Tangram
Revista de Educação Matemática

DOI: 10.30612/tangram.v9i1.18836

Recurso didático para o ensino de funções trigonométricas via Modelagem Matemática e Robótica

Didactic resource for teaching trigonometric functions via Mathematical Modeling and Robotics

Recurso didáctico para la enseñanza de funciones trigonométricas mediante Modelado Matemática y Robótica

Marcelo Melazzo Rodrigues
Programa de Pós–Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Mestrado Profissional – Universidade Federal de Uberlândia (UFU)
Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
E-mail: marcelo.melazzo@ufu.br
Orcid: https://orcid.org/0000-0003-4156-5393

Rosana Sueli da Motta Jafelice
Instituto de Matemática e Estatística – Universidade Federal de Uberlândia (UFU)
Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
E-mail: rmotta@ufu.br

Tangram
Revista de Educação Matemática

Universidade Federal da Grande Dourados

Orcid: https://orcid.org/0000-0001-8489-3974

Lara Martins Barbosa
Faculdade SESI de Educação de São Paulo (FASESP)
Ribeirão Preto, São Paulo, Brasil
E-mail: lara.barbosa@sesisp.org.br
Orcid: https://orcid.org/0000-0003-4346-211X

Resumo: A produção de materiais didáticos para ações educativas tem se mostrado relevante nos últimos anos, incorporando em muitos desses recursos as tecnologias digitais. Este artigo tem como objetivo apresentar um recurso didático desenvolvido precisamente com o uso dessas tecnologias digitais, a partir de práticas que envolvem elementos de modelagem matemática e robótica. Como principal objetivo da criação do recurso aparece o ensino das funções trigonométricas e suas aplicações. Com essa finalidade, foi elaborado inicialmente um modelo matemático que representa um som de pouca complexidade, utilizando uma aproximação da discretização do som por soma de funções trigonométricas e aplicativos computacionais. A partir desse modelo, trabalhou-se na construção de um protótipo robótico com a finalidade de abordar a trigonometria de forma prática. Na investigação foram previstas três etapas: o desenvolvimento de um recurso didático, sua experimentação em contexto extracurricular e, como trabalho futuro, sua aplicação em sala de aula. O teste desse recurso apresentou resultados promissores, pois a presença de um robô que se movimenta ao captar, por meio de um microfone, um som simples (como o de uma vogal) pode gerar um impacto positivo no processo de ensino e aprendizagem, especialmente no ensino de trigonometria.

Palavras-chave: Recurso Didático. Funções Trigonométricas. Modelagem Matemática. Robótica.

Abstract: The production of teaching materials for educational activities has gained great relevance in recent years, with many of these resources incorporating digital technologies. This article aims to present an instructional resource developed precisely through the use of these digital technologies, based on practices involving elements of mathematical modeling and robotics. The main goal of creating this resource is to support the teaching of trigonometric functions and their applications. To this end, a mathematical model was initially developed to represent a sound of low complexity, using an approximation of sound discretization through the sum of trigonometric functions and computational applications. Based on this model, work then proceeded on the construction of a robotic prototype designed to address trigonometry in a hands-on manner. The investigation was structured into three stages: the development of a didactic resource, its experimentation in an extracurricular context, and, as future work, its application in the classroom. The experimentation of this resource yielded promising results, since the presence of a robot that moves when it captures a simple sound (such as a vowel) through a microphone can have a positive impact on the teaching and learning process, particularly in the teaching of trigonometry.

Tangram
Revista de Educação Matemática
Universidade Federal da Grande Dourados

Keywords: Didactic Resource. Trigonometric Functions. Mathematical Modeling and Robotics.

Resumen: La producción de materiales didácticos para acciones educativas ha adquirido gran relevancia en los últimos años, incorporando en muchos de estos recursos las tecnologías digitales. Este artículo tiene como objetivo presentar un recurso didáctico desarrollado precisamente mediante el uso de estas tecnologías digitales, a partir de prácticas que involucran elementos de modelización matemática y robótica. El principal objetivo de la creación del recurso es la enseñanza de las funciones trigonométricas y sus aplicaciones. Con esta finalidad, se elaboró inicialmente un modelo matemático que representa un sonido de baja complejidad, utilizando una aproximación de la discretización del sonido por medio de la suma de funciones trigonométricas y aplicaciones computacionales. A partir de este modelo, se trabajó en la construcción de un prototipo robótico con el propósito de abordar la trigonometría de forma práctica. La investigación fue estructurada en tres etapas: el desarrollo de un recurso didáctico, su experimentación en un contexto extracurricular y, como trabajo futuro, su aplicación en el aula. La experimentación de este recurso presentó resultados prometedores, ya que la presencia de un robot que se mueve al captar, por medio de un micrófono, un sonido simple (como el de una vocal) puede generar un impacto positivo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, especialmente en la enseñanza de la trigonometría.

Palabras clave: Recurso Didáctico. Funciones Trigonométricas. Modelado Matemático y Robótica.

Recebido em 25/07/2025
Aceito em 10/11/2025

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

É bem conhecido atualmente que as tecnologias digitais (TD) são fortes aliadas no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Ditas ferramentas têm sido utilizadas como recurso no desenvolvimento de atividades que possibilitam ao estudante compreender conceitos matemáticos. Com base na contextualização, de forma prática e interativa, em muitas oportunidades as TD introduzem elementos lúdicos que despertam a atenção dos estudantes. Além disso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), propõe a integração entre o ensino de Matemática e as novas tecnologias a fim de se atingirem as competências para o desenvolvimento do pensamento crítico e autônomo. O documento argumenta, ainda,

que a Matemática e suas tecnologias podem influenciar na seleção de modelos matemáticos por meio da utilização de variados recursos.

