Tangram
Revista de Educação Matemática

DOI: 10.30612/tangram.v7i2.17598

Potencialidades envolvidas em uma atividade investigativa sobre Geometrias Plana e Espacial com o uso do GeoGebra 3D

Potentialities involved in an investigate activity on Plane and Spatial Geometries using GeoGebra 3D

Potencialidades involucradas en una actividad investigativa sobre Geometrías Plana y Espacial usando el GeoGebra 3D

Esther Vanessa do Nascimento Santos
Licenciada em Matemática e Bolsista PIBIFSP do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos
Guarulhos, São Paulo, Brasil
esther.vanessa@aluno.ifsp.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-3413-9097

William Vieira
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos
Guarulhos, São Paulo, Brasil
wvieira@ifsp.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-5592-891X

Roberto Seidi Imafuku
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos
Guarulhos, São Paulo, Brasil
roberto.imafuku@ifsp.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-4047-9533

Emanoel Fabiano Menezes Pereira
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos
Guarulhos, São Paulo, Brasil
emanoel.pereira@ifsp.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-6070-6561

Resumo: Neste artigo avaliamos potencialidades envolvidas em uma atividade investigativa sobre Geometrias Plana e Espacial com o uso do GeoGebra 3D. Para isso, realizamos uma oficina *online* sobre o uso deste aplicativo para 17 licenciandos em Matemática de uma instituição pública de ensino, seguida da aplicação da atividade investigativa. Para a análise da atividade, selecionamos um dos participantes, que teve sua resolução gravada. Os Três Mundos da Matemática é o referencial teórico que sustenta nossas análises. Os resultados indicam potencialidades da atividade proposta e do uso do GeoGebra 3D nos processos de elaboração de definições, conjecturas e justificativas no Ensino de Geometrias Plana e Espacial, que são evidenciadas nas construções, visualizações, medições, levantamento de hipótese e conclusões apresentadas pelo participante.

Palavras-chave: GeoGebra 3D. Geometria. Três Mundos da Matemática. Educação Matemática

Abstract: In this article we evaluate potentialities involved in an investigative activity on Plane and Spatial Geometries using GeoGebra 3D. For this, we held an *online* workshop on the use of this application for 17 Mathematics graduates from a public educational institution, followed by the application of the investigative activity. For the analysis of the activity, we selected one of the participants, whose resolution was recorded. The three Worlds of Mathematics is the theoretical framework that supports our analyses. The results indicate the potential of the proposed activity and the use of GeoGebra 3D in the processes of elaborating definitions, conjectures and justifications in the Teaching of Flat and Spatial Geometry, which are evidenced in the constructions, visualizations, measurements, hypothesis raising and conclusions presented by the participant.

Keywords: GeoGebra 3D. Geometry. Three Worlds of Mathematics. Mathematics Education.

Resumen: En este artículo evaluamos las potencialidades involucradas en una actividad investigativa sobre Geometrías Planas y Espaciales utilizando GeoGebra 3D. Para ello, realizamos un taller en línea sobre el uso de esta aplicación para 17 egresados de Matemáticas de una institución educativa pública, seguido de la aplicación de la actividad investigativa. Para el análisis de la actividad se seleccionó a uno de los participantes, cuya resolución quedó registrada. Los Tres Mundos de las Matemáticas es el marco teórico que sustenta nuestros análisis. Los resultados indican el potencial de la actividad propuesta y el uso de GeoGebra 3D en los procesos de elaboración de definiciones, conjeturas y justificaciones en la Enseñanza de la Geometría Plana y Espacial, los cuales se evidencian en las construcciones, visualizaciones, mediciones, planteamiento de hipótesis y conclusiones presentadas por el participante.

Palabras-clave: GeoGebra 3D. Geometría. Tres Mundos de las Matemáticas. Educación Matemática.

Recebido em 20/01/2024
Aceito em 20/04/2024

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Com a progressiva evolução e impacto das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) no meio social, observamos possibilidades de avanço com relação ao seu uso de forma ativa em salas de aula, para todos os níveis de ensino. Estas possibilidades são destacadas pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), que prevê que o ensino de Matemática deve exercitar a curiosidade intelectual e utilizar as tecnologias digitais de forma a incentivar nos estudantes o desenvolvimento e resolução de problemas, de forma crítica e significativa. Particularmente, prevê para o ensino de Geometria a oportunidade de desenvolvimento do pensamento geométrico e do pensamento computacional, a partir da criação e da investigação de modelos computacionais de objetos tridimensionais (Brasil, 2018). Silva e Lyra (2020) corroboram esta ideia e ressaltam que o uso de tecnologias impulsiona a criatividade dos estudantes com relação à resolução de problemas diversificados, por meio de estratégias próprias.

