Tangram
Revista de Educação Matemática

DOI: 10.30612/tangram.v7i1.17650

Mentalidades Matemáticas: recorrendo a atividades piso baixo/teto alto para desenvolvimento do senso numérico

Mathematical Mindsets: using low floor/high ceiling activities to develop number sense

Mentalidades Matemáticas: utilizando actividades de piso bajo/techo alto para desarrollar el sentido numérico

João Domingos Gomes da Silva Junior
Departamento de Matemática, Colégio Pedro II, CPII
Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil
E-mail: joao.junior.2@cp2.edu.br
Orcid: 0000-0002-1745-0302

Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa
Departamento de Matemática, Colégio Pedro II, CPII
Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil
E-mail: lmgccosta@gmail.com
Orcid: 0000-0002-5258-1447

Resumo: Discussões e sugestões sobre as práticas da Matemática em sala de aula têm sido analisadas e envolvido muitos professores/educadores. A abordagem Mentalidades Matemáticas, proposta por Jo Boaler vem ganhando reconhecimento nesse processo. É nesse caminho que este trabalho propõe a utilização de atividades investigativas, que se enquadram nas atividades denominadas piso baixo/teto alto, com nossos alunos. Além disso, o presente trabalho surge, também, como uma contribuição para a discussão de como tornar a aula de matemática num espaço dinâmico e motivador, dando especial destaque ao desenvolvimento do senso numérico e sua importância.

Palavras-chave: Mentalidades Matemáticas. Piso baixo/teto alto. Atividades Investigativa

Abstract: Discussions and suggestions about Mathematics practices in the classroom have been analyzed and involves many teachers/educators. The Mathematical Mindsets approach, proposed by Jo Boaler, has been gaining recognition in this process. It is along this path that this work proposes the use of investigative activities, which fit into the activities known as low floor/high ceiling, with our students. Additionally, this work also emerges as a contribution to the discussion on how to make the mathematics class a dynamic and motivating space, highlighting number sense.

Keywords: Mathematical Mindsets. Low Floor/High Ceiling. Investigative Activities.

Resumen: Las discusiones y sugerencias sobre las prácticas de Matemáticas en el aula han sido analizadas e involucrado a muchos profesores/educadores. El enfoque de Mentalidades Matemáticas, propuesto por Jo Boaler, ha ganado reconocimiento en este proceso. Es en este camino que este trabajo propone la utilización de actividades de investigación, que se ajustan a las actividades conocidas como piso bajo/techo alto, con nuestros alumnos. Además, este trabajo también surge como una contribución a la discusión sobre cómo hacer que la clase de matemáticas sea un espacio dinámico y motivador, resaltando el sentido numérico y su importancia.

Palabras clave: Mentalidades Matemáticas. Piso Bajo/Alto Techo. Actividades Investigativas.

Recebido em 18/01/2024

Aceito em 28/04/2024

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A prática da Matemática em sala de aula ainda privilegia, de uma maneira geral, a manipulação de algoritmos, com a proposta e resolução de inúmeros exercícios a partir de rotinas, regras formais e procedimentos mecanizados para a obtenção de uma solução única, e não se centra na construção de conhecimento. Constata-se o uso excessivo da repetição e procedimentos padronizados, o que desmotiva tanto alunos quanto professores e propicia que os primeiros se afastem da matemática. "Os estudantes são levados a pensar que não existe lugar para raciocínio na aula de matemática."(Boaler, 2018, p.42)

Visando alterar esta situação, enquanto se promove uma mudança de mentalidade nos alunos e uma relação positiva com a Matemática, Boaler (2018) sugere a abordagem Mentalidades Matemáticas que, fundamentada na neurociência e na psicologia, propõe uma mudança de atitude e de prática pedagógica.

Dessa forma, a busca por uma sala de aula que fuja da tradicional, tem sido objeto de discussão de muitos educadores/professores e certamente está no estado da arte quando há debates sobre metodologias e propostas de ensino. Visando desenvolver no aluno a capacidade de transpor o raciocínio utilizado na resolução de tarefas, para o estudo de outros assuntos ou mesmo de problemas a elas relacionados, surge a necessidade de colocá-lo perante situações em que o trabalho investigativo seja essencial, de forma que ele apresente seus próprios problemas.