Nesse cenário, a Modelagem Matemática se destaca como uma importante metodologia de ensino e aprendizagem ao propor a investigação de situações-problema do mundo real por meio da Matemática. A sua articulação com tecnologias digitais, como a robótica, potencializa a criação de ambientes de aprendizagem dinâmicos, permitindo aos estudantes visualizar, simular e interagir com os modelos matemáticos de forma concreta.

Contudo, a integração efetiva entre tecnologia, modelagem e ensino é um processo desafiador e exige pesquisa para que possa ser implementada em sala de aula. Perante esse problema, surge o questionamento: É possível desenvolver atividades que unam modelagem matemática e robótica, de forma a contextualizar e aplicar conceitos de funções trigonométricas em sala de aula com a participação ativa dos estudantes? Considerando a questão previamente abordada na dissertação de mestrado do primeiro autor (Rodrigues, 2020), três etapas são eleitas na investigação: 1) desenvolvimento de um recurso didático; 2) experimentação extracurricular e 3) aplicação em sala de aula com coleta de dados. Neste trabalho são apresentadas as duas primeiras, sendo que a terceira delas será realizada como trabalhos futuros.

Nesse sentido, o objetivo deste artigo é apresentar o desenvolvimento de um recurso educacional tecnológico que integra modelagem matemática e robótica para o ensino de funções trigonométricas. Metodologicamente, a pesquisa é de natureza qualitativa e se configura como o desenvolvimento de um produto educacional. As etapas envolvem a criação de um modelo matemático para representar o som de uma vogal e a subsequente construção de um protótipo robótico, sendo a finalidade demonstrar a aplicação das referidas funções.

O trabalho está organizado da seguinte forma: apresentação da Modelagem Matemática na primeira seção; robótica e experimentação na segunda etapa, enquanto a terceira reserva-se à exibição do desenvolvimento do recurso; os

resultados e discussão serão desenvolvidos na quarta seção. Por fim, a quinta seção trará as considerações finais.

MODELAGEM MATEMÁTICA

A atividade de modelagem se caracteriza pelo ato de criar representações, envolvendo a construção de modelos para descrever algo ou um fenômeno específico. Conforme definido pelo Dicionário Online de Português, uma das conceituações de modelo é descrita como um "modo simplificado de representar um fenômeno, servindo como base de referência para um estudo analítico" (Modelo, 2019). Dentro desse contexto, a Modelagem Matemática surge como um campo da Matemática dedicado a expressar um fenômeno da realidade por meio de um modelo matemático.

Originada da matemática aplicada, essa abordagem visa generalizar, analisar criticamente, avaliar e até mesmo antecipar tendências em relação ao evento observado na realidade. Segundo Bassanezi (2009, p. 24) a Modelagem Matemática assim pode ser definida:

> [...] um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

No contexto educacional, este processo geralmente se desdobra em etapas, partindo da escolha de um tema da realidade, passando pela formulação de um problema, a construção de um modelo matemático (matematização), sua resolução e, por fim, a interpretação e validação dos resultados no contexto original.

No âmbito educacional, a obtenção de modelos matemáticos também encontra apoio nas TD, destacando-se o uso do computador para a execução de cálculos. Esse recurso permite que o estudante concentre seus esforços no processo de modelagem. Nesse contexto, o computador proporciona ao estudante a capacidade não apenas de criar seus próprios modelos, mas também de se envolver de maneira mais

cativante e essencial na prática científica, estabelecendo uma conexão mais próxima com os fenômenos da realidade (Blikstein & Zuffo, 2003).

Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2017) a visualização, elemento crucial para a compreensão de determinados conceitos matemáticos, pode ser aprimorada pela presença das TD, contribuindo assim para o desenvolvimento da Modelagem Matemática. Nesse sentido, a robótica educacional surge como uma ferramenta que materializa essa experimentação**,** permitindo que os estudantes construam e interajam fisicamente com os modelos matemáticos, transformando conceitos abstratos em artefatos concretos e funcionais, os quais serão analisados na próxima seção.

ROBÓTICA EDUCACIONAL E EXPERIMENTAÇÃO

Robótica Educacional: a palavra robô é um substantivo masculino que tem origem no tcheco *robota* e significa trabalho duro. De acordo com o Dicionário Priberam da Língua Portuguesa, robô é definido como: “1. Aparelho capaz de agir de maneira automática numa dada função; 2. Autômato com figura humana. 3; [Figurado] Indivíduo que obedece mecanicamente” (Robô, 2019). Trata-se de equipamentos programados para realizar tarefas repetitivas de forma autônoma ou programada.

De acordo com o *American Heritage Dictionary*, a robótica abrange a ciência e o estudo da tecnologia relacionada ao design, à fabricação, à teoria e à aplicação de robôs (Robotics, 2019). Para se envolver no desenvolvimento da robótica é importante possuir conhecimentos em eletrônica, mecânica e programação de *software*. As áreas de eletrônica e *software* demandam familiaridade com conceitos de eletrônica embarcada, exemplificada pela placa Arduino e sua linguagem de programação. Em contrapartida, a esfera mecânica requer conhecimentos em aspectos como cinemática, pneumática e hidráulica.

