Pierre e Dina Van Hiele (1957), apresenta uma teoria educacional que descreve os estágios de compreensão na aprendizagem da Geometria, sendo caracterizado por uma hierarquização dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico (Kaleff, 1994; 2011).

Esta abordagem reconhece que cada nível deve ser plenamente compreendido antes que se possa avançar para o próximo, promovendo assim uma estrutura sequencial e lógica no processo de ensino e aprendizagem.

Os cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico segundo o modelo de Van Hiele (1957; 1986) são: Visualização, Análise, Dedução Informal, Dedução Formal e Rigor. No primeiro nível, os estudantes têm a capacidade de identificar visualmente figuras geométricas e aprender o vocabulário relacionado, sem, entretanto, serem capazes de identificar suas propriedades. No segundo nível, os estudantes começam a reconhecer as propriedades das figuras, mas ainda não conseguem realizar inclusões de classes.

O terceiro nível, por sua vez, permite aos estudantes efetuar inclusões de classes e acompanhar provas de formações, embora não consigam construir tais provas de maneira autônoma. Já o quarto nível habilita os estudantes a realizar provas com maior nível de complexidade e estabelecer uma linha de raciocínio em um sistema matemático completo.

Por fim, o quinto nível é aquele em que o estudante compara diferentes sistemas baseados em diversos axiomas, incluindo as geometrias não euclidianas. Um aspecto fundamental a ser mencionado sobre este modelo é que a aprendizagem acontece de maneira sequencial, onde a progressão de um nível ao outro só é possível com a plena compreensão das habilidades do nível anterior.

Muitos professores sentem-se inseguros ao transitar do ensino de Álgebra para o ensino de Geometria, como discutido por Nasser (1992). A teórica argumenta que a

## **Universidade Federal da Grande Dourados**

abstração do ensino de Geometria evidencia esse problema e que apenas constatar as dificuldades é insuficiente sem a proposição de soluções. Nasser (1992) ainda versa que a dificuldade dos estudantes está ligada à falta de alinhamento entre os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, já que, em geral, o ensino é ministrado no já nível 3 do modelo, enquanto a maioria dos estudantes ainda não ultrapassa o nível 1.

Além dessa disparidade cognitiva, identificam-se outros obstáculos, como a dificuldade dos estudantes em reconhecer figuras geométricas por meio da visualização (Soares, 2024) e a subutilização de novas tecnologias pelos professores no processo de ensino-aprendizagem (Santiago & Araújo, 2024). Além de desafios de tópicos específicos, como o estudo de quadriláteros (Costa, 2016), nos quais há necessidade de uso de tecnologias aliadas a uma metodologia de ensino que favoreça o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes.

Essa disparidade resulta em um aprendizado meramente mecânico, baseado na memorização e repetição. Diante dessa situação, é necessário delinear o avanço intelectual do estudante, sugerindo atividades geométricas estruturadas de forma sequencial, que permitam o desenvolvimento gradativo de habilidades de raciocínio, representação e registro, assim como oportunidades para que expressem e comuniquem suas descobertas oralmente, usando um vocabulário apropriado à Matemática, alinhado ao nível de desenvolvimento do pensamento geométrico (Costa, 2016).

Nasser (2010) ressalta a importância dessa abordagem ao enfatizar que é necessário que os professores utilizem o modelo de Van Hiele para descobrir em que nível de raciocínio seus estudantes estão, a fim de que possam desenvolver sua prática pedagógica de maneira organizada e progressiva na Geometria.

Ao utilizar o modelo de Van Hiele, os professores podem planejar atividades com recursos tecnológicos que impulsionam o avanço dos estudantes na compreensão da Geometria, conforme aponta Costa (2016). Esse modelo, segundo Leivas (2009), é



## Universidade Federal da Grande Dourados

uma base sólida para a prática docente, pois além de estruturar a compreensão geométrica, também apoia o professor na reflexão e planejamento de suas aulas.