Buscando colaborar com essa discussão, neste artigo discutimos as potencialidades envolvidas em uma atividade investigativa sobre Geometrias Plana e Espacial com o uso do aplicativo GeoGebra 3D, que foi aplicada para um estudante de um curso de Licenciatura em Matemática. Escolhemos este aplicativo por ser gratuito e de conhecimento do participante. A investigação foi realizada de forma *online* via plataforma *Google Meet*, no período da pandemia, e envolveu a realização de uma oficina para um grupo de 17 licenciandos em Matemática, na qual foram apresentadas algumas ferramentas do GeoGebra 3D, seguida da aplicação de três atividades de ensino e de investigação. A atividade aqui discutida (Atividade 3) envolve uma investigação na qual o participante deveria reconhecer e definir um retângulo a partir da construção de um plano que intercepta um tetraedro inscrito em um cubo. O participante realizou a atividade em seu computador pessoal e todo o processo de resolução e discussão foi gravado com o aplicativo *OBS Studio*. Como suporte para as análises utilizamos os Três Mundos da Matemática (Tall, 2013), que

entende que o conhecimento matemático se desenvolve em uma jornada pelos mundos Corporificado, Simbólico e Formal. Após o encerramento da atividade, foi proposto ao participante um questionário avaliativo sobre a oficina e a atividade, pois também é de nosso interesse analisar como os futuros professores de Matemática avaliam a viabilidade do uso do GeoGebra 3D como recurso para o ensino de Geometria Espacial na Educação Básica.

Uma vez que as TDIC se colocam como parte a ser considerada nos processos de ensino e de aprendizagem, pesquisadores da Educação Matemática têm se dedicado a investigar as possibilidades do uso de recursos tecnológicos na exploração dos diversos conteúdos matemáticos. Por exemplo, Souza et al. (2020) aplicaram atividades relacionadas ao estudo da parábola como um lugar geométrico para 44 professores de Matemática em formação inicial, utilizando dobraduras em papel vegetal e o GeoGebra para celular. Segundo os autores, além das atividades terem oferecido diferentes visualizações da parábola, também possibilitaram que os participantes elaborassem conjecturas e que validassem propriedades desta curva.

Guimarães et al. (2021) desenvolveram atividades que exploram propriedades dos quadriláteros notáveis com o GeoGebra para celular, trabalhando com atividades que abordam conceitos sobre o trapézio e o paralelogramo. A atividade foi aplicada para estudantes do Ensino Médio e, segundo os autores, o uso do aplicativo possibilitou que estes desenvolvessem e trabalhassem com a elaboração de definições, conjecturas e de justificativas a partir da manipulação das construções realizadas.

O ensino de Geometria Espacial, em particular, pode ser beneficiado com o desenvolvimento de atividades em *softwares* educacionais, como o GeoGebra 3D. Segundo Sousa, Alves e Fontenele (2020), o ensino desta área da Matemática é prejudicado quando sua abordagem se limita aos livros didáticos, pois objetos tridimensionais não possuem uma completa visualização quando representados unicamente de maneira bidimensional. De acordo com eles, para que haja a construção do pensamento geométrico, é necessário que também haja um trabalho

envolvendo a experimentação, de forma que os aprendizes consigam manipular construções e desenvolver novos entendimentos sobre os objetos tridimensionais.

Macedo (2013) e Leme (2017) corroboram essa perspectiva ao destacarem que o ensino de Geometria Espacial se torna mais efetivo com relação à visualização de conceitos e propriedades quando é permeado pelo uso de recursos tecnológicos.

Embora estes pesquisadores destaquem a importância do uso de TDIC no ensino de Matemática, Lecrer e Pazuch (2020) pontuam que pesquisas que trabalhem com a construção de atividades que utilizem *softwares* de Geometria Dinâmica (SGD) necessitam de expansão, bem como investigações sobre o processo de formação dos futuros professores em relação ao uso e a inserção destes *softwares* em suas aulas.

Buscando apresentar respostas para algumas das demandas colocadas por Lecrer e Pazuch (2020), neste artigo discutimos a resolução apresentada por um licenciando para uma atividade investigativa que envolve Geometrias Plana e Espacial. A escolha por analisar a resolução de um único estudante se deve ao fato de que pudemos avaliar todo o seu desenvolvimento ao longo da atividade.

REFERENCIAL TEÓRICO

Os Três Mundos da Matemática, proposto por Tall (2013), analisa o pensamento matemático a partir de três modos essencialmente distintos de desenvolvimento: do Mundo Conceitual Corporificado, do Mundo Operacional Simbólico e do Mundo Axiomático Formal. Estas perspectivas, ao longo do processo de aprendizado de um estudante, se desenvolvem de modo conjunto, de forma inter-relacionadas.

