Tangram
Revista de Educação Matemática

DOI: 10.30612/tangram.v7i3.18851

Álgebra en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido algebraico

Algebra in early childhood and primary school: Ten essential manipulatives for developing algebraic sense

Álgebra no ensino pré-primário e primário: dez manipuladores essenciais para desenvolver o sentido algébrico

Ángel Alsina
Universidad de Girona, Cátedra de Didáctica de las Matemáticas Mª. A. Canals
Girona, España
E-mail: angel.alsina@udg.edu
Orcid: 0000-0001-8506-1838

Ester Bosch
Universidad de Girona, Gabinet de Materials i de Recerca per la Matemàtica a l'Escola
Girona, España
E-mail: ebosch16@xtec.cat
Orcid: 0000-0001-7169-0924

Resumen: El álgebra es el estándar de contenidos que, históricamente y de manera errónea, se ha asociado exclusivamente al simbolismo y a la abstracción. Su reciente incorporación en los currículos de infantil y primaria responde a la necesidad de desarrollar progresivamente el sentido algebraico desde las primeras edades, para que la ciudadanía movilice habilidades mentales como la estructuración, la organización, la ordenación, la predicción, la generalización…, todas ellas imprescindibles tanto para la comprensión de las matemáticas como del mundo en general. Con el propósito de ayudar al profesorado de las primeras etapas a conseguir este reto tan relevante, en la primera parte de este artículo se describen los conocimientos importantes para desarrollar el sentido algebraico; y, en la segunda parte, se presenta una selección de diez materiales manipulativos esenciales, a partir de criterios de contenido, de finalidades didácticas y de tipo de material. Para cada material, se describen diversas actividades por grupos de edad: 3-6 años; 6-8 años; 8-10 años; 10-12 años.

Palabras clave: Álgebra. Sentido algebraico. Materiales manipulativos. Educación Infantil. Educación Primaria.

Abstract: Algebra is the standard of content that, historically and erroneously, has been associated exclusively with symbolism and abstraction. Its recent incorporation into the early childhood and primary school curricula responds to the need to progressively develop the algebraic sense from the earliest ages, so that citizens mobilise mental skills such as structuring, organisation, ordering, prediction, generalisation..., all of which are essential both for understanding mathematics and the world in general. With the aim of helping early childhood teachers to achieve this important challenge, the first part of this article describes the important knowledge for developing algebraic sense; and, in the second part, a selection of ten essential manipulative materials is presented, based on criteria of content, pedagogical purposes and type of material. For each material, various activities are described by age: 3-6 years; 6-8 years; 8-10 years; 10-12 years.

Keywords: Algebra. Algebraic sense. Manipulative materials. Early Childhood Education. Primary Education.

Resumo: A álgebra é o bloco de conteúdo que, histórica e erroneamente, tem sido associado exclusivamente ao simbolismo e à abstração. Sua recente incorporação aos currículos da educação infantil e do ensino fundamental responde à necessidade de desenvolver progressivamente o senso algébrico desde as primeiras idades, para que os cidadãos mobilizem habilidades mentais como estruturação, organização, ordenação, previsão, generalização..., todas elas essenciais para a compreensão da matemática e do mundo em geral. A fim de ajudar os professores da primeira infância a alcançar esse importante desafio, a primeira parte deste artigo descreve os conhecimentos importantes para o desenvolvimento do senso algébrico; e, na segunda parte, é apresentada uma seleção de dez materiais manipulativos essenciais, com base em critérios de conteúdo, propósitos didáticos e tipo de material. Para cada material, as atividades são descritas por grupo etário: 3-6 anos; 6-8 anos; 8-10 anos; 10-12 anos.

Palavras-chave: Álgebra. Senso estocástico. Materiais manipuladores. Educação pré-escolar. Ensino primário.

Recebido em
21/05/2024
Aceito em
11/08/2024

INTRODUCCIÓN

La importancia del álgebra radica en que permite desarrollar habilidades mentales o modos de pensamiento que ayudan tanto a comprender las matemáticas como el mundo en general, razón por la cual es imprescindible su enseñanza desde edades tempranas. Los tipos de pensamiento algebraico que se empiezan a desarrollar a partir de la incorporación del álgebra en las aulas de infantil y primaria son básicamente tres (e.g., Cañadas y Molina, 2016; Dumas et al., 2013; Lüken y Sauzet, 2020; Wijns et al., 2019): 1) *recursivo,* permite observar la relación entre los elementos consecutivos de una secuencia pudiendo anticipar el elemento desconocido que prosigue; 2) *relacional,* permite hacer comparaciones y reconocer similitudes y diferencias para discernir estructuras y patrones significativos que subyacen a la información; y 3) *funcional,* permite identificar, predecir y abstraer la regla subyacente de una secuencia; y, a su vez, comprender cómo varían las cantidades entre sí, prestando atención al cambio y a la función, como una forma de expresar esta variación.

El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) de Estados Unidos es el organismo que ha impulsado de manera más clara la presencia del álgebra en el currículo de matemáticas de las primeras edades, al proponer de forma pionera y explícita estándares de contenido de álgebra a partir de los 3 años (NCTM, 2003). Después, le han seguido otros países como Australia, Chile o Singapur (Pincheira y Alsina, 2021).

En línea con esta "algebrización" del currículo de las primeras etapas, el objetivo de este artículo es describir los conocimientos importantes para desarrollar el sentido algebraico en infantil y primaria y presentar diez materiales manipulativos esenciales para llevar a cabo una enseñanza ajustada a las necesidades de las niñas y los niños de estas edades. Para la selección de los diez materiales manipulativos se han considerado criterios de contenido, de finalidades didácticas y de tipo de material, siguiendo los mismos criterios que en los artículos anteriores de esta misma serie (Alsina y Bosch, 2022, Alsina y Bosch, 2023): se han seleccionado materiales abiertos, que permitan realizar actividades variadas y usar el mismo material para diferentes edades. También se ha tenido en cuenta que fuesen materiales de fácil acceso, relativamente económicos y que, en el caso de no poder disponer del recurso comercializado, se pudiera crear manualmente un material parecido. Pero el criterio más importante es que con un mismo material se puedan plantear propuestas didácticas que permitan no solo practicar conceptos sino descubrirlos experimentando, visualizarlos para tener referencias, crear conexiones e investigar.

ÁLGEBRA Y SENTIDO ALGEBRAICO DE 3 A 12 AÑOS: CONOCIMIENTOS IMPORTANTES

Educación Infantil (3-6 años)

Pincheira y Alsina (2021) se refieren a tres tipos de conocimientos: 1) Relaciones a partir del conocimiento de atributos; 2) Patrones de repetición; 3) Descripción de cambios.

Relaciones a partir del reconocimiento de atributos.