O recurso à utilização de problemas em sala de aula tem estado presente ao longo do tempo. Essa prática conduz a que se recorra a situações clássicas relatadas pela história da Matemática, possibilitando aos alunos um estímulo ao conhecimento do que está ao seu alcance dentro e fora do ambiente escolar. Nesse sentido, o uso de atividades que tenham conexões com a história da Matemática e do pensamento matemático é importante pois pode despertar interesse e representar um contexto significativo para a aprendizagem, como mencionado na BNCC

> (...) para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. (Brasil, 2018, p.299)

Mafra e Mendes (2002) evidenciam que a história tem um papel relevante nos processos cognitivos das crianças que estão nas séries iniciais, já que contribui para o avanço do raciocínio a partir da resolução de problemas e da prática investigativa. Ao utilizar esses problemas matemáticos com os alunos, estamos proporcionando uma oportunidade valiosa de reflexão sobre o pensamento matemático do passado, ao mesmo tempo que estimulamos sua motivação intrínseca para buscar soluções. Essa abordagem enriquece o aprendizado, permitindo um desenvolvimento e uma compreensão mais sólida da Matemática, fortalecendo assim suas habilidades cognitivas.

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (Brasil, 2018, p. 266)

O presente trabalho surge como uma contribuição para a discussão de como tornar a aula de matemática num espaço dinâmico, motivador e desafiador, promotor de debate em que se fomente a argumentação e qual o tipo de atividades que podemos utilizar e como estas podem ser exploradas de forma a que os alunos tenham um papel ativo na construção do seu conhecimento.

Considerando que a metodologia pesquisa-ação "é entendida em sentido mais restrito, como sequência lógica e sistemática de passos intencionados, ou seja, passos com objetivos que se operacionalizam através de instrumentos e técnicas" (Pinto, 1989, p.15), esta pesquisa vai ao encontro da essência da pesquisa-ação

(Pinto, 1989; Trip, 2005), pois há uma ação por parte das pessoas implicadas no processo investigativo ao realizar uma articulação entre teoria e prática. Além disso, traz alguns desafios: o de pesquisar e o de participar, o de investigar e o de educar.

O artigo está organizado da seguinte maneira: na próxima seção será abordada a importância do trabalho investigativo na aula de matemática e as atividades de piso baixo/teto alto, seguindo-se a abordagem teórica da decomposição de um número natural no contexto do senso numérico e, a concluir, as considerações finais.

TRABALHO INVESTIGATIVO

O trabalho investigativo em sala de aula contempla, usualmente, três momentos fundamentais. À formulação da tarefa segue-se o desenvolvimento do trabalho e a terminar, tem-se o momento de síntese e conclusão final. No primeiro momento, o professor procura envolver os alunos no trabalho, sugerindo a execução de uma ou de um conjunto de tarefas. No decurso da atividade, o professor desempenha seu papel de mediador, monitorando a atuação dos alunos, verificando se eles estão trabalhando de modo produtivo, se as discussões que surgem conduzem a questionamentos e à procura de respostas, se conjecturas são estabelecidas, e se a procura de suas justificativas é ou não iniciada. Para terminar, o professor procura sistematizar o trabalho realizado, averiguando a que conclusões os alunos chegaram, que explicações foram encontradas, se existem generalizações e que conjecturas foram formuladas, promovendo que os alunos comuniquem suas ideias para o grande grupo. Segundo Ponte et al,

> O professor tem de manter um diálogo com os alunos enquanto eles vão trabalhando na tarefa proposta, e no final cabe-lhe conduzir a discussão colectiva. Ao longo de todo este processo, precisa criar um ambiente propício à aprendizagem, estimular a comunicação entre os alunos e assumir uma variedade de papéis que favoreçam a sua aprendizagem. (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas, & Ferreira, 1998, p.2)

Para que o desenvolvimento do potencial criativo seja um dos objetivos do professor, é fato que a dinâmica da aula precisa sofrer alterações, sendo primordial o questionamento de atitudes mecanizadas em relação ao conhecimento matemático, transformando o tempo e os espaços escolares nos quais o conhecimento se constrói e a aprendizagem se dá, passando pela reinvenção dos papéis tradicionalmente atribuídos ao professor e ao aluno.

É natural que essa transformação acarrete um questionamento sobre o tipo de tarefas propostas, sendo importante rever as diferentes situações matemáticas com base nas quais os alunos constroem e desenvolvem o conhecimento matemático. Os problemas propostos devem ser abertos, e é desejável que partam de situações da vida real, com significado para os alunos, situações abrangentes que possibilitem e que, até, estimulem a obtenção de várias respostas ou, mesmo, a necessidade de elaborar outros problemas a partir dela.