O Mundo Corporificado diz respeito aos objetos manipuláveis, tanto de forma física, quanto de forma virtual ou mental, e à sua interação com os seres humanos, de forma a possibilitar sua exploração e a criação de imagens mentais, junto com conjecturas de propriedades a partir de observações e ações sobre os objetos. Neste mundo temos a presença dos objetos físicos, imagens, construções, gráficos e figuras

geométricas. No caso da Geometria, compõem o Mundo Corporificado as diversas representações de figuras planas e espaciais que um sujeito possa desenvolver.

O Mundo Simbólico trabalha com a necessidade do indivíduo de manipular os objetos matemáticos por meio de símbolos, sejam referentes aos objetos do Mundo Corporificado ou não. Estes símbolos podem realizar ações com um objetivo definido, como encontrar uma resposta, e também podem ser utilizados como o próprio conceito ou definição, considerando-o um objeto matemático, não apenas um meio com um fim. Medições e cálculos são características do mundo simbólico.

Por último, temos o Mundo Formal, que trabalha com o conhecimento matemático relacionado aos axiomas, definições e teoremas, ou seja, é a análise de um objeto a partir da perspectiva da matemática formal, que envolve os conceitos e definições, as justificativas, refutações, provas e demonstrações de afirmações matemáticas.

Cada um destes mundos colabora para o desenvolvimento de um pensamento matemático cada vez mais complexo, de forma que o sujeito desenvolva uma forma de pensar matematicamente cada vez mais abstrata. Todos eles podem ter características exploradas no Ensino Básico, propiciando aos estudantes um conhecimento que se articule entre cada um dos mundos e possibilite a ressignificação de conceitos, ideias e procedimentos.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para alcançar o objetivo proposto, foi realizada uma oficina em dois encontros, cada um com duas horas e meia de duração, para 17 estudantes de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública de ensino do estado de São Paulo. A oficina foi realizada de forma totalmente remota, devido à pandemia de Covid-19, por meio da plataforma *online Google Meet*, e dividida em 4 momentos: apresentação de ferramentas do GeoGebra 3D; aplicação de três atividades de ensino e de investigação; discussão conjunta das respostas; e aplicação de questionários avaliativos sobre as atividades realizadas.

As discussões coletivas e os questionários foram realizados ao final de cada atividade. A duração de cada atividade foi de uma hora, e estas puderam ser realizadas em *tablets*, computadores, *notebooks* ou *smartphones*. O participante que tem sua resolução da Atividade 3 discutida neste artigo foi selecionado por sua ativa participação nas discussões nas atividades, respondendo aos questionamentos dos pesquisadores e manifestando interesse em entender as potencialidades das atividades para o ensino de Geometria.

O participante foi acompanhado por um dos pesquisadores e teve a tela de seu computador pessoal gravada com o aplicativo *OBS Studio*. Para as análises são consideradas as imagens do processo de construção, os comentários e as respostas apresentadas ao longo da realização da atividade. Ele assinou o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e é tratado por um pseudônimo.

Durante a oficina foram apresentados os eixos coordenados do R^3 (Figura 1) e demonstrada a possibilidade de deixar seus rótulos permanentemente exibidos. Foi mostrada a opção de exibir ou esconder o plano xy, bem como aplicar esta função aos eixos coordenados e aos objetos construídos na janela de visualização 3D.

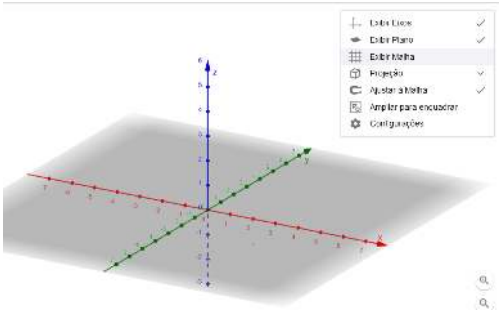

Figura 1. Tela do GeoGebra 3D apresentada na oficina.

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Explanou-se sobre a divisão entre a janela de álgebra, ferramentas e a janela de visualização, e algumas de suas funcionalidades. Dentre as ferramentas apresentadas, estão a função de ponto, segmento, ponto médio, polígonos, poliedros, plano paralelo, plano por três pontos e como construir polígonos e poliedros regulares.

Discutiu-se a definição e os tipos de polígonos por meio de construções utilizando as ferramentas disponíveis. Sobre os poliedros, discutiu-se sua definição e elementos fundamentais, e como efetuar a construção de alguns tipos destes objetos.