Diante dessas ideias, constata-se a integração abrangente dos robôs na sociedade. A robótica desempenha importante papel no cenário educacional,

tornando-se cada vez mais uma ferramenta auxiliar no processo de aprendizagem. A presença da robótica na educação formal remonta a um período não tão recente. O pioneiro dessa estratégia de ensino foi Seymour Papert, pesquisador do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), nos anos de 1960.

Ao fundamentar o raciocínio no pensamento concreto e empregar princípios abstratos, como instrumentos para refiná-lo, torna-se viável a utilização da robótica educacional para inserir conceitos essenciais na formação de um pensamento. Esse processo consolida e amplia a capacidade do estudante lidar com diversas situações de maneira criativa e flexível. A seguir, explora-se o conceito de experimentação, destacando sua relevância no processo de ensino e aprendizagem.

Experimentação: no âmbito da experimentação, Borba e Villarreal (2005) propõem o conceito de seres-humanos-com-mídias, então estabelecendo alicerces para que se compreenda a produção de conhecimento como uma atividade coletiva. Nesse enquadramento, tanto atores humanos quanto não humanos desempenham papéis centrais e entrelaçados. Em consonância com essas ideias, a avaliação das mídias não se sustenta em uma escala linear de qualidade, em que algumas seriam superiores a outras; ao invés disso, observa-se uma ampla gama de tipos de mídia que, ao longo do tempo, influenciaram a criação de diversas formas de conhecimento.

A interação entre humanos e mídias instiga uma reconfiguração do pensamento, moldando-o mediante as variadas possibilidades e limitações inerentes a cada meio específico. A presença ou ausência de tais mídias impacta diretamente o tipo de conhecimento gerado, enquanto a introdução de uma nova mídia não invalida as anteriores, mas frequentemente as reposiciona, conferindo-lhes um papel distinto em relação às suas funções antecedentes. Um aspecto central desse conceito é a noção de moldagem recíproca, uma ideia exposta por Borba (1999), a qual destaca a influência mútua entre uma mídia e o pensamento daqueles que interagem com ela. Em outras palavras, a mídia molda o ser humano, mas, por sua vez, os seres humanos também moldam a mídia mediante o uso que fazem dela. Esse fenômeno é visível,

por exemplo, quando estudantes utilizam *software* de maneiras diferentes das previstas pela equipe de desenvolvimento. Logo, de maneira inversa, essa equipe busca criar *designs* que consideram como os estudantes realmente utilizam o *software*.

No contexto da experimentação matemática, são considerados raciocínios intuitivos, indutivos e analógicos em diferentes processos matemáticos. Isso envolve a avaliação numérica, visual e gráfica de conjecturas, bem como a formulação de novas suposições e generalizações baseadas na experiência (De Villiers, 2010). Dentro do cenário digital, a experimentação com tecnologias pode abranger a formulação, teste e validação de pressupostos apoiados por diversas representações matemáticas, aproveitando a dinamicidade da tecnologia e sua capacidade visual e simulatória (Borba & Villarreal, 2005; Borba, Scucuglia & Gandanidis, 2014).

Dessa forma, acredita-se que as tecnologias têm papel decisivo na orientação das atividades, pensamentos e produção de conhecimento dos indivíduos. A ideia de que o conhecimento é gerado por coletivos de seres-humanos-com-mídias (Borba & Villarreal, 2005) reflete a perspectiva em tela, na qual as mídias não são neutras em relação ao pensamento; ao contrário, elas desempenham papel fundamental em uma construção coletiva que envolve tanto seres humanos quanto tecnologias. Isso ressoa com as palavras de Borba e Villarreal (2005, p. 23): “[...] essa noção é apropriada para mostrar como o pensamento é reorganizado com a presença das tecnologias de informação e que tipos de problemas são gerados por coletivos que incluem humanos e mídias, como papel e lápis, ou várias tecnologias de informação.”

Levando em consideração tais aspectos, a elaboração de um recurso didático é proposta com a intenção de fomentar uma experimentação e a criação coletiva de conhecimento.

DESENVOLVIMENTO DO RECURSO

O processo de criação de recursos didáticos utilizando tecnologias digitais segue um conjunto de etapas organizadas de maneira similar à produção de materiais didáticos convencionais.

Nesta linha de pensamento, a idealização do recurso didático seguiu o modelo de Design Instrucional (Silva, 2013). A etapas do projeto englobam os seguintes aspectos fundamentais:

a) Inicia-se com uma análise das características específicas do público-alvo, considerando fatores como o nível educacional e os objetivos relacionados ao tópico a ser abordado;

b) Em seguida, é realizado o planejamento de um protótipo com o objetivo de aprimorar a apresentação dos conteúdos e atividades de acordo com o público-alvo e o tema escolhido, bem como são definidos os componentes essenciais do protótipo;

c) O desenvolvimento propriamente dito entra em cena, envolvendo a construção do protótipo e a realização de testes para assegurar o seu funcionamento adequado;

d) A etapa de experimentação se refere à aplicação prática do material desenvolvido. É nesse momento que o recurso é utilizado em contexto educacional, permitindo a avaliação de sua eficácia e impacto;

e) A fase de avaliação busca analisar a efetividade do recurso, avaliando seu desempenho e resultados alcançados. Isso é essencial para determinar se o material atende aos objetivos educacionais propostos.

No contexto deste estudo, o foco está na introdução de conceitos relacionados a funções trigonométricas e suas aplicações. A abordagem sugerida envolve a vinculação da Modelagem Matemática teórica com a interpretação prática, representada pela soma de funções trigonométricas para reproduzir o som de uma vogal. Para materializar essa estratégia didática, concebeu-se um robô mecânico, denominado *drawbot* pela sua capacidade de desenhar, sendo controlado por aplicativos computacionais capazes de interpretar as características matemáticas do

som de uma vogal. Ao final, esse conhecimento se traduz em uma representação visual do gráfico da curva que modela o som da vogal.