Para que a aprendizagem seja efetiva, é essencial a análise ambiental, que prepara o ambiente necessário para a Sessão Didática (SD). Conforme Santos (2022), a SD, constitui o planejamento no contexto da SF, é um espaço reflexivo mediado pelo professor, que incentiva o estudante a ser um pesquisador, capaz de analisar, argumentar e validar suas próprias descobertas matemáticas.

A análise ambiental, portanto, abrange as condições externas e o contexto necessários para o sucesso da SD. Isso inclui o espaço físico, recursos materiais e tecnológicos, a organização dos participantes e o tempo, garantindo que a aula atinja seus objetivos.

Outro ponto importante é a análise teórica, concebida por Santos (2022), como o planejamento conceitual da aula. Nela, o professor define os conteúdos, objetivos, hipóteses e possíveis caminhos a serem seguidos durante a SD. Trazendo esse conceito para o contexto da pesquisa, na oficina pedagógica ministrada, a análise ambiental foi garantida por meio da organização do espaço em grupos, do uso de dispositivos móveis com o aplicativo Sólidos RA instalado e da alocação de duas horas para a vivência *fedathiana*.

Esse momento de preparação foi de suma importância para o cumprimento dos objetivos de aprendizagem e dos níveis almejados. Na fase conhecida como Tomada de Posição, o professor abordou uma situação-problema a partir do *plateau*, um ponto de partida essencial para iniciar a SD. É importante não confundir *plateau* com os conhecimentos prévios dos estudantes, pois ele pode ser criado previamente, como na familiarização dos estudantes com uma nova ferramenta tecnológica.

Em seguida, houve o acordo didático, um momento em que o professor apresentou os objetivos da atividade, a metodologia, a formação das equipes, os materiais, o tempo de aula e outros detalhes, como sugere Santos (2017).

## **Universidade Federal da Grande Dourados**

O acordo didático é um momento em que o professor discorre sobre os objetivos da atividade, o que será feito, a quantidade de pessoas em cada equipe, material distribuído para cada equipe, o tempo da aula e entre outros, como aponta Santos (2017). Na maturação, os estudantes se debruçaram sobre a(s) situações-problema proposta(s) para que eles possam conjecturar, desenvolver hipóteses, argumentar com os seus colegas e fazer perguntas ao professor.

Na fase de maturação, os estudantes se debruçaram sobre a situação-problema proposta. Foi nesse momento que eles conjecturaram, desenvolveram hipóteses, argumentaram com os colegas e fizeram perguntas ao professor. Para Sousa (2015), a pergunta, na vivência fedathiana, atua como instrumento de mediação, conduzindo o aluno a refletir, investigar e construir progressivamente o conhecimento matemático. Não se trata apenas de verificar respostas, mas de provocar o raciocínio, estimular a argumentação e criar condições para que o estudante avance em seus níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico.

Na fase da solução, os estudantes apresentam suas resoluções para a situação-problema, argumentando e sintetizando o trabalho da equipe. Essa discussão em grupo é fundamental, pois permite identificar erros coletivamente, gerando um momento de reinvestimento em que os estudantes podem aprender de forma reflexiva a partir das falhas.

Para a fase de prova, corroborou-se com o raciocínio de Souza (2010), que enfatiza que o professor traz uma análise sistemática da resolução da situação proposta, podendo inferir sobre o que foi exposto pelos estudantes e principalmente trazer elementos que foram trabalhados em todo processo, enriquecendo o vocabulário dos estudantes, por meio da matematização, com uma linguagem pertinente aquele nível de raciocínio dos estudantes. Foi nesse momento que os estudantes e o próprio professor avaliaram toda a vivência fedathiana, o que permitiu identificar pontos de melhoria para futuras vivências com outras turmas que trabalhassem a mesma temática.



## **METODOLOGIA**

A pesquisa contemplou aspectos qualitativos, em virtude de sua dedicação à análise de dados com foco no significado e na percepção do fenômeno em seu contexto, como apontam Prodanov e Freitas (2013). Quanto à sua natureza, a pesquisa foi classificada como básica, pois seu objetivo é gerar novos conhecimentos que contribuam para o avanço científico, independentemente de uma aplicação prática imediata (Prodanov & Freitas, 2013).