El reconocimiento de atributos es un conocimiento físico que permite a los niños de las primeras edades familiarizarse con las características de los objetos del entorno: color, tamaño, tipo de material, etc. La identificación de estos atributos (p. ej., rojo, grande, de madera, etc.) es indispensable para empezar a agrupar elementos por un atributo común (p. ej., todos los rojos), que es la puerta de entrada a las relaciones, ya se empiezan a reconocer semejanzas y diferencias entre los objetos (Alsina, 2022). Así, pues, este conocimiento físico preliminar -que no es un conocimiento algebraico- es la antesala de un conocimiento que, de acuerdo con los currículos de diversos países como Australia, Chile, Estados Unidos o Singapur, sí lo es: las relaciones. Las primeras relaciones (cualitativas o cuantitativas) son de diversos tipos:

- Relaciones de equivalencia: son una relación binaria R en una agrupación de elementos A. En el lenguaje coloquial, se denominan clasificaciones.
- Relaciones de orden: son una relación binaria R, en una agrupación de elementos A. En el lenguaje coloquial, se denominan ordenaciones.
- Correspondencias: son una ley que asocia determinados elementos de una agrupación A a uno o más elementos de otra agrupación B. La agrupación A es la agrupación de origen y la B es la agrupación de la correspondencia de A en B. Hay diversos tipos de correspondencia (biyectiva, suprayectiva, inyectiva…), aunque la más típica a las primeras edades es la biyectiva, que se caracteriza por el hecho de que cada uno de los elementos de la agrupación A se relaciona con un elemento de la agrupación B.

En su conjunto, estos conocimientos promueven sobre todo el pensamiento relacional (Pincheira et al, 2023).

Patrones de repetición: identificación, construcción y representación del patrón.

Según Mulligan y Mitchelmore (2009) un patrón es una regularidad predecible, donde se combinan relaciones numéricas, espaciales o lógicas; y la estructura, la forma interna en que los diversos elementos de una regularidad se organizan y relacionan. Respecto a la naturaleza del patrón, Bock et al. (2018) exponen que pueden variar en función de su regularidad y contenido presentando unidades que se repiten, que crecen o que se ordenan de manera estructural o simétrica.

Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de los patrones, es recomendable realizar diferentes tipos de tareas según si requieren o no conocimiento de la estructura o regla subyacente. Acosta et al. (2022) y Pincheira et al. (2022) han secuenciado las tareas de patrones de repetición de 3 a 6 años, considerando las habilidades que movilizan (Figura 1). Como se observa, las distintas tareas con patrones de repetición en infantil permiten a los niños empezar a desarrollar el pensamiento recursivo, relacional y funcional.

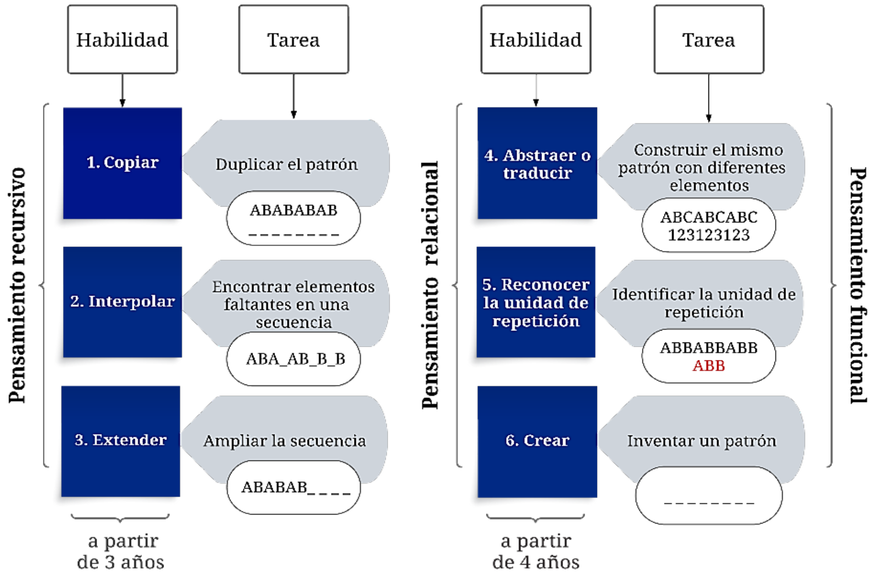

Figura 1. Trayectoria de aprendizaje sobre patrones de repetición

Descripción de cambios

Dienes (1971a) vincula la idea de cambio con las operaciones, en las que los operadores son el elemento que hacen posible dicho cambio o transformación. Más adelante, Alsina (2006) y Alsina y Pincheira (2022) retoman estos planteamientos y subrayan que es necesario evitar que en infantil se interiorice una concepción estereotipada de la noción de operación (o función) asociada exclusivamente a la aritmética, tal como se muestra en la Figura 2.

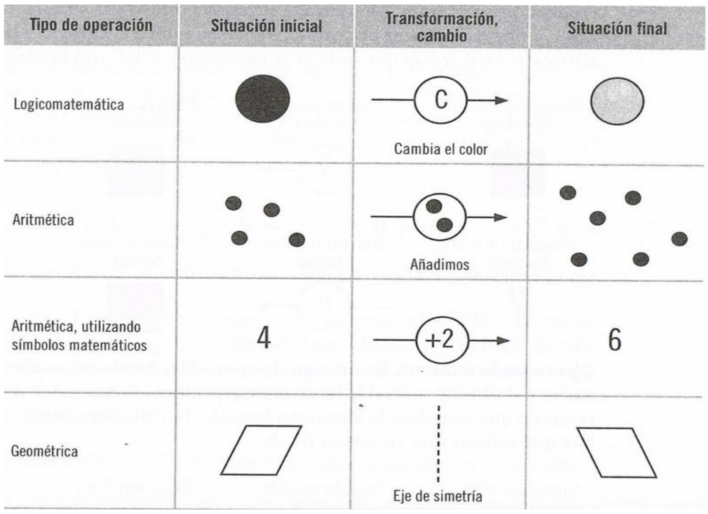

Figura 2. Diferentes tipos de cambios

Educación Primaria (6-12 años)

En esta etapa, el propósito de la algebrización del currículo sigue siendo el desarrollo de los modos de pensamiento relacional y funcional, principalmente. Para ello, la relación entre el álgebra y la aritmética se intensifica, pero no es exclusiva. Desde este punto de vista, los conocimientos importantes de álgebra para la etapa de primaria son los siguientes (e.g., Cañadas y Pinto, 2021; Molina, 2009; Pincheira y Alsina, 2021): 1) Relaciones aritméticas; 2) La representación (expresiones algebraicas); 3) Los patrones.

Relaciones aritméticas

El propósito de este conocimiento es dejar de ver las operaciones aritméticas como cálculos con números particulares y, en su lugar, pensar las operaciones como estructuras o funciones.

Para introducir el conocimiento de las relaciones aritméticas, Dienes (1971b) propone juegos “estado-operador” con máquinas de funciones, que ayudan a comprender la estructura de las operaciones: a partir de un elemento de un conjunto, denominado *entrada* o estado inicial, se obtiene otro, denominado *salida* o estado final, por medio de un *operador* que es el que da lugar al cambio (Figura 3).

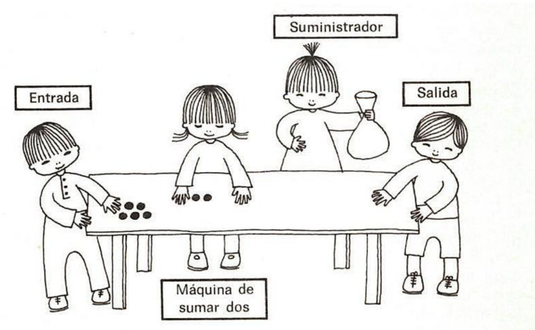

Figura 3. Juego estado-operador-estado con adición

Así, los conocimientos sobre relaciones aritméticas como las propiedades de las operaciones ayudan a interpretarlas como estructuras, funciones o cambios.