O percurso metodológico desse trabalho teve como base a Modelagem Matemática, uma área do conhecimento que visa representar um fenômeno da realidade por meio de ferramentas matemáticas como equações, funções, dentre outras (Bassanezi, 2009). Neste estudo, adotou-se a metodologia proposta por Biembengut e Hein (2018) para a abordagem eleita, utilizando-a como estratégia central para desenvolver o recurso educacional. A definição de Modelagem Matemática por Biembengut e Hein (2018, p. 11) é descrita como “o processo de obtenção de um modelo”. A partir desse processo, ela então emerge como um elo entre a disciplina matemática e a realidade, uma conexão que, segundo os autores, muitas vezes é percebida como distante.

Para a elaboração do modelo matemático, Biembengut e Hein (2018) propõem três etapas básicas, cada uma com duas subetapas, como mostrado na figura 1:

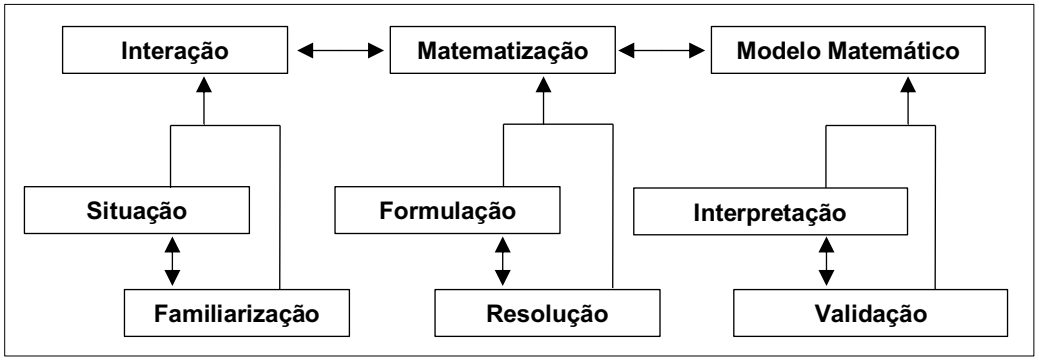

Figura 1 - Processo de Modelagem Matemática.

Fonte: Adaptado de Biembengut e Hein (2018, p. 14)

O procedimento mostrado anteriormente serviu de roteiro para o desenvolvimento do processo de modelagem matemática. A etapa inicial, denominada “Interação”, concentra-se na definição do tema a ser estudado, instigando a busca por informações relevantes à situação-problema, seja por meio de experimentação direta ou pesquisa online. Esse ciclo de investigação se perpetua até atingir um entendimento suficiente

para avançar. A segunda fase, “Matematização”, consiste na transposição da situação-problema para a linguagem matemática a partir da formulação de equações, fórmulas ou programas computacionais. O objetivo é encontrar soluções ou permitir uma aproximação eficaz. Na última etapa, “Modelo matemático”, o projeto desenvolvido é avaliado para determinar sua eficácia em representar a situação-problema original. Caso o modelo não satisfaça os critérios desejados, ajustes são realizados retrocedendo à etapa anterior (Biembengut & Hein, 2018).

No que diz respeito ao recurso educacional, elaborado mediante a integração da Modelagem Matemática e da robótica, seu desenvolvimento ocorreu em três estágios:

• Estágio 1 – modelagem matemática do sinal de voz de uma vogal utilizando ferramentas de trigonometria e aproximação de funções, para a obtenção de uma curva que se ajusta ao som produzido;

• Estágio 2 – construção do *drawbot* e passagem da informação do Estágio 1;

• Estágio 3 – implementação da interação de um aplicativo para smartphone com o *drawbot* para desenho da função de ajuste obtida no Estágio 1. (Rodrigues, 2020).

Assim, a base teórica para a elaboração do recurso educacional deste estudo, resultado da pesquisa de mestrado do primeiro autor desse artigo (Referência será incluída na versão final), é delineada pelos três estágios, componentes da Modelagem Matemática. A metodologia de modelagem proposta por Biembengut e Hein (2018) desempenhou papel crucial na obtenção de um resultado satisfatório que atende às exigências para sua aplicação no ambiente educacional.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir, serão apresentados detalhes sobre o progresso dos estágios delineados na seção anterior, assim como os resultados obtidos.

ESTÁGIO 1: MODELAGEM MATEMÁTICA DO SINAL DE VOZ DE UMA VOGAL

Procedeu-se em uma primeira etapa na digitalização do som, obtida por meio da gravação da voz em um computador com o uso de um microfone, uma placa de som e o *software* de edição de tratamento de áudio Audacity[1]. Detalhes técnicos desta etapa podem ser encontrados em (Referência será incluída na versão final).

É precisamente nesta fase que se obtém uma amostragem de dados digitais, ou seja, uma lista de pontos discretos no plano bidimensional. Tal lista está construída por pares cuja primeira coordenada é o tempo (neste caso de execução do som) e uma segunda coordenada que indica a amplitude do som. O processo é ilustrado no fluxograma na figura 2.

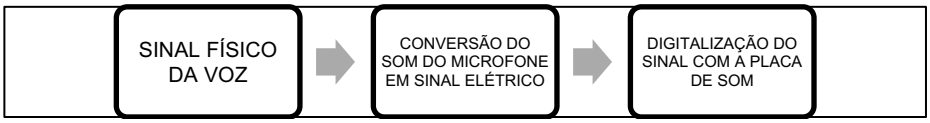

Figura 2 - Fluxograma da primeira etapa da modelagem matemática.