> Os problemas abertos, ao contrário dos fechados, que apresentam soluções únicas, oferecem ao seu solucionador a chance de aventurar-se no mundo da imaginação na medida em que o indivíduo sabe não estar preso a processos e a resultados pré-determinados. (...) o solucionador tem a oportunidade de chegar a uma gama de soluções por meio do pensamento divergente, algumas corretas, outras equivocadas, algumas bem elaboradas, outras em processo de estruturação, algumas tidas como válidas, outras não aceitas, e entre todas essas uma quantidade menor de respostas originais, tal como ocorre no processo de solução de problemas na vida real. (Gontijo, Carvalho, Fonseca, & Farias, 2019, p. 62)

Perante um problema aberto, o aluno sente-se menos pressionado e, por isso, mais à vontade para responder. Assim, raramente deixa as questões sem resposta, o que não costuma acontecer perante problemas fechados, pois nesta situação, ele teme errar. Acresce que,

> Nesse processo de sentir-se livre para conjecturar, o solucionador toma consciência de seu potencial criativo, uma vez que não precisa perseguir os processos e a solução esperada pelo professor, mas pode buscar, por conta própria, encontrar uma ampla gama de soluções admissíveis, o que pode

> favorecer o surgimento de produtos qualitativamente válidos. (Gontijo et al, 2019, p.62)

PISO BAIXO/TETO ALTO

"Todo o professor sabe que ótimas tarefas matemáticas constituem um recurso maravilhoso. Elas podem fazer a diferença entre estudantes inspirados e felizes e estudantes desmotivados e distantes" (Boaler, 2018, p.51). As atividades piso baixo/teto alto são propostas de trabalho em que todos os alunos, trabalhando individualmente ou em grupo, podem se envolver, independentemente do seu entendimento ou conhecimento prévio. São instigantes e desafiadoras e contribuem para que os alunos se tornem matemáticos competentes e confiantes.

A busca por soluções e as investigações realizadas são essenciais para compreender fenômenos, construir representações significativas e desenvolver argumentações consistentes em diversos contextos. Essas atividades envolvem ideias e objetos que são fundamentais a fim de contribuir para ampliar o conhecimento e a compreensão do mundo ao nosso redor. O recurso a este tipo de tarefas é uma ótima maneira de atingir uma série de objetivos matemáticos importantes. "Esse tipo de atividade é aberta e desafiadora, também possibilita a expansão de desenvolvimento até os níveis mais elevados, o que possibilita a participação de todos os estudantes de forma equitativa." (Silva, Silva & Sena e Silva, 2022, p. 5)

O matemático e cientista da computação Seymour Papert, influenciado pelas ideias de Piaget, procurou formas de introduzir as crianças no mundo digital, tendo criado a linguagem de programação Logo. Para ele, a partir da experiência de criação, as crianças aumentariam a criatividade e a capacidade de aprendizagem, o que seria muito útil na aprendizagem. De acordo com o portal NRICH[1] (2019), Papert, partindo da ideia de "aprender, fazendo" e sua aplicação a partir de ferramentas computacionais, criou o conceito de construcionismo.

[1] https://nrich.maths.org/

Adaptando alguns princípios do design da linguagem Logo, surge o conceito e a nomenclatura "piso baixo/teto alto". Nesse contexto, "piso baixo" significava que novos usuários, incluindo aqueles que nunca tiveram contato anterior com a linguagem, devem achar fácil começar, e "teto alto" significava que a linguagem de programação não deve ser limitante para os usuários avançados. De maneira semelhante, a expressão "piso baixo/teto alto" é usada para referir recursos que todos podem começar e que todos podem ficar fascinados, podendo o limite de sua exploração ser em níveis posteriores de aprendizagem.

É importante salientar que o limiar deve ser matematicamente acessível para todos os alunos do grupo, ou seja, todos precisam ter o conhecimento matemático prévio indispensável para começar a trabalhar no problema, o que varia de acordo com a faixa etária e com a série. À vista disso, o "piso baixo" pode atenuar o desenvolvimento da ansiedade matemática, garantindo que os alunos não desistam no primeiro obstáculo, além de ser promotor da equidade em sala de aula. Por sua vez, o "teto alto" disponibiliza para todos, a oportunidade de desenvolver sua resiliência, originando a elaboração de perguntas mais difíceis e a resolução de problemas mais desafiadores. Geralmente essas atividades começam com uma investigação. A investigação matemática refere-se à exploração contínua de uma situação matemática e, como referimos anteriormente, ela se distingue da resolução de problemas por ser aberta.