Assim, primeiramente, a SD foi consolidada por meio de uma oficina pedagógica, entendida como um espaço formativo que possibilita o entrelace entre teoria e prática, em que os participantes são instigados a experimentar, refletir e reelaborar estratégias de ensino (Santos, 2022). Nesse ambiente, o estudante assume uma postura ativa, investigativa e colaborativa, construindo conhecimento a partir de uma vivência multilateral. Conforme Santos (2022), as oficinas pedagógicas favorecem a reflexão crítica sobre a prática docente, promovem o protagonismo dos estudantes envolvidos e ampliam as possibilidades de inovação pedagógica no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Antes da oficina, foram realizadas a análise ambiental e a análise teórica. A análise ambiental, que garante as condições externas necessárias para a vivência, assegurou a organização do espaço de trabalho em grupos, a disponibilização de dispositivos móveis com o aplicativo Sólidos RA já instalado e a definição de um tempo de duas horas para a realização da SD.

A análise teórica contemplou o planejamento conceitual da aula. Incluiu o estudo dos atributos definidores dos quadriláteros, a formulação de perguntas problematizadoras sobre as diferenças e semelhanças entre as figuras, e a previsão de como a manipulação de sólidos tridimensionais em realidade aumentada (RA) poderia impulsionar o avanço dos estudantes nos níveis do modelo de Van Hiele. Juntas, essas análises garantiram a estrutura necessária para a vivência, unindo a Realidade Aumentada e a Sequência Fedathi no desenvolvimento do pensamento geométrico proposto por Van Hiele (1957; 1986).

## **Universidade Federal da Grande Dourados**

A utilização de sólidos tridimensionais em RA se justifica pela possibilidade de visualização e manipulação em tempo real, favorecendo a compreensão dos atributos geométricos de forma interativa e lúdica. Segundo Santiago e Araújo (2024), a RA contribui para a habilidade de visualização geométrica, considerada um dos principais obstáculos no ensino da Geometria (Pais, 2006; Gravina, 1996).

Além disso, a tecnologia permite que o estudante identifique as propriedades dos quadriláteros a partir da interação com representações virtuais sobrepostas ao espaço real, promovendo maior engajamento e uma aprendizagem contextualizada. A oficina seguiu as etapas da Sequência Fedathi: Tomada de Posição (20 minutos): Momento de apresentação do problema, exposição inicial dos quadriláteros e exploração livre no aplicativo Sólidos RA.

Maturação (40 minutos): Fase de discussão em grupo e formulação de hipóteses sobre os atributos definidores dos quadriláteros. O professor mediou a discussão com perguntas orientadoras, como: "Como podemos diferenciar um quadrado de um losango apenas pela observação das propriedades?" e "Quais atributos são indispensáveis para que uma figura seja considerada paralelogramo?". Essas perguntas tiveram como objetivo colocar o aluno em uma posição investigativa, em consonância com a postura defendida pela Sequência Fedathi (SF) (Santos, 2022).

Solução (40 minutos): Os estudantes construíram e manipularam sólidos tridimensionais no módulo de modelagem do aplicativo, identificando propriedades e comparando figuras.

Prova (20 minutos): Nesta etapa, houve a formalização dos conceitos geométricos e a validação coletiva dos conceitos trabalhados.

Os dados foram coletados por meio de respostas dos participantes via Google *Forms* e analisados seguindo as fases da Análise de Conteúdo de Bardin (2016). As etapas desse processo podem ser compreendidas em três fases principais, iniciando pela pré-análise, que envolve a organização inicial dos dados, em que o pesquisador

## **Universidade Federal da Grande Dourados**

define o problema de pesquisa, seleciona os documentos ou conteúdo a serem analisados e estabelece os objetivos (Bardin, 2016).

A segunda fase, exploração do material, demanda uma leitura detalhada e rigorosa do conteúdo selecionado. Nessa etapa, a análise se realizou por meio da codificação, categorizando os dados que emergem durante a leitura. As categorias criadas são fundamentadas nos objetivos da pesquisa e nas hipóteses levantadas anteriormente.