La representación (expresiones algebraicas)

Una parte muy importante del álgebra se asocia a la notación simbólica a través de un lenguaje formal que combina letras, números y signos. Este lenguaje, que es necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico e implica introducir conocimientos diversos como la noción de variable, el signo igual, las ecuaciones y las inecuaciones, se aprende desde lo concreto hacia lo abstracto (Papic et al., 2011).

Algunas investigaciones contemporáneas han empezado a establecer los niveles de algebrización de la actividad matemática para primaria. Godino et al. (2015), por ejemplo, establecen cuatro niveles, desde la ausencia de objetos algebraicos hasta su uso generalizado.

Una buena estrategia didáctica para empezar a familiarizar al alumnado en el uso de la notación simbólica e ir adquiriendo distintos niveles de algebrización son las frases matemáticas (Alsina, 2019): p. ej., “el triple de treinta y dos más ciento cinco”, cuya expresión algebraica es [3 • (32 + 105)].

Este tipo de conocimiento asociado a la representación de relaciones matemáticas tiene que ver, principalmente, con el pensamiento relacional.

Patrones

Partiendo de los conocimientos sobre patrones de repetición descritos para la educación infantil, en primaria el foco debería ponerse en el desarrollo del pensamiento funcional, sea con patrones de repetición o de crecimiento (numéricos o geométricos). A continuación, se describe una tarea que evidencia como a partir del trabajo con patrones se llega a una primera noción intuitiva de función lineal, apoyándose en el uso de tablas (Alsina, 2019). Como se puede apreciar, en estos casos, el interés se centra en las relaciones entre las variables, es decir, en la covariación a partir del estudio de las regularidades de cada patrón.

La tarea consiste en presentar una serie con un patrón de repetición (Figura 4), para analizar regularidades con el apoyo de tablas y empezar a generalizar.

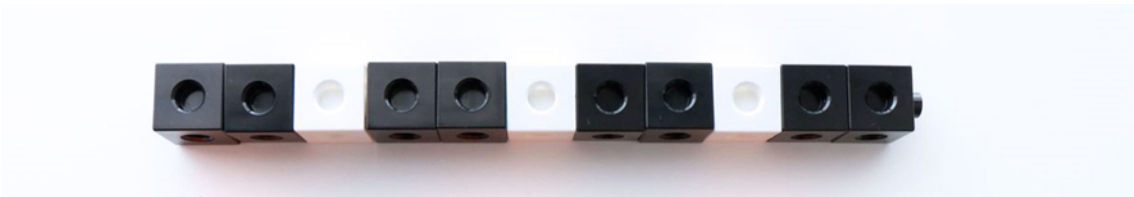

Figura 4. Serie a partir de un patrón de repetición AAB

Los estudiantes, a partir de los 9-10 años aproximadamente, analizan los módulos que conforman la serie y van construyendo la tabla que se muestra en la Figura 5:

	Policubos negros	Policubos blancos	Policubos en total
Un módulo	2	1	3
Dos módulos	4	2	6

Tres módulos	6	3	9
.../...			

Figura 5. Análisis de la regularidad a partir de un patrón de repetición AAB

Para promover la predicción y la generalización, se plantean las siguientes preguntas: ¿cuántos policubos negros habría en 10 módulos? ¿y blancos? ¿y en total?; ¿cuántos policubos negros cuántos habría en 50 módulos? ¿y blancos? ¿y en total? Finalmente, para generalizar, se introducen letras: ¿cuántos policubos negros habría en x módulos? ¿y blancos? ¿y en total? Con ello, ya en secundaria, se podría representar la regularidad de la serie a partir de la expresión algebraica $f(x)=3x$, es decir, una función lineal de primer grado.

Además de estos conocimientos propiamente algebraicos, recientemente algunos currículos han empezado a introducir los vínculos entre el álgebra y el pensamiento computacional. En este sentido, Bråting y Kilhamn (2021) han señalado que tanto el sentido algebraico como el pensamiento computacional se centran en la estructura, la descomposición y el reconocimiento de patrones para avanzar hacia la generalización y la simbolización.

DIEZ MATERIALES MANIPULATIVOS ESENCIALES PARA DESARROLLAR EL SENTIDO ALGEBRAICO DE LOS 3 A LOS 12 AÑOS

Siguiendo los criterios de selección indicados en la introducción, se han seleccionado los siguientes materiales: 1) Materiales lógicos; 2) Policubos y otros materiales contables; 2) Máquinas de cambio o de funciones; 4) Balanzas numéricas; 5) Geomosaicos; 6) Regletas numéricas; 7) Panel numérico y tablas del 100; 8) Materiales con variables o cuasi-variables; 9) Juegos de mesa; 10) Materiales para promover el pensamiento computacional desconectado. A continuación, para cada material, se describen actividades organizadas en grupos de edad: 3-6 años; 6-8 años; 8-10 años; 10-12 años (Tablas 1 a 10).

1. Materiales lógicos: pueden ser estructurados o no estructurados. Los materiales lógicos estructurados están definidos por unas cualidades concretas y sus correspondientes atributos, que se combinan de todas las maneras posibles. Entre estos materiales destacan los Bloques Lógicos de Dienes, pero existen muchos otros materiales estructurados comercializados o creados manualmente con cualidades diversas. Los atributos de estas cualidades se pueden expresar oralmente o bien representar simbólicamente con etiquetas afirmativas o negativas, según se afirme el atributo (p. ej., rojo) o se niegue (p. ej., no rojo).

Los materiales lógicos no estructurados presentan, por ejemplo, cualidades o magnitudes crecientes o decrecientes que permiten comparar todos los elementos respecto a esta característica y hacer ordenaciones en sentido ascendente o descendiente, etc. (Figura 6).

Figura 6. Ejemplos de materiales lógicos

En la Tabla 1 se presenta la distribución de actividades por niveles con estos materiales. Debe tenerse presente, de acuerdo con lo que se ha indicado anteriormente, que algunas de las actividades que inciden sobre todo en la exploración de las cualidades y sus correspondientes atributos inciden sobre todo en el conocimiento físico y, por lo tanto, no son propiamente algebraicas, pero sí el eslabón imprescindible para empezar a desarrollar el pensamiento algebraico a través de la comparación de semejanzas y diferencias, las primeras relaciones, etc.