Dessarte, estas atividades são instigantes e desafiadoras pois contribuem para que os alunos se tornem ativos no processo de aprendizagem, procurem estratégias visando a resolução de problemas, e estabeleçam conexões entre conceitos e os diferentes temas da matemática. Assim, recorrer a este tipo de tarefas é, de fato, uma ótima estratégia a fim de atingir uma série de objetivos matemáticos importantes, afinal sua utilização, de acordo com Boaler (2018),

➔ Leva os alunos a resolver problemas que têm mais do que uma solução;

➔ Ajuda os alunos a procurar entender problemas complexos;

➔ Permite que os alunos selecionem uma entre várias estratégias ou pontos de entrada;

➔ Favorece a troca de ideias;

➔ Incentiva a procura de "fazer sentido", a colocação de questionamentos e o estabelecimento de conjecturas;

➔ Fomenta a argumentação matemática;

➔ Reforça a necessidade de pensar profundamente sobre os problemas;

➔ Ajuda os alunos a ver a conexão entre os conceitos e entre as grandes ideias matemáticas;

➔ Estimula o trabalho colaborativo em grupo e em pequenos grupos;

➔ Promove o respeito à diferença e promove a diversidade;

➔ Impulsiona o pensamento criativo e a procura de estratégias diversificadas;

➔ Encara o erro como parte do processo de aprendizagem, estimulando a sua discussão;

➔ Permite que os professores sirvam como mediadores enquanto observam e interagem com os alunos enquanto os resolvem;

➔ Incentiva os alunos (e professores) a se concentrarem no PROCESSO em vez da solução.

Na próxima seção, começamos por fazer breves considerações acerca de alguns conceitos matemáticos envolvidos no problema geral que conduziu a uma atividade piso baixo/teto alto aplicada em sala de aula.

A DECOMPOSIÇÃO DE UM NÚMERO NATURAL[2]

A habilidade de interagir com os números de forma flexível é chamada de senso numérico e é fundamental para o trabalho em matemática, não só na manipulação aritmética como no entendimento algébrico. Para desenvolver essa habilidade é necessário trabalhar com os números, recorrendo a várias representações, de forma diferente daquela que dá primazia a fatos matemáticos e à memorização.

> O senso numérico, criticamente importante para o desenvolvimento matemático dos alunos, é inibido pelo excesso de ênfase na memorização de fatos matemáticos em sala de aula e em casa. Quanto mais se enfatiza a memorização dos alunos, menos eles estarão dispostos a pensar sobre os números e suas relações, bem como usar e desenvolver o senso numérico (BOALER, 2015 pag. 4)

O senso numérico está presente na decomposição dos números e isso leva-nos a escrever um número natural como soma de inteiros positivos, problema que é bem antigo. Segundo Cardoso (2006, p. 8), "é consensual que alguns desenhos atribuídos ao homem das cavernas (certas pinturas rupestres) estejam associados a partições de números utilizadas como procedimento de cálculo elementar." Para Santos (2010, p.27), "Uma partição de um inteiro positivo n é uma coleção, não ordenada, de inteiros positivos cuja soma é n. Os números que compõem uma partição são chamados partes desta partição". Por exemplo existem 7 partições do 5 (contando o número como a primeira partição)

5
4+1
3+2
3+1+1
2+2+1
2+1+1+1
1+1+1+1+1

---
[2] Neste texto, usaremos número natural para designar os números inteiros positivos

A procura da quantidade dessas partições levou ao estudo das funções geradoras. Não é fácil encontrar esse número, embora exista uma fórmula exata para o seu cálculo que resultou do trabalho dos matemáticos S. Ramanujan[3], G.H. Hardy e H. Rademacher. Sendo a contribuição do matemático indiano S. Ramanujan fundamental para a obtenção da mesma.

O estudo deste problema é bem antigo. Euler (1707 - 1783) iniciou o seu estudo combinatório e provou, em 1748, que qualquer número natural tem tantas partições em partes ímpares, quantas as partições em partes distintas[4].

Uma partição de um inteiro positivo n pode ser representada graficamente por meio de uma sequência de linhas de n pontos no plano, essa representação é chamada de Gráfico de Ferrers da partição. Em cada linha colocamos, em ordem não-crescente, um número de pontos igual a cada uma de suas partes, na figura 1 podemos ver a representação das às partições do número 5:

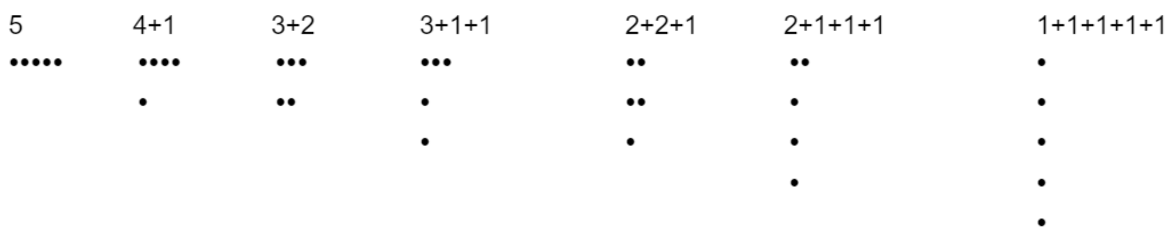


Figura 1. Gráficos de Ferrers das partições de 5.