Fonte: Autoral

Para o desenvolvimento da modelagem do sinal de voz, foi preciso avaliar os recursos matemáticos a serem utilizados na modelagem. Devido à característica do som da voz ser um fenômeno ondulatório, as funções trigonométricas possuem propriedades necessárias para representá-lo em um modelo matemático.

As funções mais adequadas para representar esse som são a soma de senos, de cossenos ou de senos e cossenos. Neste estudo, decidiu-se utilizar as funções senoidais, pois segundo Ynoguti (2005, p. 11), “a razão para a escolha das senóides é a propriedade de fidelidade senoidal: senóides que entram em um sistema linear saem como senóides com (possíveis) mudanças na amplitude e fase, mas mantendo a frequência original”. Com essa decisão, a amostragem obtida é inserida no ambiente do aplicativo computacional do *software* Octave, com o intuito de construir uma curva contínua que interprete o som capturado. Para isto, utilizou-se um recurso do *software* que constrói uma curva que, olhando para um gráfico que contém os pontos e a curva, aparecem visualmente bem próximos. De fato, esse processo computacional tem um embasamento teórico no método conhecido como dos Mínimos Quadrados (Ruggiero

& Lopes, 1997). O Octave tem implementado na sua plataforma uma função denominada *lsqcurvefit* que realiza essa tarefa, apenas introduzindo a lista de pontos discretos no seu ambiente computacional.

A função *lsqcurvefit* possui várias opções de aproximação para a lista de pontos discretos. A aproximação de Fourier por senos (Folland, 2009) foi a representação aplicada, dada pela expressão $f(t) = \sum_{i=1}^{k} g_i\,(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i\, sen(b_i t + c_i)$, em que a_i é a amplitude, b_i é a frequência multiplicada por 2π, e k é o número de termos da soma, importante para obter a melhor aproximação. De fato, quanto maior o número k, mais próxima a curva estará dos pontos amostrados.

O processo desta etapa é ilustrado na figura 3 com o fluxograma de implementação.

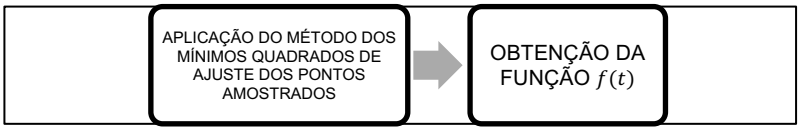

Figura 3 - Fluxograma do ajuste dos pontos amostrados do som da vogal “i”.

Fonte: Autoral

Foi escolhido $k = 4$ como número de termos para o ajuste de Fourier. Assim, a função que resulta do ajuste é a soma de quatro termos envolvendo as funções trigonométricas $g_i(t)$, com $i = 1,2,3,4$:

$$g_1(t) = 0.17\, sen(2\pi * 169.08 * t - 1.97)$$
$$g_2(t) = 0.14\, sen(2\pi * 314.51 * t - 1.39)$$
$$g_3(t) = 0.03\, sen(2\pi * 161.75 * t - \ 1.21)$$
$$g_4(t) = 0.01\, sen(2\pi * 179.48 * t - 0.21)$$

O gráfico da função $f(t)$, resultado da soma das funções $g_i(t)$, junto com os pontos amostrados, são apresentados na figura 4.

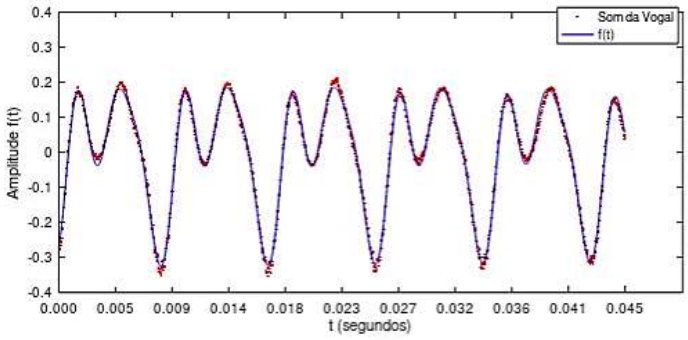

Figura 4 - Gráfico do ajuste $f(t)$ (em azul) e pontos de amostragem (em vermelho).

Fonte: Autoral

A partir da observação da figura 4, nota-se que a função $f(t)$ fica muito próxima dos pontos amostrados. Mas, o que significa afirmar que a função está próxima dos pontos? Isso é medido com um valor de acurácia escolhido pelo usuário do Octave. Assim, medindo a proximidade mediante o cálculo definido por $\max_j |f(t) - p_j|$, em que p_j são os pontos da amostra. Quanto mais próximo de zero for esse valor, melhor será a medida. Neste experimento, o erro foi de 0,321.

ESTÁGIO 2: CONSTRUÇÃO DO ELEMENTO DE ROBÓTICA

Este estágio relaciona a modelagem matemática do som de uma vogal em termos da função $f(t)$ e um elemento mecânico com o protótipo robótico. Para este estágio são necessários elementos de engenharia mecânica, cujos detalhes podem ser encontrados em Referência (será incluída na versão final).