Tabla 1

Actividades con materiales lógicos

3-6	Agrupación de todos los elementos que tienen un mismo atributo, dejando fuera los que no lo tienen; agrupaciones con dos atributos, para descubrir la intersección y la unión: p. ej., dar un conjunto de piezas rojas y otro de piezas con forma de triángulo y pedir que agrupen las rojas y grandes (intersección) y las rojas o grandes (unión). Realización de las mismas actividades con atributos negativos. Clasificación de elementos según un criterio establecido; descubrimiento del criterio de una clasificación: p. ej.: si hemos clasificado los objetos en tres grupos, ¿qué criterio se ha usado? Ordenación de objetos teniendo en cuenta una cualidad o magnitud creciente o decreciente. Emparejamiento de elementos de dos colecciones a partir de un criterio determinado: p. ej., el mismo color, etc.; introducción de las tablas de doble entrada para realizar correspondencias. Cambios con operadores lógicos directos e inversos (ver material 3).
6-8	Elección de la pieza que cumpla las condiciones de más de tres atributos simultáneos, expresados oralmente o con etiquetas (bandas, dados, ruletas, etc.). Juegos para descubrir el significado de “y” y de “o”: p. ej., colocar dentro de un aro las piezas que son cuadradas y grandes; después, las que son cuadradas o grandes. Representación con Diagramas de Venn. Realización de las mismas actividades con atributos negativos. Introducción de conjuntos borrosos con materiales con magnitudes crecientes o decrecientes. Realización de clasificaciones según distintos criterios, incluso con materiales no estructurados. Realización de ordenaciones con más de cinco elementos según distintos criterios. Correspondencias cualitativas a través de cuadros de doble entrada (producto cartesiano). Uso de flechas para representar las relaciones que se establecen: p. ej.: “tengo el mismo color que”, “soy menor que” … Juego del dómino de una o dos diferencias: p. ej.: cada pieza tiene una diferencia respecto a la anterior.
8-10	Representación de agrupaciones a través del diagrama de Carrol. Conjuntos borrosos con materiales con magnitudes crecientes o decrecientes. Descubrimiento y verbalización de las propiedades que cumplen las relaciones de equivalencia (clasificaciones): reflexiva, simétrica y transitiva; y las relaciones de orden (ordenaciones): antireflexiva, antisimétrica y transitiva. Juego del dómino de dos o tres diferencias. Representación de las relaciones descubiertas manipulativamente mediante dibujos, signos y símbolos (flechas, números…). Esquemas con distintos enlaces que simbolizan la cantidad de diferencias que existen entre los distintos elementos.
10-12	Representación de relaciones mediante dibujos, signos, flechas y símbolos diversos. Elaboración de tablas y diagramas para representar las relaciones. Diseño y selección de las variables y atributos para construir las piezas de un material lógico estructurado.

2. Policubos y otros materiales contables: se trata de piezas sueltas que, una vez encajadas, se pueden usar como conjuntos o series (Figura 7).

Figura 7. Ejemplos de policubos y otros materiales contables

Tabla 2

Actividades con Policubos y otros materiales contables

3-6	Clasificación por colores. Patrones de repetición: duplicado del patrón (copiar); poner el cubo correcto que falta en una seriación para que sea correcta (interpolar); colocación de los elementos que siguen a una seriación para ampliarla continuando el mismo patrón (extender); construcción del mismo patrón con diferentes elementos, p. ej. colores distintos o piezas de otro material (abstraer o traducir el patrón); verbalización e identificación de la unidad del patrón de repetición (reconocer la unidad de repetición); invención de patrones (crear). Agrupación y/o clasificación de patrones según la unidad de repetición. Descomposición de una barra con un número concreto de cubos de maneras distintas y verbalización de la equivalencia resultante.
6-8	Agrupación y clasificación de series según su patrón de repetición: p. ej., ¿en qué se parecen estos patrones? Representación (concreta, pictórica y/o simbólica) del patrón realizado sin utilizar colores, con cruces y rayas, círculos y circunferencias, letras…; verbalización de la representación realizada. Patrones de crecimiento sencillos, numéricos y geométricos: copiar; interpolar; extender; abstraer o traducir el patrón; reconocer la unidad de repetición; crear; etc. En una serie con 6 o 7 elementos construida a partir de un determinado patrón, predicción del elemento 10. Descomposición de una barra con un número concreto de cubos de maneras distintas y verbalizar la equivalencia resultante.
8-10	Representación simbólica del patrón, con letras: ABB ABB…; AB ABB ABBB… Iniciación al estudio de las regularidades de una serie: p. ej., ¿cada cuántos elementos se repite el patrón? ¿Cuántos elementos hay del mismo color en cada patrón? ¿qué posición ocupan los elementos rojos? ¿Cuántos módulos hay?; anticipación del color que tendrá el elemento *n* si en cada módulo hay tres elementos; representación de las regularidades mediante tablas. Representación de las tablas de multiplicar con policubos para buscar regularidades.Resolución de problemas: p. ej., tenemos cubos de tres colores y queremos hacer un collar de 24 cubos; haciendo series que combinen colores, ¿qué collares podemos hacer?
10-	Estudio del módulo de un patrón: p. ej., número total de elementos, número de elementos A, número de elementos B; búsqueda de regularidades en series numéricas y geométricas y representación mediante tablas.

	Predicción de un elemento sin necesidad de hacer toda la serie; predicción de cualquier elemento e introducción de variables para simbolizarlo: p. ej., la letra n. Verbalización de la generalización del patrón. Realización e investigación de patrones girando las piezas: p. ej., 90º a la derecha, 180º, rotando las piezas…: ¿cuántos elementos tiene cada módulo? ¿qué posición tendrá el elemento 20? … Representación e investigación de cómo crecen los números triangulares.

3. Máquina de cambio o de funciones: tiene como objetivo pensar las operaciones como estructuras y funciones en vez de cálculos aritméticos con números particulares. Descubrir y aplicar las propiedades de las operaciones (conmutativa, asociativa, elemento neutro…) contribuye a conseguirlo.

La idea de máquina de cambio se puede simbolizar con distintos formatos (cajas ocultas, bolsas…) pero tiene que contener estos tres elementos: estado inicial o punto de entrada de la máquina, estado final o punto de salida y operador que visualice el cambio a realizar, ya sea cualitativo (cambiar color) o cuantitativo (+4) (Figura 8).

Figura 8. Máquinas de cambio o de funciones

Tabla 3

Actividades con máquinas de cambio o de funciones

3-6	Cambios cualitativos con operadores directos: p. ej., entra un triángulo rojo y el operador cambia el color, ¿Qué pieza puede salir? Cambios cualitativos con operadores inversos: p. ej., deducción de la pieza de entrada si se conoce el cambio y la pieza de salida; deducción del operador si conoce la pieza de entrada y de salida. Propuesta del símbolo de la máquina de cambio (operador) si conocemos los elementos de entrada y salida. Realización de las mismas actividades con la máquina de cambiar cantidades (+2, -1,…).

6-8	Cadenas de cambios, primero cualitativos y después cuantitativos: p. ej., máquinas encadenadas en las que la salida de una se convierte en la entrada de la siguiente; descubrimiento de patrones y verbalización del cambio producido a partir de operadores neutros. Planteamiento inverso para descubrir que la suma y resta son operaciones inversas (para descubrir el elemento de entrada se realiza la operación inversa de la propuesta por la máquina). Visualización de las máquinas de cambio *sumar 10* encadenadas; verbalización de los descubrimientos.
8-10	Investigación de las operaciones inversas (suma y resta, multiplicación y división) a partir de las máquinas de cambiar cantidades (para descubrir el elemento de entrada se realiza la operación inversa de la propuesta por la máquina). Cadenas de cambio (y estrellas) con varios cambios; resolución de esquemas escritos de cambios encadenados sin necesidad de manipular las máquinas de funciones. Visualización de la máquina de cambio x10, x100, x1000 con bloques multibase: ¿qué pieza saldrá si entra en la máquina una regleta de 1 o una de 10 en cada una de las máquinas?, ¿y si entra una regleta de 5?; encadenamiento de máquinas de cambio de multiplicar por 10: ¿qué observas?, ¿se pueden sustituir por una sola máquina?
10-12	Elaboración de estrellas de cambio pensando previamente los cambios a realizar. Descubrimiento y práctica de las propiedades de las operaciones con las máquinas de cambios: elemento neutro, conmutativa, asociativa… Introducción de fracciones, decimales y porcentajes en las máquinas de funciones. Deducción de la equivalencia de la máquina de cambio x 0’5, ½ y 50% y de otras equivalentes entre ellas. Introducción de la noción de función lineal, a partir del análisis de las regularidades de una serie con un patrón de repetición.