Em seguida, foram aplicadas as três atividades. A Atividade 3 propõe a construção de um cubo de aresta 1, e, a partir deste, a construção de alguns segmentos para a formação de um tetraedro. Em seguida, é solicitada a marcação de um ponto X na aresta AE (perpendicular ao plano xy) e que seja traçado um plano α paralelo ao plano xy, que passe pelo ponto X construído.

No passo seguinte, perguntamos: “A interseção do plano alfa com as arestas do novo sólido construído no Passo 2 da Construção 1 (não o cubo) determina um polígono. Que polígono é esse?”. Então, os participantes são instigados a explorar a construção, a fim de determinar e justificar qual é a figura plana obtida.

Para que os dados pudessem ser recolhidos, um dos pesquisadores criou uma sala na plataforma *Google Meet*, na qual estavam presentes somente o pesquisador e o participante selecionado. Foi previamente acordado com o participante que registrasse em voz alta seu raciocínio e suas respostas finais, em conjunto com a versão escrita. Durante o processo, o pesquisador gravou a tela do seu computador com o aplicativo *OBS Studio*.

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A Atividade 3 foi desenvolvida em dois momentos, denominados construção 1 e construção 2. No que segue, discutimos os objetivos da atividade proposta e as respostas apresentadas por Miguel, nosso participante.

Com a construção 1 (Figura 2), nosso objetivo é o de avaliar se, e como, os participantes transitam entre objetos do Mundo Simbólico-Formal, presentes no enunciado da atividade, e o Mundo Corporificado, caracterizado pela construção a ser realizada na janela de visualização do GeoGebra 3D.

Construção 1 – Passos:

1. Desenhe um cubo ABCDEFGH, de aresta 1, com base ABCD no plano xy. Mantenha o cubo sem preenchimento.
2. Com o auxílio da ferramente *segmento* trace os segmentos BD, BE, BG, DE, DG e EG. Deixe estes segmentos com uma cor diferente das arestas do cubo, isso ajudará na visualização.

Agora, responda:

a) Os segmentos construídos no **Passo 2** formam um sólido. Qual o nome deste sólido? Destaque elementos deste sólido (número de aresta, faces, vértices).

Figura 2. Questões da Construção 1

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Miguel executou a construção sem dificuldades com as ferramentas de Cubo, Preenchimento do cubo e Segmento e com os objetos matemáticos mencionados para compor a construção. A Figura 3 apresenta algumas das etapas da construção.

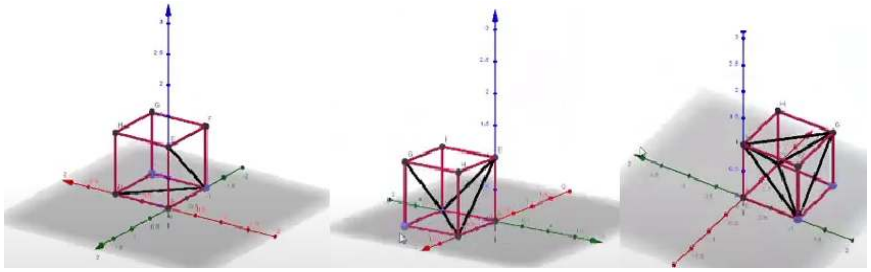

Figura 3. Construções e manipulações realizadas por Miguel

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Para responder à primeira pergunta (Figura 2), Miguel manipula o cubo construído para visualizá-lo a partir de várias perspectivas e conclui sua hipótese a respeito do sólido, destacando, em áudio captado na gravação: “Bom, pelo que a gente pode ver, é um tetraedro”. A resposta está correta, apesar de ele não justificar sua afirmação.

Na resposta apresentada, podemos observar a utilização de características do Mundo Corporificado, onde manipula a figura para elaborar suas próprias conjecturas, e as características do Mundo Formal, ao responder qual é o poliedro construído, pois, para reconhecer e classificar a figura, recorre à definição de tetraedro.

Para determinar o número de vértices, faces e arestas do tetraedro, Miguel também utiliza a construção, girando-a e registrando um total de 6 arestas, 4 faces e 4 vértices. Desta forma, ele transita entre os Mundos Corporificado (imagem do tetraedro) e Simbólico-Formal, por ter enumerado e registrado os elementos

solicitados do sólido construído. E, nesse sentido, esta primeira parte evidência potencialidades da atividade no que diz respeito a mobilização de conceitos e ideias relacionados aos poliedros e também ao possibilitar uma jornada pelos Três Mundos.

Em seguida, disponibilizamos as orientações da construção 2 para nosso participante, destacada na Figura 4.