Por fim, o tratamento dos resultados, em que os dados agrupados e classificados são interpretados em relação às questões de pesquisa formuladas. Neste momento, busca-se relacionar os resultados obtidos com o contexto teórico e com as discussões já existentes na literatura. O pesquisador, então, é levado a elaborar conclusões, considerar as implicações dos dados analisados e propor recomendações ou sugestões para futuras investigações.

## **RESULTADOS**

A seção aborda a análise dos resultados obtidos, discutindo como a integração da Realidade Aumentada e da Sequência Fedathi contribuiu para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos participantes da oficina.

Dos 14 participantes, 78,6% (11 pessoas) já conheciam a tecnologia de Realidade Aumentada. Apenas 14,3% (2 pessoas) a conheciam de forma parcial, e 7,1% (1 pessoa) não tinham conhecimento prévio sobre a tecnologia. Conforme Soares (2022), a Realidade Aumentada (RA) é uma tecnologia que mescla elementos do mundo real com elementos digitais, proporcionando uma experiência interativa e imersiva.

## Universidade Federal da Grande Dourados

O momento de interação possibilitou a colaboração entre os estudantes, com o intuito de contemplar o máximo de figuras geométricas que se enquadravam como quadriláteros. Foi necessário que o professor estimulasse o processo de investigação por meio de perguntas como: "Só existem esses quadriláteros?", "Quais propriedades estas figuras têm em comum para se enquadrar na família dos quadriláteros?" e "Quais quadriláteros foram desenhados pelos estudantes? Como são chamados?".

O professor também utilizou contraexemplos como ferramenta de mediação. Para os estudantes que afirmavam que só existiam aqueles quadriláteros, foram lançados contraexemplos (dardo e pipa), para que eles pudessem refletir sobre a afirmação que fizeram, desequilibrando-os para avançarem no conceito.

A partir desses questionamentos, foi elaborado o *plateau*. Nele, estabeleceu-se que os estudantes pudessem experienciar o Sólidos RA na sala de aula. Para isso, eles baixaram o aplicativo e receberam envelopes numerados de 1 a 5, referentes a cada módulo, para se familiarizarem com a ferramenta. Após o acordo didático, que determinou o tempo para desenvolver as soluções, o problema inicial consistiu em identificar, a partir do Módulo 1 - Visualização, os quadriláteros. A seguir, a Figura 1 destacou alguns registros dos sólidos geométricos disponíveis via QR Code, demonstrando a representação dos sólidos que contêm quadriláteros.



**Figura 1.** Representação em RA dos sólidos geométricos que contêm quadriláteros.

Fonte: Elaborada pelos autores (2025).

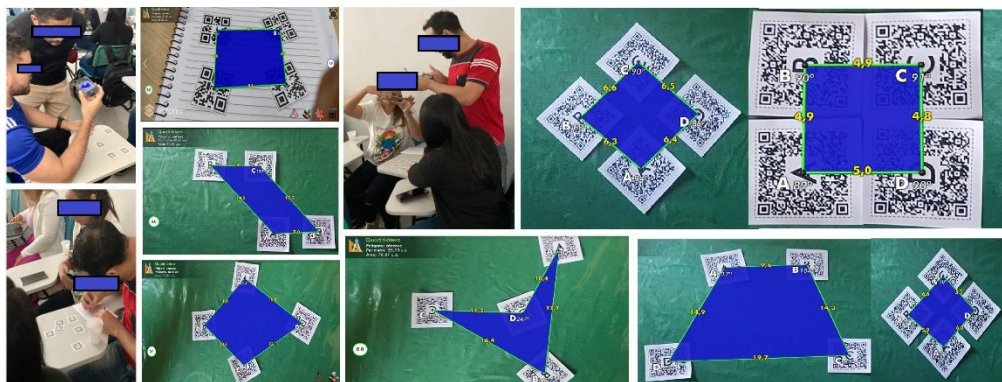
## Universidade Federal da Grande Dourados