Fonte: os autores (2023).

Em vez de pontos poderiam ter sido utilizados quadrados

---

[3] Srinivasa Iyengar Ramanujan (1887-1920), considerado um génio matemático do seu tempo, foi um autodidata com muito pouco estudos, no sentido oficial do termo, que nasceu e cresceu na Índia, no distrito de Tanjor, província de Madras. Ramanujan era um homem muito religioso, com uma memória prodigiosa e que tinha um modo muito próprio de tratar as questões matemáticas. Contam-se histórias muito pitorescas acerca dele, durante os cerca de 5 anos que passou no Trinity College em Cambridge, a convite de Hardy, com quem trabalhou. Consta também ter referido que uma equação não tinha qualquer significado para ele a menos que expressasse um pensamento de Deus. (Cardoso, 2006, p.9) A história da sua vida é tema do filme britânico "*The Man Who Knew Infinity*"(O Homem Que Viu o Infinito)

[4] Para aprofundar este assunto pode consultar Cardoso (2006) e Santos (2010).

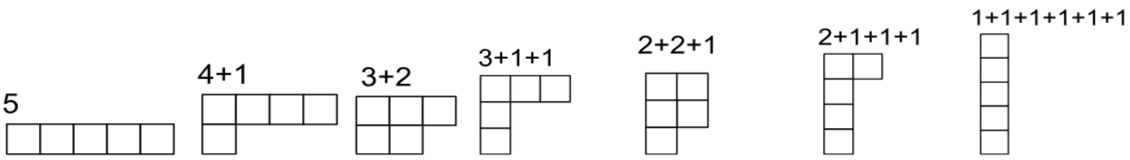
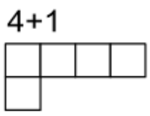
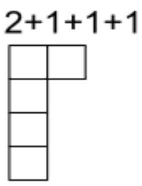


Figura 2. Gráficos de Ferrers das partições de 5, usando quadrados.

Fonte: os autores (2023).

Dizemos que uma partição de n é conjugada de outra se, ao trocarmos as linhas pelas colunas do gráfico de Ferrers desta, obtemos o Gráfico de Ferrers da outra.



e


são partições conjugadas.

Esta representação é muito útil para algumas propriedades das partições, como por exemplo: *O número de partições de n tendo k como a maior parte é igual ao número de partições de n com exatamente k partes*.

A SALA DE AULA

O problema de saber quais números naturais se podem escrever como soma de dois ou mais números naturais consecutivos é um dos vários problemas matemáticos que se prestam à investigação em vários níveis de aprofundamento, sendo num primeiro nível acessível a alunos do ensino fundamental. Estes, ao procurar responder alguns dos questionamentos propostos no decurso dessa investigação podem conduzir a várias outras questões que ampliam habilidades matemáticas de alunos do ensino médio ou, até, de graduação.

Em um nível muito simples, o problema serve ao propósito de desenvolver o senso numérico com os alunos enquanto se trabalham os conceitos de "consecutivo" e "inteiro" e de praticar a adição. Num nível intermediário, poderemos procurar regularidades, encontrar padrões e procurar formular algumas conjecturas que, num outro nível, poderão ser provadas. Como sugere Parker (1998, p.8), o problema pode ser colocado aos estudantes da seguinte forma:

> **Uma planilha inicial**
> Se somarmos dois ou mais inteiros positivos consecutivos, sua soma será um inteiro positivo:
> 2 + 3 = 5;   3 + 4 + 5 = 12;   5 + 6 + 7 + 8 = 26.
> Você pode encontrar quaisquer inteiros que não possam ser escritos como a soma de inteiros positivos consecutivos? Você pode encontrar algum que possa ser escrito de mais de uma maneira? Investigar.

Repare-se que se começa por atribuir tarefas simples e que todos os alunos conseguem realizar. A complexidade das tarefas vai aumentando de forma gradual, à medida que a atividade prossegue, e assim os alunos são levados ao limite enquanto tentam realizar o trabalho. À medida que o nível aumenta, menos alunos conseguem concluir as tarefas. O ponto fulcral da atividade é que todos os alunos estejam engajados e todos sejam capazes de realizar pelo menos uma parte da tarefa.