Construção 2 – Passos:

3. Marque um ponto X na aresta AE (não coincidente com os pontos A e E).
4. Habilite o plano xy que contém a base ABCD do cubo (caso você o tenha desabilitado).
5. Com a ferramenta *Plano Paralelo* trace, passando pelo ponto X, um plano paralelo ao plano ABCD. Vamos chamá-lo de plano alfa.

Responda: b) A interseção do plano alfa com as arestas do **novo sólido** construído no **Passo 2** da **Construção 1** (**não o cubo!**) determina um polígono. Que polígono é esse?

6. Com a ferramenta *Interseção de dois objetos*, marque os pontos de interseção entre o plano alfa e os segmentos do sólido do item b.
7. Com a ferramenta *Segmento*, trace os segmentos que unem os vértices consecutivos determinados no Passo 6. Movimente o ponto X e explore a nova figura construída.

Responda: c) Que polígono é esse? Justifique sua resposta.

8. Explore características do polígono encontrado usando ferramentas de medições disponíveis no GeoGebra 3D. Movimente o ponto X para tirar suas conclusões.

Responda: d) Apresente uma definição para o polígono encontrado. Justifique sua resposta.

e) Você acredita que os processos de medições e observações realizados no GeoGebra 3D são suficientes para assegurar suas conclusões? Comente.

Figura 4. Passos e questões da Construção 2

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Com a construção 2 (Figura 4), buscamos entender se, e como, os participantes transitam entre os Mundos Corporificado-Formal e Simbólico, por ser uma etapa dependente da manipulação e elaboração de hipóteses e conjecturas. O Mundo Corporificado-Formal é avaliado a partir da primeira hipótese a ser formulada, a respeito do polígono criado pela interseção do plano construído com o tetraedro, e o Mundo Simbólico a partir do uso das ferramentas de medição de ângulo e distância, e da maneira como os participantes interpretam os dados obtidos.

Miguel realiza a construção 2 e, para responder à questão 5(b) (Figura 4), manipula a construção realizada (Figura 5) para tentar visualizar o polígono, mas opta por procurar ferramentas auxiliassem a demarcar os limites da nova figura. Este momento se seguiu enquanto Miguel passava o cursor sobre todas as listas de ferramentas disponíveis no GeoGebra 3D e, após não encontrar alguma que fosse

suficiente para melhor visualizar a figura, acabou propondo, com tom de dúvida, “Hmm, deixa eu ver se tem como enxergar melhor essa interseção... ao que parece é um retângulo...”. Nesse processo de conjectura, girou o cubo muitas vezes e, nesse sentido, transita entre os mundos Corporificado e Formal, ao se basear na construção para conjecturar que a figura é um retângulo.

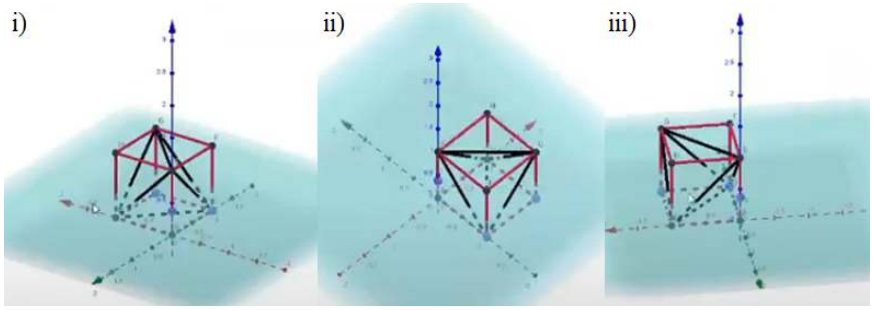

Figura 5. Construção do plano paralelo ao plano xy realizada por Miguel

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

O pesquisador sugeriu que fosse utilizada uma das ferramentas de interseção, disponíveis no GeoGebra 3D. Com a sugestão, ele marcou os pontos de interseção entre o plano construído e os segmentos do tetraedro (Figura 6) e disse “Vou tirar o plano aqui, rapidinho. Fazer um polígono... Ao que parece, é um retângulo né?”.