Os estudantes, além de identificarem quadrados, retângulos e trapézios, em figuras espaciais, perceberam algo a mais: a existência de uma relação entre os quadriláteros e a classe dessas figuras espaciais geométricas, conforme enfatizado pelo estudante 1 (A1):

*- Professor, percebi que as figuras que possuem retângulos nas faces laterais se enquadram na classe de prismas, enquanto os sólidos geométricos que cujas faces laterais são trapézios, por sua vez, se enquadram nos troncos de pirâmides, da mesma forma quando se obtém paralelogramos nas faces laterais, temos prismas oblíquos.*

No segundo momento, eles usaram o Módulo 3 - Modelagem para construir quadriláteros e analisar suas características, para que a partir desses atributos, construíssem um conceito. Os QR Codes recortados com as letras A, B, C, D e E foram de fundamental importância, pois em uma ordem lógica dos vértices do polígono criado, uma das letras indicadas por R, cria o círculo.

Essa experiência fez com que os estudantes mobilizassem conhecimentos para o desenvolvimento do conceito de alguns quadriláteros. Na Figura 2, temos algumas dessas construções.



**Figura 2.** Representação das soluções da tomada de posição.

Fonte: Elaborada pelos autores (2025).

Além disso, o aplicativo, junto à mediação fedathiana favoreceu uma melhor apresentação de quadriláteros notáveis, que são categorias especiais desse tipo de figura, cada uma com características próprias. Os pós-graduandos enfatizaram que o



## Universidade Federal da Grande Dourados

quadrado, por exemplo, possui todos os lados com o mesmo comprimento e ângulos retos, servindo como um caso especial de retângulo e de losango. Em outras falas, enfatizaram que “o retângulo, por sua vez, tem lados opostos com o mesmo comprimento e ângulos retos, sendo também um quadrilátero convexo”.

Em outros momentos eles relataram que “o losango apresenta a particularidade de ter todos os lados com o mesmo comprimento, embora seus ângulos não necessariamente sejam retos, sendo que os ângulos opostos são iguais”. Outros afirmaram que “o trapézio é caracterizado por ter pelo menos um par de lados opostos paralelos, incluindo o trapézio isósceles, onde os lados não paralelos são iguais”. Por fim, eles mostram que “o paralelogramo possui lados opostos iguais e paralelos, com ângulos opostos também iguais, incluindo em sua definição quadrados e retângulos”.

Percebemos essas mobilizações de propriedades por meio das situações propostas pela tomada de posição, junto à RA, que possibilitaram que os estudantes elencassem atributos, o que corrobora com os autores Proença e Pirola (2009), uma vez que as múltiplas situações didáticas podem auxiliar os estudantes a identificar e depois fazer relações por meio da mediação com uso de perguntas, o que configura uma transição dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico do modelo de Van Hiele entre o 1 (Visualização) e 2 (Análise) e entre 2 (Análise) e 3 (Dedução Informal).

A análise das contribuições da RA e suas implicações nas falas apresentadas destaca diversos pontos de relação com a teoria de Van Hiele. Primeiramente, no que se refere à visualização e compreensão, evidenciada por A1 e A8 (Tabela 1, observa-se que a RA é eficaz na representação de figuras geométricas de maneira mais tangível. Essa capacidade de visualização 3D facilita o reconhecimento visual, essencial para o primeiro nível de Van Hiele, e também pode auxiliar na transição para o segundo nível, onde as propriedades das figuras começam a ser descritas.

**Tabela 1** Contribuições da RA/SF no desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, segundo os estudantes de Doutorado em Ensino de Matemática e Ciências (RENOEN).