O robô utilizado neste estudo foi do tipo 'carro', com duas rodas, escolhido devido à facilidade de construção, com materiais acessíveis e de baixo custo. Outro aspecto importante da eleição do robô foi a possibilidade de comunicação com outras plataformas utilizando elementos de eletrônica. Com efeito, os conhecimentos necessários para o desenvolvimento de elementos de robótica são a eletrônica, a mecânica e a programação de *software*. As partes eletrônica e de *software* requerem noções de eletrônica embarcada, a qual a placa Arduino[3] e sua linguagem de programação possuem em sua estrutura. Na figura 5 apresenta o produto construído.

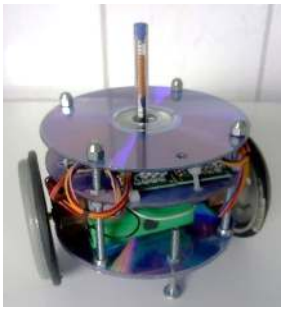

Figura 5 - Robô construído denominado *drawbot*.

Fonte: Autoral

Nota-se que a função de ajuste de curvas para os pontos gerados a partir da emissão da voz, captada pelo microfone, é um sinal analógico contínuo recebido pelo robô. Dessa forma, somente faltava na elaboração do elemento didático a integração do resultado da modelagem com o robô criado, apresentada a seguir.

ESTÁGIO 3: INTEGRAÇÃO DE UM APLICATIVO PARA SMARTPHONE COM O *DRAWBOT* PARA DESENHO DA FUNÇÃO DE AJUSTE.

A última tarefa da produção do recurso didático foi conectar os elementos da modelagem matemática com o robô. Com efeito, o *drawbot* produzido tem dois movimentos básicos: giro no próprio eixo, dado em graus (°), e movimento linear para frente e para trás, dado em milímetros (mm). Assim, as informações necessárias para o movimento do robô são: o diâmetro das rodas e a distância entre elas. Além disso, deve-se conhecer o funcionamento dado por pulsos.

Primeiramente, definiu-se o movimento linear, ou seja, a mobilidade das rodas no mesmo sentido. O dado de entrada é um valor em milímetros, ou seja, a quantidade de pulsos requisitados para o *drawbot* mover-se 1 mm. Como o motor precisa de 4.076 pulsos para dar uma volta completa, basta dividir a quantidade de pulsos pelo comprimento da circunferência da roda, com 284 mm, conforme ilustrado na figura 7.

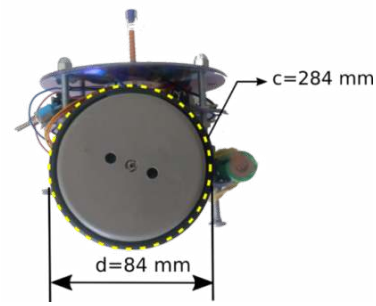

Figura 7 - Diâmetro e comprimento da circunferência da roda.

Fonte: Autoral

De posse desses dados, define-se uma função que retorna à quantidade de pulsos exigidos para um valor de entrada em milímetros representado por x, definida por $move_milimetros(x) = p/cx$, em que c é o comprimento da circunferência da roda, enquanto p a quantidade de pulsos para o motor realizar uma volta.

Para o *drawbot* girar em torno do próprio eixo a partir de um certo ângulo, é preciso relacionar o comprimento da circunferência de giro, medindo 424 mm, com o movimento da roda acoplada ao motor, que deve percorrer 135 mm para dar uma volta completa em relação ao eixo central, consoante mostrado na figura 8.

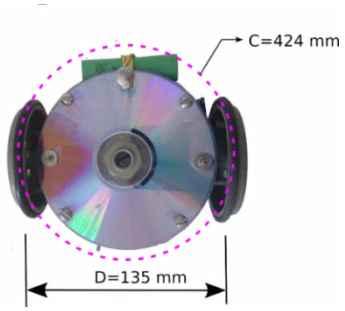

Figura 8 - Diâmetro e comprimento da circunferência entre as rodas.

Fonte: Autoral

Diante disso, define-se uma outra função $gira_graus(y) = ((move_milimetros(424))/360)y$, em que y representa o movimento de giro em graus em torno do próprio eixo. Portanto, as funções $move_milimetros(x)$ e $gira_graus(y)$

são aquelas que permitem o movimento do robô e fazem parte de um algoritmo de controle gravado em uma placa Arduino.

Para a criação do algoritmo que converte os pontos do gráfico em comandos para o movimento do *drawbot* fez-se uma análise entre três pontos, de acordo com o exposto na figura 9.

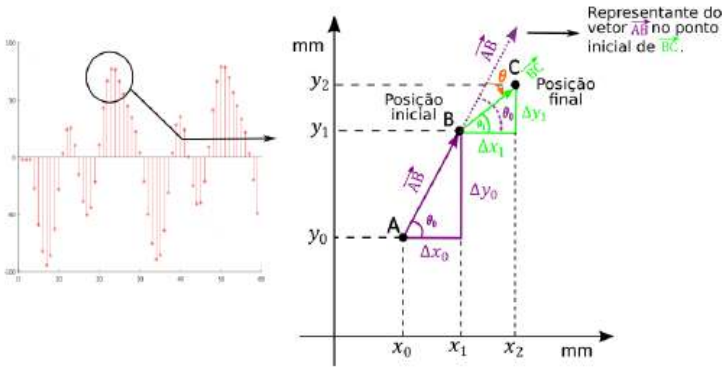

Figura 9 - Análise dos vetores em relação às posições inicial e final.