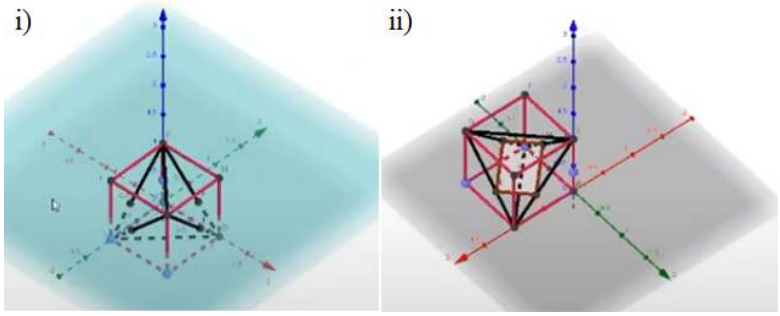

Figura 6. Construção do retângulo realizada por Miguel

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Neste processo, o plano alfa foi retirado utilizando o recurso disponível de esconder o plano; Miguel, então, utilizou a ferramenta de polígono, de forma que pudesse unir os pontos de interseção encontrados, exibidos na Figura 6(i), e deixar

explícito o polígono que procurava. Ao realizar essa construção (Figura 6(ii)), destacou, novamente, que o polígono encontrado se assemelhava a um retângulo. Após formular esta hipótese, o participante utiliza as ferramentas de ângulo para traçar um dos ângulos internos do polígono e a ferramenta “Distância”, “Comprimento” ou “Perímetro”, com objetivo de medir os segmentos que compõe os seus lados (neste momento, ele antecipa o passo 8 da construção). A Figura 7 apresenta o resultado das medições realizadas por Miguel.

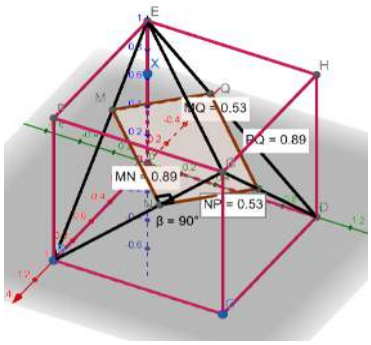

Figura 7. Medições obtidas pelo participante

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Com as medições, Miguel encontrou os valores de 0,53 e 0,89 para os lados menores e maiores do polígono e um ângulo de 90º, e então afirmou que “A gente pode...tem 90º. E os lados paralelos têm a mesma medida...então é um retângulo”. Em seguida a essa conclusão, o participante omitiu, na construção, as medições que acabara de realizar.

Para que a questão 5(b) (Figura 4) fosse respondida, Miguel realizou uma jornada pelos Mundos Corporificado, Simbólico e Formal. De fato, ao construir a figura, para que pudesse identificar o polígono solicitado, houve a necessidade de manipular o objeto construído (Mundo Corporificado), na busca por uma perspectiva que evidenciasse qual é esse polígono. Utilizando as ferramentas de medição, Miguel foi capaz de afirmar, baseando-se nas características corporificadas e simbólicas observadas, que o polígono é um retângulo, realizando, portanto, uma transição entre os Mundos Corporificado, Simbólico e Formal. Com essas informações, pôde

caracterizar o retângulo, validando, por fim, sua hipótese inicial. O GeoGebra 3D, neste sentido, favoreceu diferentes tipos de manipulações e visualizações sobre o poliedro e o polígono construídos, de forma a possibilitar que a conjectura elaborada por Miguel, inicialmente sobre uma figura sem nenhuma informação que a caracterizasse, fosse confirmada a partir da exploração da construção. Desta maneira, uma vez mais, entendemos que a atividade proposta apresenta potencialidades relacionadas aos processos de exploração e de levantamento e validação de conjecturas.

Durante essa discussão, Miguel estava no passo 5, visando responder à questão 5(b), e, neste processo, o passo 6 foi proposto pelo pesquisador (ao sugerir a marcação dos pontos de interseção entre as arestas do tetraedro e o plano). A partir de então, o participante executou parte do passo 7, traçando os segmentos que unem os pontos de interseção e, com o polígono exibido de forma explícita, mas sem observar as variações na figura decorrente da movimentação do ponto X, se convenceu de que a figura era um retângulo. Então, convencido deste fato, movimentou o ponto X (passo 7) e obteve novas imagens (Figura 8) que foram seguidas do seguinte comentário “Continuam sendo retângulos, com várias medidas de lados. Acho que aqui, no ponto médio (quando X está no ponto médio da aresta AE do cubo), acaba sendo um quadrado, mas não tenho certeza. [...] Vai continuar sendo um retângulo”.