**Contribuições da Realidade Aumentada /SF para o desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele.**

- A1: Ajuda na visualização e, posteriormente, na compreensão.
- A2: É um facilitador do processo de ensino e aprendizagem
- A3: Permite explorar propriedades e teoremas.
- A4: Permite ter outra perspectiva sobre como abordar conteúdos de Geometria
- A5: Esse recurso permite a exploração de diversos conceitos da Geometria euclidiana, definição de quadriláteros, polígonos, sólidos, ângulos, área, perímetro.
- A6: Auxilia na compreensão da Geometria
- A7: Possibilita que o aluno consiga visualizar propriedades e elementos do objeto, facilitando seu entendimento, o que proporciona um maior entendimento do enunciado do problema.
- A8: Visualização para posterior compreensão dos conceitos.
- A9: Permite que o aluno comece a visualizar e identificar as figuras geométricas em formato 3D, relacionado com figuras que ele conhece no seu cotidiano, para em seguida, avançar para outras etapas do desenvolvimento, que são mais complexas e exigem maior grau de abstração
- A10: O aplicativo de realidade aumentada Sólidos RA pode ajudar no desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele ao proporcionar uma experiência visual e interativa, permitindo aos usuários explorar e manipular sólidos tridimensionais em um ambiente virtual. Isso pode facilitar a transição entre diferentes níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, conforme proposto pela teoria de Van Hiele, que descreve os estágios de desenvolvimento cognitivo na geometria.
- A11: Permite o aluno compreender melhor as atividades relacionadas à Geometria.
- A12: A proposta de pensamento abordada foi muito interessante, irei aperfeiçoar para aplicar nas aulas de física e de robótica. O aplicativo é muito interessante e a abordagem me mostrou outro meio de inserir conteúdos nas aulas.
- A13: O recurso auxilia o aluno a atingir a última etapa, a compreensão dos conceitos matemáticos.

Fonte: Elaborado pelos autores, 2025.

Além disso, a RA agiu como facilitadora do ensino e da exploração, conforme mencionado por A2 e A3. Essa tecnologia permite que os estudantes explorem propriedades e teoremas de forma interativa, alinhando-se ao avanço esperado no terceiro nível de Van Hiele, que envolve classificação e exploração de relações geométricas. A interação visual e manipulativa proporcionada pela RA solidifica a hierarquia de classificações e relações, favorecendo a aprendizagem.

A perspectiva inovadora que a RA proporciona, como destacado em A4, permite que os estudantes abordem conteúdos de diferentes maneiras, facilitando a transição entre os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Essa variedade pedagógica é importante para promover uma compreensão mais elaborada, ampliando as formas pelas quais as figuras geométricas podem ser vistas e entendidas.

## **Universidade Federal da Grande Dourados**

Sobre a exploração de conceitos, conforme A5 e A6, a RA possibilitou uma interação direta com objetos, promovendo o entendimento de conceitos fundamentais da Geometria euclidiana. Essa interação é especialmente relevante para a transição entre o segundo e o terceiro nível de Van Hiele. Já A7 e A9 demonstraram que a capacidade de visualizar características dos sólidos e relacioná-las ao cotidiano é um passo importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico e mais abstrato, habilidades essenciais para os níveis mais altos do modelo de Van Hiele(1957; 1986).

Essa relação entre o concreto e o abstrato é fundamental para que os estudantes desenvolvam uma compreensão mais robusta dos conceitos matemáticos. A experiência visual e interativa promovida pelo aplicativo Sólidos RA, discutida em A10, serve como um forte impulsionador na progressão através dos níveis do modelo de Van Hiele. A manipulação de objetos em 3D permite que os estudantes compreendam melhor relações e deduções.

Da mesma forma, A11 identificou que o recurso auxilia na compreensão das atividades geométricas, indicando que os estudantes estão começando a relacionar suas experiências práticas com o conhecimento teórico, avançando, assim, em direção ao terceiro e quatro níveis do modelo de Van Hiele. Ademais, a aplicação da RA em diferentes disciplinas, como Física e Robótica, conforme A12, sugere que a RA pode expandir o uso do conhecimento geométrico além da Geometria pura, integrando diferentes áreas do saber.