Fonte: Autoral

Os pontos analisados $A(x_0\ y_0), B(x_1\ y_1)$ e $C(x_2\ y_2)$ determinam dois vetores: o vetor $\overrightarrow{AB}$, representante da orientação e da trajetória do robô percorridas, e o vetor $\overrightarrow{BC}$, o qual interpreta o movimento executado. Portanto, para realizar esse movimento é preciso conhecer o módulo do vetor $\overrightarrow{BC}$, a distância percorrida e a diferença entre os ângulos θ_0 e θ_1, sendo $\theta_0 = \text{Arcsen}\left(\frac{\Delta y_0}{|\overrightarrow{AB}|}\right) \cdot \frac{180}{\pi}$, o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e o eixo x e θ_1 o ângulo entre $\overrightarrow{BC}$ e o eixo x definido por $\theta_1 = \text{Arcsen}\left(\frac{\Delta y_1}{|\overrightarrow{BC}|}\right) \cdot \frac{180}{\pi}$.

Além disso, a partir da constatação que o intervalo de variação é constante, com a comparação da diferença θ_0 - θ_1, determinou-se o sentido do giro do carrinho. Portanto, para o *drawbot* se mover da posição inicial, primeiramente gira em torno do próprio eixo, um ângulo em graus dado por $\theta = \theta_0 - \theta_1$e, em seguida, uma distância igual ao módulo do vetor $\overrightarrow{BC}$em linha reta. Assim, há três possibilidades: (i) Quando

$\theta > 0$, o sentido do giro é horário; (ii) Quando $\theta = 0$, não há giro e; (iii) Quando $\theta < 0$, o sentido é anti-horário. A figura 10 ilustra essas três possibilidades de movimento.

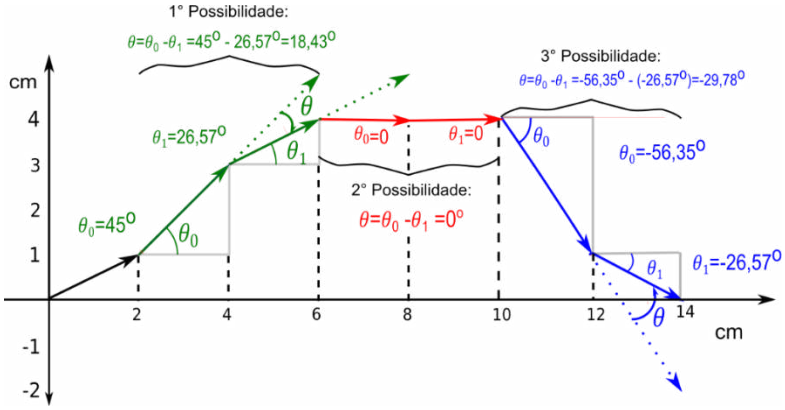

Figura 10 - Exemplo de movimento do robô para um trecho do gráfico.

Fonte: Autoral

Dessa forma, o *drawbot* construído consegue reproduzir a curva contínua resultante da modelagem. Finalmente, de forma ilustrativa, as etapas de todo o processo da emissão do som de uma vogal com o objetivo de transformá-lo em um desenho realizado pelo robô estão esquematizadas na figura 11.

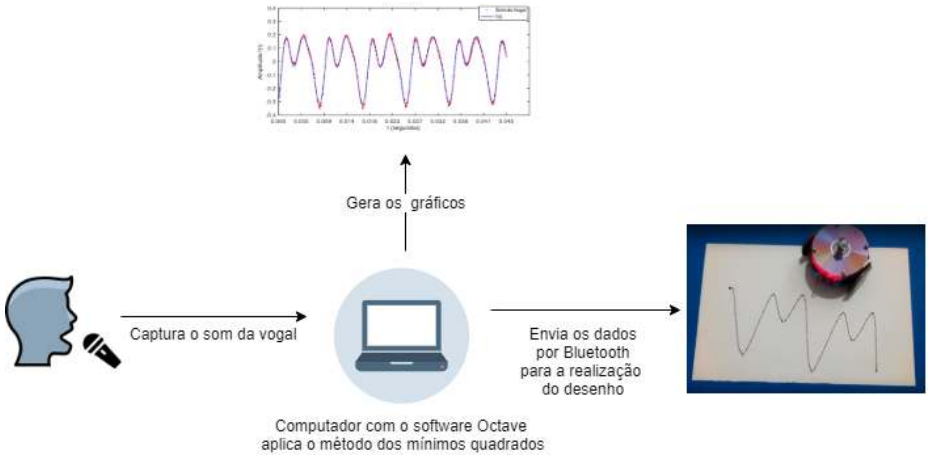

Figura 11 - Etapas do processo da emissão do som de uma vogal com o objetivo de representação gráfica pelo *drawbot*.

Fonte: Autoral

Para a validação do modelo foram utilizados dois métodos, um quantitativo via simulação computacional, e outro qualitativo feito por meio da inspeção visual do desenho construído pelo *drawbot*. O *software* Octave serviu de validação quantitativa do modelo. O resultado foi um gráfico com vetores representando a forma de onda do som de uma vogal apresentado na figura 12.

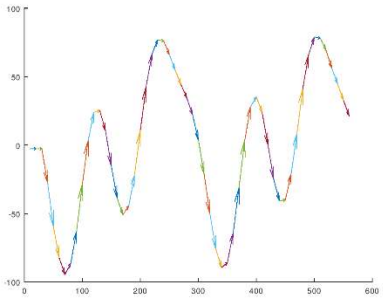

Figura 12 - Simulação do algoritmo no *software* Octave.

Fonte: Autoral

Por fim, o algoritmo satisfatoriamente representado em desenho executado pelo *drawbot* na forma de onda como retratado na figura 13.