4. Balanzas numéricas: consisten en dos brazos numerados cada uno de ellos hasta el 10 y pesas rectangulares para colocar en los números correspondientes. Cuando hay una relación de igualdad entre los dos brazos, la balanza se equilibra (Figura 9).

Figura 9. Ejemplos de balanzas numéricas

Tabla 4

Actividades con balanzas numéricas

3-6	Descomposiciones de los números: p. ej., el 5 se equilibra con 4+1, 3+2 y 5+0. Equilibrio de la balanza buscando el resultado de la suma propuesta. Colocación de una pesa en cada uno de los números: p. ej., si quito el 4 de un lado, ¿qué tengo que hacer para que la balanza continúe equilibrada? Descubrimiento de regularidades de los números consecutivos: p. ej., la balanza está equilibrada con una pesa en el 3 en cada lado; si cambio la pieza del lado izquierdo del 3 al 4, ¿qué pieza tengo que añadir en el lado derecho para volver a equilibrar? (+1).
6-8	Comprensión y representación del signo = como expresión de equivalencia. Visualización y representación de la expresión de relaciones de igualdad y desigualdad con los signos =, ≠, <,>. Equilibrio de sumas tipo 8+5 con su equivalente a 10+… para preparar la suma pasando por la decena justa. Descubrimiento de propiedades y regularidades de los números y las operaciones (números consecutivos (+1), números pares (+2), pasar del 12 al 22, visualización de las propiedades…) Descubrimiento de la generalización del 0: p. ej., apuntar los números del 10 al 100 detrás de cada uno de los números del 1 al 10 de la balanza; realizar sumas tipo 40+30; buscar similitudes en la operación 4+3… ¿qué se mantiene y qué cambia? Realización de sumas con centenas aplicando la generalización del 0.
8-10	Realización de sumas, composiciones y descomposiciones aplicando la generalización del 0. Utilización de relaciones de igualdad y desigualdad con los signos =, ≠, <,>. Expresión de la igualdad como equivalencia entre dos elementos. Realización de la misma operación en los dos lados de la balanza para comprobar que el resultado no varía. Representación de las balanzas con esquemas de descomposición. Visualización de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva. Experimentación de equilibrios de dos maneras diferentes: p. ej., si una balanza se descompensa al sumar 4 en el brazo derecho, volver a quitar el 4 o incrementar también en 4 el brazo izquierdo. Realización de multiplicaciones y práctica de tablas de multiplicar en la balanza de manera directa e inversa. Representación del dictado de frases matemáticas que incluyan operaciones combinadas.
10-12	Propuesta de más de una manera para equilibrar una balanza desequilibrada: añadir a un lado o quitar en el otro. Aplicación de la propiedad anterior para resolver operaciones por compensación (123-99 es equivalente a 124-100) Realización de operaciones utilizando la generalización del 0, incluso con números decimales (si 5+2=7; entonces, 0.5+0.2=0.7) Representar el dictado de frases matemáticas que incluyan operaciones combinadas. Construcción de igualdades a partir de datos desconocidos (un número más 4 es equivalente a dos veces el mismo número más uno).

5. Geomosaico: este material, también conocido como *Pattern Blocks*, consiste en un juego de formas geométricas (triángulo equilátero, cuadrado, trapecio, dos rombos y hexágono) representada cada una por un color. Tienen la particularidad que los lados de cada figura tienen la misma longitud (25 mm), con excepción de la base grande del trapecio que es el doble. Es un material muy polivalente que permite descubrir, practicar y consolidar muchos conocimientos de los distintos sentidos matemáticos incluido el algebraico (Figura 10).

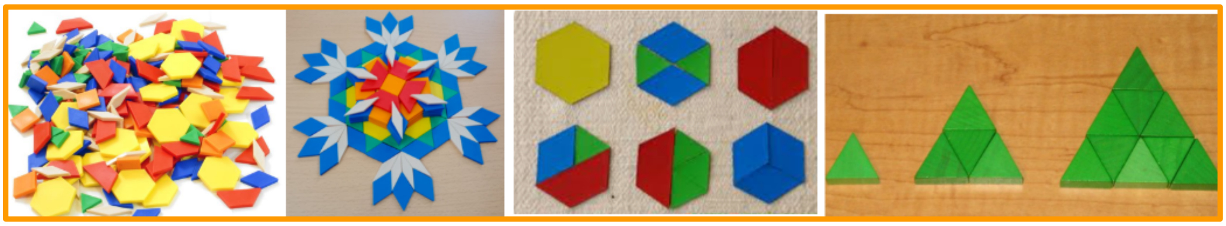

Figura 10. Ejemplos de actividades con geomosaicos

Tabla 5

Actividades con geomosaicos

3-6	Clasificación de las figuras según el número de lados. Patrones de repetición con distintas piezas: duplicar el patrón, encontrar elementos faltantes, extender el patrón, construir el mismo patrón con piezas diferentes, identificar la unidad de repetición o inventar un patrón.
6-8	Extender patrones de manera más compleja: p. ej., continuar una serie hecha con rombos que se toquen por un lado a partir de tres elementos dados (1 rombo, 2 rombos, 3 rombos); ¿podríamos realizar otra serie distinta?
8-10	Composición de figuras: p. ej., hexágonos iguales que el amarillo, con otras piezas; representación gráfica de las piezas necesarias y escritura de las equivalencias utilizando lenguaje algebraico (otorgar una letra a cada pieza, expresar cantidades…): p. ej., dos trapecios = un hexágono / 2Tc= 1 H; seis triángulos = un hexágono / 6Tr= 1 H. Composición de otras figuras a partir de retos concretos: p. ej., con las piezas propuestas, a partir de la lectura de letras, números y símbolos, de todas las maneras posibles, etc. Investigación del número de figuras que podemos hacer con triángulos unidos por un lado; p. ej., ¿cuántas figuras puedes hacer con dos triángulos?, ¿y con 3?, ¿y con 4, 5 o 6?; representación de los datos obtenidos en una tabla. Actividades de teselación con una sola pieza: p. ej., ¿con qué piezas del geomosaico conseguimos teselar? Problemas a partir de patrones: p. ej., decoramos pasteles de forma hexagonal siguiendo un patrón; cada dos pasteles ponemos naranja (cuadrado naranja), cada tres chocolate blanco (rombo blanco) y cada cuatro manzana (triángulo verde). Resolución y representación de los que llevan un solo ingrediente, de los que llevan dos, de los que no llevan decoración…
10-12	Representar composiciones de piezas con superficies equivalentes usando letras, fracciones y símbolos. Ordenar piezas según su superficie. Realización de patrones con simetrías múltiples. Actividades de teselación con una sola pieza: p. ej., ¿qué características tienen las piezas que consiguen teselar? Actividades de teselación combinando más de una pieza: p. ej., representar el conjunto de piezas que teselan; análisis de la suma de sus ángulos.

6. Regletas numéricas: se trata de un material estructurado compuesto por barras de distintos colores para representar los diez primeros números naturales. La regleta que representa el uno tiene una longitud de 1cm y representa la unidad; la regleta que representa el 2 tiene dos cm y así sucesivamente hasta la regleta del 10 que mide 10cm. Las barras no tienen las unidades marcadas para favorecer el cálculo y no el contaje. Las regletas permiten experimentar y descubrir las relaciones entre números, facilitar la comprensión de conceptos abstractos, investigar propiedades de las operaciones, introducir el lenguaje algebraico y favorecer la generalización.