Finalmente, a afirmação de que a RA pôde auxiliar os estudantes a alcançar uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, como dito por A13, é um reflexo do quinto nível de Van Hiele, onde dedução e lógica se tornam parte do processo de raciocínio geométrico. Em síntese, as falas sobre as contribuições da RA indicam que esse recurso tem o potencial de facilitar a transição entre os níveis do modelo de Van Hiele, promovendo uma maior visualização, exploração interativa e conexão com o cotidiano.

Destarte, a mediação por meio das perguntas e contraexemplos instigou os estudantes à reflexão e criação de suas hipóteses, motivando-os a argumentar de

## Universidade Federal da Grande Dourados

forma crítica, trazendo a percepção de que há outros além dos quadriláteros notáveis, como por exemplo, a pipa e o dardo.

Além disso, auxiliou na compreensão do erro no processo de construção das soluções, tendo em vista o porquê do erro e como erraram, transformando aquilo que estava equivocado em um ponto de ignição para que a aprendizagem ocorresse. Assim, a RA no ensino de Matemática não apenas aprimora a capacidade dos estudantes de reconhecer e descrever formas, mas também apoia o desenvolvimento de habilidades mais complexas, como a dedução e a argumentação. Essa abordagem os ajuda a compreender as características que definem os quadriláteros, o que é crucial para avançar nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico propostos pelo modelo de Van Hiele.

Infere-se, portanto, que a RA, quando combinada com a sala de aula invertida (SF), se torna um recurso didático e metodológico valioso para educadores que desejam aprofundar o conhecimento geométrico de seus estudantes.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a vivência da oficina pedagógica, foi possível responder à pergunta orientadora desta pesquisa, que questionava como a articulação da Sequência Fedathi e da Realidade Aumentada contribui para a progressão dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele no estudo dos quadriláteros.

Constatou-se que a oficina pedagógica, ao valorizar os conhecimentos prévios e a individualidade dos estudantes, rompe com o modelo tradicional de ensino, que é centrado na transmissão de conteúdo. Nesse processo, as perguntas e os contraexemplos mostraram-se estratégias fundamentais de mediação docente, pois conduziram os estudantes de doutorado à reflexão crítica, à formulação de hipóteses e à validação de suas próprias conjecturas. O erro, longe de ser considerado uma

## **Universidade Federal da Grande Dourados**

falha, foi ressignificado como oportunidade de aprendizagem, o que favoreceu o avanço conceitual.

A interação entre o concreto (objetos manipuláveis em Realidade Aumentada) e o abstrato (propriedades, definições e classificações) mostrou-se essencial para consolidar atributos definidores dos quadriláteros, ampliando a compreensão para além dos quadriláteros notáveis, ao incluir figuras como a pipa e o dardo.

A utilização do aplicativo Sólidos RA possibilitou a visualização, a manipulação e a modelagem de figuras geométricas em 3D, promovendo avanços nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico descritos por Van Hiele, sobretudo nos três primeiros níveis: visualização, análise e classificação. Outro aspecto relevante foi a constatação de que a Realidade Aumentada não apenas enriquece o reconhecimento inicial de propriedades geométricas, mas também apoia o desenvolvimento de competências mais sofisticadas, como a argumentação, a dedução e a generalização matemática.

Assim, pode-se concluir que a integração entre a Teoria de Van Hiele, a Metodologia da Sequência Fedathi e o uso da Realidade Aumentada se configura como uma proposta metodológica inovadora para o ensino de Geometria. Essa tríade favorece o desenvolvimento do pensamento geométrico em níveis hierárquicos de complexidade, assegura maior protagonismo ao aluno e dinamiza o processo de ensino e aprendizagem, contribuindo para a construção do conhecimento geométrico. O foco é que o aluno aprenda em um nível para avançar para o nível subsequente, tornando o processo mais dinâmico e socialmente significativo.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradecemos à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP), ao Grupo de Estudos Tecendo Redes Cognitivas de Aprendizagem (G-TERCOA/CNPq), à Universidade Federal do Ceará (UFC), à Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC), a Secretária de Ciência, Tecnologia e Educação Superior do Ceará (Secitece) e à Secretaria Municipal de Educação de Fortaleza (SME).