Segundo Sircar e Titus (2017), numa investigação matemática é esperado que os alunos, após a exploração inicial, apresentem seus próprios problemas.

> A exploração da situação, a formulação de problemas e sua solução dão oportunidade para o desenvolvimento do pensamento matemático independente e para o envolvimento em processos matemáticos, como organização e registro de dados, busca de padrões, conjecturas, inferências, justificativas e explicações de conjecturas e generalizações. (Sircar e Titus, 2017, p.57)

Estes processos de pensamento permitem que um indivíduo aprenda mais matemática, aplique a matemática em outras disciplinas e em situações cotidianas e resolva problemas. Assim, os alunos aprendem também sobre a matemática, especialmente sobre a sua natureza e o pensamento matemáticos. Um aspecto muito importante que este tipo de atividades promove junto dos alunos, tem a ver com a capacidade de eles perceberem o que está envolvido na aprendizagem de matemática, que aprender matemática envolve intuição, exploração sistemática, conjecturas, raciocínio, e que não se trata de memorizar e seguir um conjunto de procedimentos existentes.

A IMPORTÂNCIA DAS REPRESENTAÇÕES VISUAIS

O trabalho matemático ativa diferentes regiões cerebrais e ao explorarmos representações visuais, linguagem simbólica e linguagem natural se estabelecem conexões entre essas regiões, como é comprovado pela neurociência (Boaler, 2019). Muitas escolas não fomentam esse amplo desenvolvimento em matemática, nesse sentido, precisamos ampliar as formas como pensamos a disciplina para ensiná-la como uma matéria visual e multidisciplinar.

Em vista disso, é importante ressaltar que no ensino e no aprendizado da matemática não existe uma única ideia ou conceito que não possam ser ilustrados ou pensado visualmente. Duval (2006) salienta que a mobilização conjunta de vários registros de representação e a possibilidade de alternar esses mesmos registros é uma particularidade que sobressai da atividade matemática. O mesmo objeto matemático pode ser substituído por representações de sistemas diferentes.

As representações matemáticas mais comuns usadas nas aulas de Matemática são simbólicas, verbais e visuais, pertencentes a diferentes sistemas de representação com códigos e regras específicas. Para Henriques e Ponte (2014) algumas representações matemáticas, dentre as diversas (discursivas e não discursivas), desempenham um papel mais importante. Podendo ocorrer que, para uma dada situação de aprendizagem, mais do que um tipo de representação possa parecer ser adequado. Contudo, pode ser vantajoso usar uma forma particular de representação, em função da natureza e objetivo da tarefa a resolver, do contexto, do grau de familiaridade do aluno com essa representação e do seu conhecimento prévio relativo a conceitos e procedimentos envolvidos. Como Henrique e Ponte referem

> As representações matemáticas estão fortemente relacionadas com o raciocínio matemático devido ao seu importante papel no ensino e na aprendizagem da

> Matemática e, consequentemente, no desenvolvimento e compreensão dos processos de raciocínio dos alunos. (Henrique e Ponte, 2014, p. 277)

A importância excessiva que se dá nas escolas à representação simbólica formal da matemática, em detrimento do seu potencial visual, esquece que a representação visual permite transformar as experiências dos alunos e desenvolver importantes vias cerebrais que todos precisamos reforçar, segundo Jo Boaler,

> As novas pesquisas sobre o cérebro que mostram a importância do pensamento visual também incitam mudanças sobre como vemos os estudantes. A matemática escolar valoriza quem memoriza e é rápido no cálculo, mesmo que exemplificar conceitos em imagens seja um ponto fraco. Quando se dá o oposto: os alunos não conseguem memorizar ou usar bem os números, mas produzem fortes ideias e representações visuais, eles geralmente são encaminhados às aulas de reforço. (Boaler, Lang, Williams, & Cordero, 2019, p.10)

Como refere Jo Boaler et al (2019), "o ensino e o aprendizado da matemática precisa ser mais visual – não existe uma única ideia ou conceito matemático que não possa ser ilustrado ou pensado visualmente." Assim, esta atividade pode/deve ser abordada recorrendo aos gráficos de Ferrers, como pode ser visto na Figura 4.