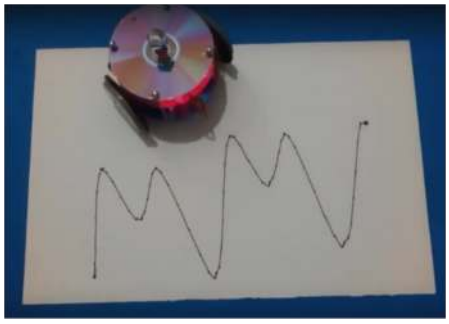

Figura 13 - Desenho feito pelo *drawbot* com base no algoritmo.

Fonte: Autoral

Assim, o modelo matemático apresentado define a base teórica do desenvolvimento de um recurso educacional presente em um manual, produto maior deste estudo (Referência será inserida na versão final), detalhado de forma que outros profissionais da educação possam replicá-lo. A abordagem de modelagem de

Biembengut e Hein (2018), como ciclo de desenvolvimento, permitiu chegar a um resultado satisfatório em relação à funcionalidade do recurso didático.

Experimentação do recurso didático: como validação didática do *drawbot* uma atividade interativa extracurricular foi realizada. O teste foi planejado em conjunto com um professor de Ensino Médio, contando com momentos de interação de 20 estudantes envolvidos. Para o início da atividade, estudantes se voluntariaram para falarem ao microfone a vogal "i". O objetivo desse momento foi o de representar a curva pelo *drawbot*, despertando dessa forma o interesse do grupo para a movimentação ocorrida. Em seguida, comparou-se com a voz de vários participantes e analisou-se a diferença de amplitude e frequência entre as vozes dependendo da pessoa. A atividade interativa permitiu a contextualização de forma prática do uso da função seno e o desenho feito pelo *drawbot* trouxe um caráter dinâmico à atividade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização do presente estudo possibilitou o desenvolvimento de um recurso educacional de base tecnológica de forma a integrar a teoria matemática com atividades práticas no contexto educacional de maneira lúdica e interativa. A atividade prática foi realizada por meio da produção de um robô seguindo as etapas de *Design* Instrucional e da elaboração do modelo matemático, de Biembengut e Hein (2018).

O recurso didático relaciona um som simples, como o de uma vogal, com as funções senoidais e robótica, propiciando a experimentação, o que permite demonstrar a aplicação da Matemática a uma situação real. Isso possibilita trabalhar conceitos como frequência e amplitude com base na comparação das vozes feminina e masculina, tendo os estudantes como sujeitos ativos nesse processo. Dessa forma, os estudantes são convidados a perceber como soma de funções senoidais se relacionam com o sinal da voz. O *drawbot* produzido nesta pesquisa pode trazer uma materialização da função modelada em forma de desenho.

Durante uma atividade interativa, o recurso didático pode ser empregado e acompanhado por uma discussão sobre a modelagem com funções trigonométricas. A avaliação do impacto do recurso ainda conduzida de maneira qualitativa, focando na motivação dos estudantes, sua participação durante a experimentação e suas análises. A interação com o robô e o trabalho em grupo são capazes de possibilitar aos estudantes um envolvimento de forma ativa no processo de ensino e aprendizagem, assim levando a descobertas e questionamentos educacionais.

REFERÊNCIAS

Bassanezi, R. C. (2009). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:* uma nova estratégia (3ª ed.). São Paulo: Contexto.

Biembengut, M. S., & Hein, N. (2018). *Modelagem matemática no ensino* (5ª ed.). São Paulo: Contexto.

Blikstein, P., & Zuffo, M. K. (2003). As sereias do ensino eletrônico. In M. Silva (Org.), *Educação online* (4ª ed., pp. 1–20). São Paulo: Loyola. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/242421586_As_sereias_do_ensino_eletronico

Borba, M. C. (1999). Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento. In M. A. V. Bicudo (Ed.), *Pesquisa em educação matemática:* Concepções e perspectivas (pp. 285–295). São Paulo: Editora UNESP.

Borba, M. C., Scucuglia, R., & Gadanidis, G. (2014). *Fases das tecnologias digitais em educação matemática: sala* de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking:* Information and communication technologies, modeling, visualization, and experimentation. New York: Springer.

Brasil. Ministério da Educação. (2018). Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics:* Philosophical and educational perspectives (pp. 205–221). New York: Springer.

Folland, G. B. (2009). *Fourier analysis and its applications*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Meyer, J. F. C. A., Caldeira, A. D., & Malheiros, A. P. S. (2017). *Modelagem em educação matemática* (3ª ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

Modelo. (2019). *Dicio:* Dicionário online de português. Porto: 7Graus. Recuperado de https://www.dicio.com.br/modelo/

Rodrigues, M. M. (2020). *Modelagem matemática da voz, trigonometria e robótica: Atividades interativas* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Uberlândia. Repositório da Universidade Federal de Uberlândia: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.367

Ruggiero, M. A. G., & Lopes, V. L. R. (1997). *Cálculo numérico:* aspectos teóricos e computacionais (2ª ed.). São Paulo: Makron Books do Brasil.

Silva, A. (2013). *Diretrizes de design instrucional para elaboração de material didático em EaD:* uma abordagem centrada na construção do conhecimento (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Ynoguti, C. A. (2005). *Processamento digital de sinais:* transformada discreta de Fourier [Slides]. Santa Rita do Sapucaí: Inatel. Recuperado de https://www.inatel.br/docentes/ynoguti/downloads/dsp-s886637-1/20-dft-s244331-1/file