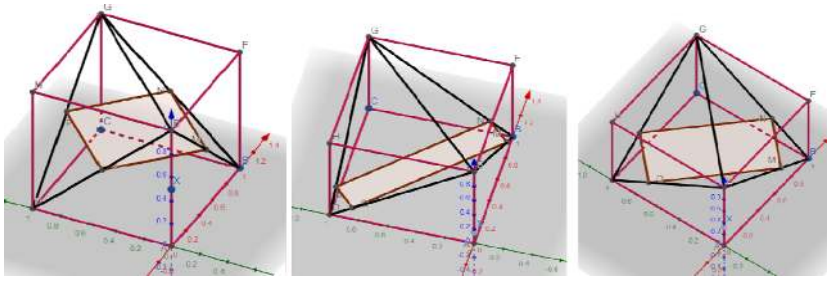

Figura 8. Imagens obtidas por Miguel a partir da movimentação do ponto X

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Depois de movimentar o ponto X e de mudar a perspectiva de visualização do cubo (Figura 8), Miguel reitera a conclusão que havia chegado no passo 5. Neste ponto, destacamos que nosso participante se baseia apenas em características do Mundo Corporificado para tirar suas conclusões, uma vez que características simbólicas relacionadas às medições, que forneceriam evidências para que sustentasse que as figuras são retângulos (Mundo Formal), foram omitidas por ele. Cumpre destacar ainda que, ao longo dessa discussão, Miguel revela um conhecimento, com características formais, sobre a classificação hierárquica de quadriláteros, ao conjecturar que o quadrado é um retângulo, ideia que neste momento não foi aprofundada por ele. Por fim, responde à questão 7(c) sustentando que "O polígono é um retângulo, pois os lados opostos são paralelos e congruentes e possui 4 ângulos retos". Reiteramos, todavia, que essa conclusão, neste momento, baseou-se somente nas características corporificadas, a partir de ações e percepções, relacionadas à visualização de imagens como as destacadas na Figura 8.

O passo 8 (ver Figura 4) exigiu que o participante retomasse à manipulação da figura, utilizando novamente as medidas exploradas nos passos anteriores (Figura 9). Neste momento, ele volta a refletir sobre a questão do quadrado, e conclui "É, então aqui acho que dá pra concluir sim que no ponto médio é um quadrado mesmo, porque os lados todos têm a mesma medida. Mas, fora isso, é sempre um retângulo. Se bem que todo quadrado é um retângulo né?", revelando uma transição entre os mundos Corporificado, Simbólico e Formal. De fato, Miguel utiliza características do Mundo Corporificado ao utilizar a figura como suporte de análise e, características simbólicas, quando retorna ao uso de medições para analisar sua construção, conclui, apresentando características formais, que as figuras são de fato retângulos com variadas medidas de lados. Além disso, se convence de que quando o ponto X coincide com o ponto médio da aresta AE, obtém-se um quadrado, e apresenta características formais ao afirmar que "[...] todo quadrado é um retângulo [...]."

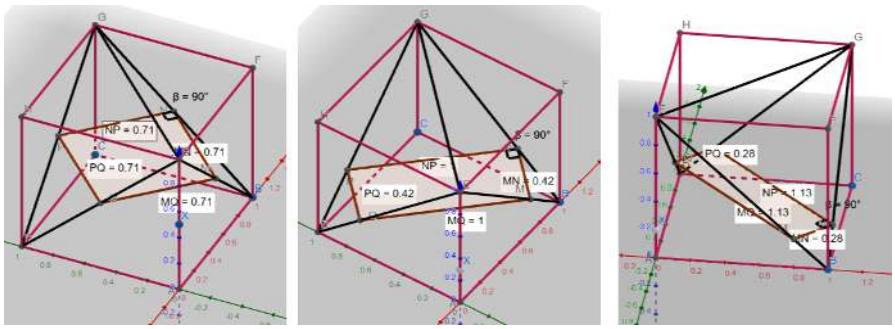

Figura 9. Visualizações obtidas por Miguel no passo 8

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Miguel responde à questão 8(d) (Apresente uma definição para o polígono encontrado. Justifique sua resposta) afirmando que "O polígono encontrado possui dois pares de lados paralelos e congruentes e os ângulos internos são ângulos retos. Portanto é um retângulo", perspectiva que indica bons conhecimentos do participante sobre características do Mundo Formal relativas à definição de retângulo.

Ao responder à questão 8(e) (Você acredita que os processos de medições e observações realizados no GeoGebra 3D são suficientes para assegurar suas conclusões? Comente), Miguel sustentou que

> Aqui, no caso, eu tô assumindo que os lados são paralelos né, por isso têm a mesma medida, mas não usei nenhuma ferramenta que comprovasse isso. Mas eu acho que é suficiente para eu poder afirmar que sim, que é um retângulo, então as medições são suficientes para assegurar as conclusões.