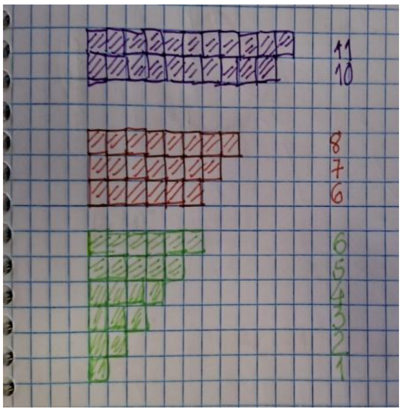


Figura 4. Gráfico de Ferrers da soma de inteiros consecutivos do 21.

Fonte: os autores (2023).

Esta abordagem visual permite que a atividade possa ser apresentada aos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental. Os alunos, usando pequenos quadrados de

EVA ou de outro material, vão procurar fazer "escadinhas" e analisar se conseguem formar escadinhas com um qualquer número de degraus. Depois, são convidados a expressar, por símbolos, as relações presentes em cada uma das escadinhas por eles formadas. Por exemplo, na Figura 5, temos 15 quadrados, com eles é possível formar escadinhas com 2, 3 ou 5 degraus, que se traduzem, respectivamente, por 15=8+7, 15=6+5+4 e 15=5+4+3+2+1, mas não é possível formar uma escada de 4 quatro degraus.

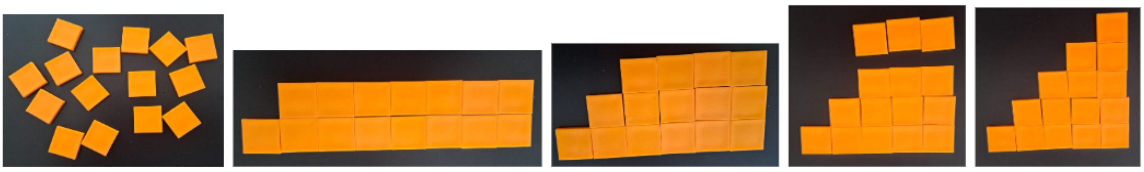


Figura 5. Soma de inteiros consecutivos do 15.

Fonte: os autores (2023).

E, abaixo, na Figura 6, estão representadas as tentativas de formar, com 12 quadrados, escadas com 2, 3 e 4 degraus, sendo claro que apenas é possível fazer a de 3 degraus.

Figura 6. Soma de inteiros consecutivos do 12.

Fonte: os autores (2023).

É importante enfatizar que usando este tipo de representação, algumas das conjecturas formuladas, surgem de forma natural.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As atividades de investigação proporcionam oportunidades valiosas para o aprendizado, e é essencial que o professor tenha conhecimento para criar uma atmosfera propícia ao ensino em todos os níveis e alcançar os objetivos tanto dos procedimentos utilizados quanto das habilidades que a investigação pode desenvolver. Corradi (2011, p. 163), menciona que as "atividades investigativas podem alcançar o objetivo de desenvolver nos alunos atitudes que "contribuem para mobilizar e consolidar seus conhecimentos matemáticos". Elas permitem que os alunos desenvolvam sua autonomia na busca de meios para a sua execução e explorem conceitos em diferentes níveis e profundidades, permitindo que cada um trabalhe em seu próprio ritmo e estimulando o professor a repensar aspectos fundamentais de sua prática docente. Sendo assim, parte significativa das aulas de matemática deveria ser destinada a esse tipo de atividade.

Outro aspecto positivo é o diálogo estabelecido no decorrer da atividade, entre os alunos e entre estes e o professor. Ao socializarem suas produções com os outros, os alunos têm a oportunidade de validar ou refutar suas conjecturas, ampliar suas estratégias e consolidar seus argumentos. Esse momento permite, também, que produzam e registrem seus entendimentos dos conceitos trabalhados, diversificando suas representações e estabelecendo conexões. Isso, enquanto a interação entre pares é promovida, ao descreverem as experiências vivenciadas e refletidas. Essa abordagem coloca os estudantes no centro da ação, da discussão, da reflexão e, consequentemente, da aprendizagem.

Sobre a natureza da atividade piso baixo e teto alto, Boaler salienta que "é aquela na qual todos podem se envolver, independentemente do seu entendimento ou conhecimento prévio, mas também é suficientemente aberta, para que possa se expandir até níveis mais altos, de forma que todos os alunos possam ser profundamente desafiados" (Boaler, 2020, p.2). Nesse contexto, atividades de piso baixo/teto alto, como a mencionada, proporcionam oportunidades únicas para os alunos se envolverem em uma variedade de atividades matemáticas. Elas os encorajam não apenas a comunicar suas ideias matemáticas, mas também a formular conjecturas, abstrair conceitos, experimentar soluções, testar hipóteses e generalizar resultados (Smith, 2002, p. 45).