Actualmente existen dos tipos de regletas: las regletas Cuisenaire y las regletas Mª. A. Canals, que son una combinación del material multibase de Dienes y el material de Cuisenaire, por lo que además de las barras de los 10 primeros números contiene sus cuadrados y sus cubos (Figura 11).

Figura 11. Ejemplos de actividades con las regletas numéricas

Tabla 6

Actividades con las regletas numéricas

3-6	Ordenaciones: p. ej., según el valor de las regletas (creciente, decreciente). Composición y descomposición: p. ej., cambiar una regleta por dos que mantengan su misma longitud; ¿podemos construir todas las regletas con dos regletas iguales?
6-8	Descomposición de números, sobre todo el 10. Realización de sumas equivalentes con la estrategia de pasar por la decena 8+4= 10+2. Práctica de poner y quitar decenas para buscar regularidades numéricas. Descubrir estrategias de suma (23+45): sumar por descomposición (primero sumamos las regletas de 10 y después las unidades: 60+8=68); o sumar despacio (al 23 le sumo 40 y después 5: 23+40=63; 63+5=68). Descubrir las propiedades respecto la suma. Frases matemáticas con regletas y posteriormente representarlas con números y signos. Buscar regularidades de los números pares e impares.

8-10	Investigación de operaciones con regletas: p. j. la suma de tres números consecutivos; ¿de cuántas maneras podemos llegar al número 24 haciendo saltos iguales?; resultado de la suma de números pares e impares entre ellos; etc. Representación de las tablas de multiplicar, primero con regletas y luego sobre papel cuadriculado. Investigación de cómo la propiedad distributiva puede ayudar a descubrir el resultado de una multiplicación representada geométricamente en papel cuadriculado de muchas maneras distintas: p. ej., 6x8 se puede calcular como 6x4 + 6x4, 3x8+3x8, 3(2x8) … Resolución de una multiplicación sobre papel cuadriculado (p. ej., 6x8) de muchas maneras distintas utilizando la propiedad distributiva. Visualización de la multiplicación como área, por descomposición. Representación con regletas de frases matemáticas y posteriormente expresarlas algebraicamente, con números y signos.
10-12	Visualización de la propiedad distributiva a partir de situaciones representadas con regletas. Representación de los divisores de un número con regletas para encontrar regularidades. Visualización del concepto de mínimo común múltiplo con las regletas; representación de regularidades. Investigación de cómo crecen los números cuadrados consecutivos. Expresión algebraica de operaciones combinadas: p. ej., 2 (4 + 3) + 3 (2 + 5)

7. Panel numérico y tablas del 100: se trata de una cuadrícula de 10x10. El más funcional consta de bolsas transparentes para colocar tarjetas numeradas del 0 al 100, impresas a doble cara con dos colores distintos para visualizar los cambios que se realizan. También se pueden utilizar tablas del 100 individuales impresas en papel (Figura 12).

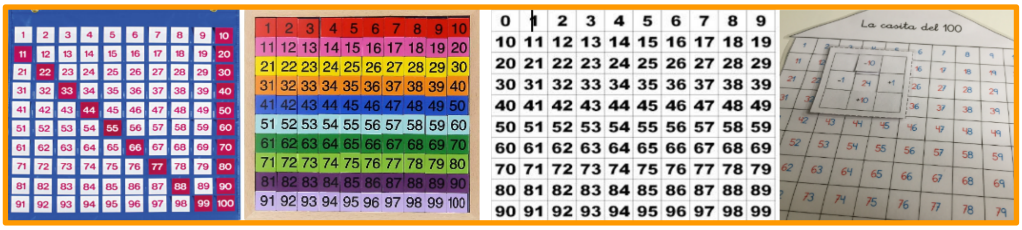

Figura 12. Ejemplos de actividades con el panel numérico y otras tablas del 100.

Tabla 7

Actividades con panel numérico y tablas del 100

3-6	Construcción progresiva de la recta numérica (primera fila del panel numérico) para ordenar los números, en sentido ascendente y descendente. Patrones numéricos, girando números según una consigna dada: p. ej., contar de 2 en 2; de 3 en 3…

	Realización de saltos para realizar operaciones sencillas y hallar el resultado sobre el panel o sobre la recta numérica.
6-8	Patrones numéricos más complejos, girando números según una consigna: +2, +5, +10; verbalización de los descubrimientos realizados. Dictados numéricos pintados en la tabla del 100, anticipando el resultado según regularidades descubiertas (+/-10, +/-1): p. ej., estoy en el número 4 y se realizan cinco saltos de 10. Desplazamientos de una ficha sumando una cantidad concreta: p. ej., si se suma 12, primero desplazo 10 y después 2; ¿y si primero desplazo 2 y después 10?; ¿qué movimientos puedo hacer para ir del número 13 al 45?, ¿el orden de los movimientos es determinante?, ¿y si quiero pasar del 13 al 42?
8-10	Verbalización de las regularidades que se observan en las diagonales del panel del 0 al 99: ¿son las mismas que en el panel del 1 al 100?; ¿por qué? Construcción de las tablas de multiplicar en el panel numérico e investigación de las regularidades. Actividades de práctica productiva (en contraposición a la práctica reproductiva, que sólo se enfoca en la automatización de destrezas básicas) para descubrir patrones: p. ej., buscar series para practicar triples y mitades, etc.
10-12	Investigaciones numéricas: p. ej., si tenemos dos tablas del 100 impresas a doble cara que coincidan entre ellas, ¿qué número habrá detrás del 10?, ¿y del 9?, ¿y del…?; adicionalmente, para avanzar hacia la generalización: ¿qué observas?, ¿podemos buscar regularidades?, ¿cuánto suman los números opuestos de la primera fila?, etc. Búsqueda de regularidades y generalización en el panel del 100: p. ej., escoge cualquier número, suma el número de la derecha e izquierda, suma los números de arriba y abajo; ¿qué observas?, ¿crees que pasa siempre?, ¿cómo lo podemos demostrar? Actividades de práctica productiva para descubrir patrones. Investigación a partir del método de Gauss, quien resolvió el problema de cuánto suman todos los números del 1 al 100 cuando era niño: primero, sumando las primeras parejas de los números extremos: 1+100, 2+99, 3+98…; después, extrapolando la cantidad de parejas total.

8. Materiales con variables y cuasi-variables: se trata de materiales que tienen la característica de poder ocultar elementos para introducir, a nivel intuitivo, el concepto de elemento desconocido (cuasi-variable), incógnita o variable. Las más características son cajas pequeñas que tienen el mismo número de elementos, pero desconocemos cuántos hay y permiten solucionar manipulativamente ecuaciones sencillas: p. ej., sabemos que 2 cajas más 4 bolas son equivalentes a 1 caja y 7 bolas. También se consideran cajas de variables las cajas aditivas o los elementos que sobreponemos a los collares de bolas (tubos de cartón, ropa o las propias manos) para tapar un número concreto de bolas, dejando al descubierto las otras, para adivinar la cantidad que hay tapadas. Adicionalmente, se incluyen también los retos que muestran operaciones utilizando cuasi-variables, es decir, elementos no numéricos (frutas, figuras…) para deducir que número representan (Figura 13).