## REFERÊNCIAS

- Bardin, L. (2016). *Análise de conteúdo*. Edições 70.
- Borges Neto, H. (2018). *Sequência Fedathi: fundamentos*. (Coleção Sequência Fedathi, v. 3, n. 1). CRV.
- Costa, A. (2016). *A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana*. 2016. 243f Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco.
- Gravina, M. A. (1996). *Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria*. In Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (pp. 1–13). Belo Horizonte, Brasil.
- Kaleff, A. M. M. R. et al. (2011). *Visualizando e modelando poliedros de mesmo volume: brincando com luzes e sombras*. Experimento Educacional Banco Internacional de Objetos Educacionais. Projeto Condigital MEC - MCT. Projeto CDME - UFF – Matemática.
- Kaleff, A. M. M. R., Henriques, A. de S., Rei, D. M., Figueiredo, L. G. (1994). Desenvolvimento do pensamento geométrico – O modelo de Van Hiele. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, v.9 n.10, p.1-8.
- Lopes, T. B., de Oliveira, R. de F. S., Costa, A. B., & Leão, M. F. (2017). Ensinar área de quadriláteros regulares baseado no modelo de Van Hiele. *Revista BOEM*, 5(9), 18–39. <https://doi.org/10.5965/2357724X05092017018>.
- Moura, L. K. J., Krindges, A., & Wielewski, G. D. (2020). As vantagens do modelo de Van Hiele no ensino de geometria. *Educação Matemática Em Revista - RS*, 2(21). <https://doi.org/10.37001/EMR-RS.v.2n.21.2020.p.56-65>.

**Universidade Federal da Grande Dourados**

Pais, L. C. (2006). *Ensinar e aprender matemática*. Autêntica.

Proença, M. C. De; Pirola, N. A. (2009). Um estudo sobre o desempenho e as dificuldades apresentadas por alunos do ensino médio na identificação de atributos definidores de polígonos. *Zetetiké*, Campinas, v.17, n. 31, p. 11-46.

Provanov, C. C.; Freitas, E. F. (2013) *Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas de pesquisa e do trabalho acadêmico*. 2. ed. Novo Hamburgo: Universidade Feevale, 2013.

Nasser, L. (1992). *Using the van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brazil*. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – London King's College, University of London, London, 1992

Nasser, L.; Sant'Anna, N. F. P. (2010). *Geometria segundo a teoria de Van Hiele*. 2ª ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ.

Prensky, M. (2012). *Aprendizagem baseada em jogos digitais* (Yamagute, E. Trad) São Paulo; Editora Senac.

Santiago, P.V.S; Araújo, F.C. (2024). Realidade aumentada no Ensino de Sólidos Geométricos para o Ensino Fundamental: relato de experiência em uma escola pública de Fortaleza-CE-Brasil. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, v. 29, n. 82, p. 1–15.

Santos, M.J. (2017). A formação do professor de matemática: metodologia sequência fedathi(sf). *Revista Lusófona de Educação*, Lisboa, v. 38.

Santos, M.J. (2022). *Ensino de Matemática: Discussões teóricas e experiências formativas exitosas para professores do Ensino Fundamental*. CRV.



**Universidade Federal da Grande Dourados**

Soares, F.R; Santana,J.R; Santos, M.J.C.(2024).A realidade aumentada contribuindo para a formação de professores mediado pela metodologia sequência fedathi.Revista de Educação Ciências e Matemática,Rio de Janeiro,v.14,n.1,p.1-21.

Sousa, F.E.E. (2015). *A pergunta como estratégia de mediação didática no ensino de matemática por meio da Sequência Fedathi*. 2015. 283f. – Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira, Fortaleza (CE).

Souza, M.J.A. (2010). *Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da geometria mediada por tecnologias digitais*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira Fortaleza-CE.

Van-Hiele Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of secondary school*. (Doctorate). University Utrecht, 1957b.

Van-Hiele, P. (1957). *De problematiek van het inzicht*. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof. (Doctorate). University Utrecht.

Van-Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight*. Academic Press Orlando, FL, USA.