Essas abordagens práticas e abertas têm sido reconhecidas como fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. É por meio desse tipo de atividade que os estudantes têm a oportunidade de se (re)descobrir e de (re)descobrir a matemática, que vai muito além do que é apresentado nos livros didáticos ou do que ainda povoa muitas salas de aula. Dessa forma se contribui para mudar paradigmas e alterar o panorama referido por D'Ambrosio de que os "alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor" e, também, "acham que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, do qual não se dúvida ou questiona, nem mesmo nos preocupamos em compreender porque funciona" (D'Ambrosio, 1989, p. 15).

REFERÊNCIAS

Boaler,Jo. (2015) FLUÊNCIA SEM MEDOl: pesquisas mostram as melhores formas de aprender fatos matemáticos. *Youcubed at Stanford University* <https://youcubed2.wpenginepowered.com/wp-content/uploads/2017/03/COD5_Fluence_Without_Fear_PORTUGUESE-.pdf>

Boaler, Jo. (2018). *Mentalidades Matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador.* Porto Alegre: Penso.

Boaler, J., Lang, C.; Williams, C. & Cordero, M. (2019). VER PARA ENTENDER: A importância da matemática visual para o cérebro e o aprendizado. *Youcubed at Stanford University* < https://www.youcubed.org/pt-br/downloadable/ver-para-entender-pdf/>

Boaler, J.; Munson, J.; Williams, C. (2020). *Mentalidades Matemáticas na sala de aula: ensino fundamental.* Porto Alegre: Penso.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília.

Cardoso, D. M. (2006). A Matemática e os seus Problemas, *Cadernos de Matemática.* Divulgação; CM06/D-02, Aveiro: Departamento de Matemática da Universidade.

Corradi, D. K. S. (2011). Investigações Matemáticas. *Revista da Educação Matemática da UFOP*, Vol I, 2011 - XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística. ISSN 2237-809X. p. 162-175.

D'Ambrosio, B. S. (1989) Como ensinar matemática hoje? *Temas e Debates*. SBEM. Brasília. Ano II. Nº 2, (p. 15-19).

Duval, R. (2006) A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 61, n.1-2, p. 103-131.

Gontijo, C. H., Carvalho, A. T. de, Fonseca, M. G. & Farias, M, P. de. (2019) *Criatividade em matemática: conceitos, metodologias e avaliação*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

Henrique, A., Ponte, J. P. da. (2014) As Representações como Suporte do Raciocínio Matemático dos Alunos quando Exploram Atividades de Investigação. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 276-298.

Mafra, J. R., S. Mendes, I. A. (2002). História no Ensino da Matemática Escolar: o que pensam os professores. *Ensino e formação docente: propostas, reflexões e práticas*. Belém: [s.n.]

NRICH. (2019) Low Threshold High Ceiling - an Introduction. <https://nrich.maths.org/10345>

Parker, J. (1998) Sums of Consecutive Integers. *Mathematics in School,* Vol. 27, No. 2, pp. 8-11 < http://www.jstor.org/stable/30215349>

Pinto, J. B. G.(1989) Pesquisa-ação: Detalhamento de sua sequência metodológica. *Mimeo*, Recife.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M. & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, 7(2), 41-70. Lisboa.

Rosa, A. P. (2006). Somas de números naturais consecutivos. *Gazeta de Matemática*, julho nº 151, Lisboa.

Santos, J. P. de; Silva, R. (2010). *Aspectos Combinatórios da Teoria Aditiva dos Números*. 1º Colóquio de Matemática da Região Sul. 91 p.

Silva, C. G., Silva, C. A., Sena e Silva, E. F. (2022) Maleta de Mentalidades Matemáticas: uma experiência inovadora no sertão de Alagoas. *CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO-CONEDU, VIII.*, Maceió - AL, <https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2022/TRABALHO_COMPLETO_EV174_MD1_ID12262_TB3063_07092022090607.pdf> Acesso em: 20 jun. 2023.

Sircar, S., Titus, S. (2017). Sums of Consecutive Natural Numbers. *At Right Angles*, [*S. l.*], ano 2, v. 6, p. 57-62. <https://apfstatic.s3.ap-south-1.amazonaws.com/s3fs-public/9_LFHC-Sums-of-Consecutive-Natural-Numbers.pdf?o.wFsvCnZySytFAppgej68RwIRPqnaBl> Acesso em: 20 jun. 2023.

Smith, J. K. (2002). Mathematics in Practice: Effective Teaching Strategies for Classroom Instruction. Publisher.

Trip, D. (2005). Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, n. 3, p. 443-466, set/dez.