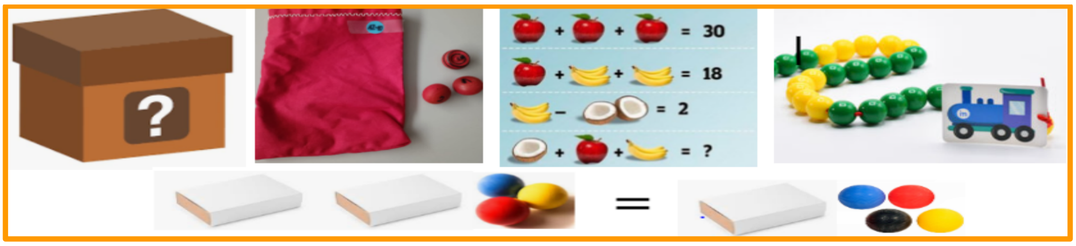

Figura 13. Ejemplos de materiales con variables y cuasi-variables.

Tabla 8

Actividades a partir de materiales con variables y cuasi-variables

3-6	Reconocimiento de cantidades a partir de collares y verbalización del proceso seguido: p. ej., la cantidad de bolas tapadas de los extremos, observando las que no están tapadas; la cantidad de bolas tapadas en el centro; tapando bolas de los dos extremos, calcular las bolas tapadas y deducción de cómo pueden estar distribuidas; calcular las bolas que pueden tapar tubos de cartón de distinta medida y verbalización de frases matemáticas como “las tapadas y cuatro más hacen 6”.
6-8	Continuación del trabajo con el collar de bolas y materiales para ocultar bolas, aumentando el número de bolas. Preparación de cajas aditivas para utilizar con un compañero: p. ej., esconder en la caja una parte de las monedas y dejar visible las otras. Resolución de problemas utilizando las cajas aditivas; p. ej., en total tengo 10 euros repartidos en la hucha y 2 euros en la mano, ¿cuánto dinero hay en la hucha? Introducción de retos sencillos con frutas o figuras para descubrir su valor según las operaciones propuestas: p. ej., naranja + naranja = 10; manzana + naranja = 7 …); verbalización de la técnica utilizada para descubrir el valor de las frutas. Resolución de problemas a partir del esquema del todo y las partes. Utilización del signo = como equivalencia. Truco de magia de los dados: p. ej., adivinar la cara oculta del dado (todas las caras opuestas suman 7)
8-10	Continuación del trabajo manipulativo realizado con las cajas aditivas. Representación simbólica de las cajas aditivas con dibujos, números y símbolos. Representación de las multiplicaciones con papel cuadriculado (filas y columnas); tapar parte de esta representación para calcular el valor parcial. Repetición de la actividad anterior y deducir el valor total, aunque no veamos todos los elementos. Resolución de retos algebraicos con elementos que representan números concretos analizando las distintas operaciones propuestas. Verbalización de las técnicas utilizadas para descubrir el valor de cada elemento y analizar la eficiencia de cada una.

10-12	Resolución de retos algebraicos más complejos con elementos que representan números concretos analizando las distintas operaciones propuestas. Encontrar el valor de un símbolo de los retos anteriores, sin necesidad de encontrar el valor de cada uno de ellos, utilizando métodos de comparación de filas y columnas para deducir sus diferencias: p. ej., si en una fila aparece cuadrado + círculo + estrella = 21 y en otra, cuadrado + círculo + rectángulo = 20, podemos deducir que la estrella vale un punto más que el rectángulo. Resolución manipulativa de ecuaciones sencillas representadas con cajas y elementos sueltos: p. ej., tres cajas + dos bolas son equivalentes a dos cajas y cinco bolas. Utilizar el sistema de añadir elementos en los dos lados de la equivalencia para conseguir la igualdad. Análisis de las equivalencias realizadas.

9. Juegos de mesa: permiten hacer razonamientos lógicos, seguir patrones, analizar el cambio, hacer predicciones, deducciones… por lo que son un material indispensable para trabajar el sentido algebraico. El objetivo de estos juegos es proporcionar al alumnado retos para que puedan realizar investigaciones de distinto nivel de dificultad (Figura 14).

Figura 14. Ejemplos de juegos.

Tabla 9

Actividades con juegos de mesa

3-6	*Speed cups:* patrones. *Ranitas:* ordenación de números. *Monsterkids:* relaciones a partir de atributos y cambios. *Casle logix:* retos lógicos.
6-8	*Logix:* retos lógicos de colocación de piezas (etiquetas positivas y negativas, posición…) *Chocolate fix:* colocación correcta de bombones a partir de deducciones lógicas. *Color code:* ordenación de piezas superpuestas para conseguir una figura correcta.

	Monstrys roll and paint: combinación de dados de colores para conseguir un objetivo. *Diez ladrones*: estudio de los números complementarios del 10 siguiendo tres instrucciones de deducción distintas. *Jungle speed:* condiciones y símbolos.
8-10	*Topito:* patrones, posición de un elemento en una seriación y cambios. *Illusion*: ordenación de cartas según el porcentaje que tengan de un color concreto. *Despistados en la granja:* cambios, condiciones… *Timeline:* ordenación de hechos históricos o inventos según la fecha (antes o después). *Fantasma blitz:* elección del elemento que no cumple la consigna dada (forma/color/…) *Cluedo:* resolución de retos de deducción a partir de las pistas que nos proporcionan (dibujo de los objetos, carteles con los nombres de personas, características físicas…). *Enigmas de lógica* a partir de pistas y características (Picañol, programa Bebras…).
10-12	*Set:* observar, verbalizar y escoger tres cartas que cumplan o no cumplan unas condiciones concretas. *Swish*: composiciones y descomposiciones. *Quarto:* conseguir cuatro figuras en raya o grupo de manera que las cuatro tengan una característica en común o las cuatro la tengan diferente. *Juego de los edificios:* colocación de edificios para que cumplan condiciones numéricas desde distintos puntos de vista. *Código secreto:* abstracción. *Nim:* ponemos 21 piedras sobre la mesa y cada miembro de la pareja puede coger una, dos o tres piedras; gana quién coge la última. ¿Hay estrategia ganadora? ¿y si pierde quién coge la última? ¿y si modificamos el número de piedras?

10. Materiales para promover el pensamiento computacional desconectado: como se ha señalado, el álgebra y el pensamiento computacional mantienen vínculos estrechos, razón por la cual se ha considerado oportuno presentar un último grupo de materiales que se pueden utilizar para trabajar este tipo de pensamiento, como por ejemplo imágenes, secuencias, laberintos, enigmas, símbolos, ... En su conjunto, favorecen el desarrollo del pensamiento algorítmico, el pensamiento abstracto, la secuenciación, las instrucciones en bucle y los condicionales (Figura 15).

Figura 15. Materiales para promover el pensamiento computacional desconectado

Tabla 10

Actividades con materiales para promover el pensamiento computacional desconectado.

3-6	Realización de itinerarios siguiendo instrucciones. Identificación del lenguaje de direcciones, lateralidad y otros conceptos temporales. Resolución de problemas aplicando métodos de ensayo y error. Desarrollo de una serie de pasos para llegar a un punto concreto. Descomposición de las acciones.
6-8	Ejecución de instrucciones siguiendo todos los pasos. Representación de itinerarios con puntos de referencia. Reconocimiento de patrones para identificar regularidades. Verbalización de los recorridos realizados enumerando las direcciones. Reconocimiento de símbolos y flechas para transmitir un recorrido. Descomposición en problemas más pequeños y manejables. Reconocimiento de la información importante e ignorar la secundaria. Resolución de problemas aplicando métodos de ensayo y error. Descripción de los pasos a realizar para resolver un problema. Reconocimiento de algoritmos sencillos.
8-10	Redacción y comprobación de instrucciones para conseguir un objetivo. Análisis e implementación de distintos resultados. Reconocimiento de patrones, regularidades para identificar tendencias. Búsqueda de todas las soluciones posibles. Importancia de la sistematización y orden en la investigación. Análisis de datos para depurar los repetidos. Observación de las diferencias entre modelos 2D o en 3D. Realización de distintas vías o estrategias para conseguir el mismo objetivo. Descomposición en distintos pasos y análisis de su eficacia. Representación de caminos. Reconocimiento de los bucles. Representación del itinerario utilizando números y flechas. Reconocimiento de la información importante ignorando los detalles irrelevantes para crear soluciones generales. Descripción de los algoritmos a realizar. Representación de abstracciones sencillas.
10-12	Trabajo secuencial y ordenado para encontrar todas las soluciones posibles. Depuración justificada de las soluciones repetidas. Análisis de las diferencias entre modelos 2D o en 3D. Discriminación de posibles soluciones geométricas sin necesidad de construir. Formulación de problemas nuevos a partir de los resultados obtenidos. Automatización de soluciones mediante algoritmos. Resolución de problemas desde distintos puntos de vista. Resolución de problemas con técnicas recursivas. Análisis de los distintos pasos para encontrar la forma más eficiente y efectiva. Generalización y transferencia de los procesos de resolución a otros problemas. Creación de modelos. Resolución óptima de problemas. Planteamiento de preguntas de visualización entre los distintos niveles de actuación. Representación de datos con modelos o simuladores.

En la Tabla 11 se destacan los principales conocimientos de álgebra que puede trabajarse en infantil y primaria con los diez materiales manipulativos presentados.

Tabla 11

Vínculos entre los conocimientos importantes del sentido algebraico con los diez materiales manipulativos

	Relaciones a partir del reconocimiento de atributos	Relaciones aritméticas	Patrones	Cambio	Expresiones algebraicas	Pensamiento computacional
Material 1	X	X	X	X		X
Material 2		X	X		X	
Material 3	X	X		X	X	
Material 4		X		X	X	
Material 5	X		X	X	X	
Material 6	X	X	X	X	X	
Material 7		X	X	X		X
Material 8		X		X	X	X
Material 9	X	X	X	X	X	X
Material 10			X	X		X

Consideraciones finales

En este artículo se han ofrecido diversas orientaciones para llevar a cabo una enseñanza eficaz del álgebra que promueva el desarrollo de habilidades mentales como la organización y estructuración, la predicción o la generalización a través de los distintos modos de pensamiento algebraico: recursivo, relacional y funcional (e.g., Cañadas y Molina, 2016; Dumas et al., 2013; Lüken y Sauzet, 2020; Wijns et al., 2019). Adicionalmente, se ha considerado también el pensamiento computacional por sus vínculos con el álgebra (Bråting y Kilhamn, 2021).

Para lograr esta finalidad, por un lado, se han descrito los principales conocimientos sobre álgebra que el profesorado de infantil y primaria debe conocer, referentes a las relaciones, los patrones y el cambio, para ayudar a desarrollar los distintos modos de pensamiento algebraico. Considerando estas aportaciones, Alsina

(2019, 2022) ha sintetizado los principales conocimientos algebraicos que han servido de base para la primera parte del artículo.

Por otro lado, para garantizar la comprensión de estos conocimientos algebraicos a través de prácticas de enseñanza que permitan visualizarlos de manera concreta, se han descrito diez materiales manipulativos esenciales. Estos materiales, que en su conjunto contribuyen a desarrollar el sentido algebraico de los 3 a los 12 años, se han seleccionado a partir de criterios de contenido, de finalidades didácticas y de tipo de material. Para cada material se han propuesto diversas actividades organizadas por niveles, con la finalidad de que el profesorado de infantil y primaria disponga de un amplio abanico de recursos y actividades.

Utilizar materiales como los descritos de forma sistemática durante las prácticas de enseñanza del álgebra en todos los niveles desde los 3 a los 12 años puede ser un punto de apoyo clave para que los niños desarrollen, desde la comprensión, los distintos modos de pensamiento algebraico y las habilidades mentales descritas. Adicionalmente, la comprensión que conlleva el aprendizaje a través de estos materiales, va a facilitarles el acceso a la educación secundaria o media con una base sólida de conocimientos que evitarán ansiedades y rechazos hacia las matemáticas, cuando se encuentren con el simbolismo y la abstracción que requiere el álgebra en estos niveles.

REFERENCIAS

Acosta, Y., Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022). El pensamiento algebraico en educación infantil: estrategias didácticas para promover las habilidades para hacer patrones. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 11*(2), 1-37. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2022.1-37

Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años.* Octaedro-Eumo.

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Graó.

Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años).* Graó.

Alsina, Á. y Bosch, E. (2022). Numeración y cálculo en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido numérico. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática,* *5*(3), 132–167. https://doi.org/10.30612/tangram.v5i3.16420

Alsina, Á. y Bosch, E. (2023). Estadística y probabilidad en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido estocástico. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática,* *6*(3), 24-59. https://doi.org/10.30612/tangram.v6i3.17587

Alsina, Á. y Pincheira, N. (2022). El cambio: un conocimiento esencial del álgebra temprana. Revista Científica *ECOCIENCIA,* *9*(6), 49-76. https://doi.org/10.21855/ecociencia.95.737

Bock, A. M., Cartwright, K. B., McKnight, P. E., Patterson, A. B., Shriver, A. G., Leaf, B. M., Mohtasham, M. K., Vennergrund, K. C. y Pasnak, R. (2018). Patterning, reading, and executive functions. *Frontiers in Psychology,* *9*(1802). https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01802

Brating, K. y Kilhamn, C. (2021). Exploring the intersection of algebraic and computational thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 23*(2), 170–185. https:// doi. org/ 10. 1080/ 10986 065. 2020.17790 12

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En Encarnación. Castro, E. Catro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz, y M. Torroalbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-2018). Comares.

Cañadas, M. C. y Pinto, E. (2021). Prácticas en el aula de educación primaria relacionadas con el pensamiento algebraico. *Uno: Revista en Didáctica de las matemáticas, 94,* 19-27.

Dienes, Z.P. (1971a). *Estados y operadores. 2: Iniciación al álgebra.* Teide.

Dienes, Z.P. (1971b). *Estados y operadores. 1: operadores aditivos.* Teide.

Dumas, D., Alexander, P. A. y Grossnickle, E.M. (2013). Relational reasoning and its manifestations in the educational context: A systematic review of the literature. *Educational Psychology Review, 25*(3), 391-427.

Godino, J.D., Neto, T. Wilhelmi, M.R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática, 8,* 117-142.

Luken, M. M. y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies.

Mathematical Thinking and Learning, 23(1), 28-48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M.C. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "Thales".

Papic, M. M., Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 237-268. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Revista Educación Matemática 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Pincheira, N., Alsina, Á. y Acosta, Y. (2023). Avances en la didáctica del álgebra en educación infantil: Vinculando conocimientos y tipos de pensamiento algebraico. *NÚMEROS, 115,* 7-29.

Pincheira, N., Acosta, Y. y Alsina, Á. (2022). Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil: un análisis desde los libros de texto. *PNA, 17*(1), 1-24. https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.24522

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B. y Verschaffel, L. (2019). Young children's patterning competencies and mathematical development: A review. En K. Robinson, H. Osana y D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (pp. 139–161). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1