Reforçando sua resposta final, Miguel também conclui que as medições de ângulos e lados são suficientes para assegurar que os lados opostos do polígono são paralelos. Apesar do participante, no decorrer de toda a atividade, ter medido apenas um dos ângulos e o comprimento de cada um dos lados, é possível concluir que o quadrilátero explorado é um retângulo, pois, ao assegurar-se que um dos ângulos é reto e os lados opostos são congruentes (possuem mesma medida), tem-se a garantia de que a figura obtida é um retângulo. Ele não externalizou essa análise na discussão, mas baseou sua decisão na imagem construída e manipulada (Mundo Corporificado), nas medições (Mundo Simbólico) e na definição de retângulo (Mundo Formal).

Novamente, acreditamos que as orientações propostas na atividade permitiram que o participante explorasse a figura construída a partir das ferramentas disponíveis no GeoGebra 3D, o que favoreceu a sua tomada de decisão, perspectiva que indica potencialidades da atividade proposta como atividade investigativa, pois permitiu o levantamento e validação de conjecturas, e a externalização e articulação de conceitos geométricos por parte do participante.

Ao final da atividade, para a pergunta do questionário avaliativo “Quais vantagens você identifica na aplicação deste tipo de atividade no Ensino Médio?”, Miguel pontuou que “A vantagem está no fato do aluno construir o conhecimento através da investigação, de modo que ele possa levantar conjecturas e provas através do manuseio do aplicativo”. Para a pergunta “Acredita que este tipo de exploração e atividade pode contribuir com o ensino de Geometria?”, Miguel destacou que “Com certeza esse tipo de exploração e atividade contribui não só no ensino de Geometria Espacial como também em Geometria Plana, pois para realizar as atividades acabamos resgatando alguns conceitos de Geometria Plana”, posição que reitera a valorização, por parte do participante, da estratégia adotada na oficina e atividades para o ensino de Geometria Espacial e Plana no ensino básico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

De modo geral, a atividade apresentou potencialidades tanto como uma atividade investigativa, quanto para a realização de uma jornada pelos Três Mundos da Matemática (Tall, 2013) pelo nosso participante. De fato, como buscamos evidenciar ao longo da análise, no processo de resolução e discussão, Miguel pôde experimentar, por meio de ações e percepções sobre os objetos (características do Mundo Corporificado), diversas perspectivas dos sólidos (cubo e tetraedro) e do polígono construído e, ao manipular a construção realizada, pôde reconhecer os objetos construídos, identificar elementos fundamentais destes, como vértices, arestas, faces, ângulos internos e relação entre lados. Isso, por sua vez, permitiu que

formulasse conjecturas sobre o polígono em questão, usando elementos do Mundo Formal, levando-o à conclusão de que se tratava de um retângulo. Quando buscou validar sua hipótese, utilizou-se de medições, explorando características do Mundo Simbólico. Além disso, a manipulação da figura, para observar suas diferentes variações, promoveu a reflexão sobre em que circunstâncias a figura seria um quadrado, processo que permitiu o estabelecimento de uma classificação hierárquica desses quadriláteros.

A resolução de Miguel também indica potencialidades da atividade com relação ao desenvolvimento do pensamento geométrico, uma vez que lhe possibilitou apresentar diversos conhecimentos, conceitos, ideias e dúvidas durante todo o processo. Além disso, o uso do GeoGebra 3D também indicou possibilidades de desenvolvimento do pensamento computacional, num trabalho que é executado a partir da criação e da investigação de modelos computacionais de objetos tridimensionais, ambas competências exigidas pela BNCC (Brasil, 2018) a serem trabalhadas no Ensino Básico.

Nesse sentido, entendemos que a atividade corrobora as posições de Leme (2017), que destaca que um novo modelo de aula, que utiliza as TDIC, torna efetiva a visualização de conceitos e propriedades de objetos tridimensionais, além de trazer atratividade para as aulas de Matemática e de permitir um aprendizado com significado para os estudantes, uma vez que admite que este trabalhe com sua criatividade, encontrando caminhos próprios de resolução, enquanto se utiliza da dinamicidade proporcionada pelo *software*.

Entendemos, ainda, que atividade proposta e o uso do GeoGebra 3D abrem uma nova possibilidade de ensino de conceitos e propriedades das Geometrias Plana e Espacial, uma vez que estes poderão ser explorados sob diferentes perspectivas, permitindo uma visão completa do objeto estudado, apresentando-se, então, como uma solução para os problemas da representação plana de figuras tridimensionais usadas nos livros didáticos, como apontado por Sousa, Alves e Fontenele (2020).

No desenvolvimento de Miguel ao longo da atividade, observamos que há uma valorização do uso da tecnologia para o exercício da criatividade matemática e o desenvolvimento de estratégias personalizadas, posições destacadas por Silva e Lyra (2020) como essenciais para um novo tipo de ensino. Além disso, as perspectivas apontadas por Macedo (2013) também puderam ser observadas na realização da atividade por nosso participante, uma vez que houve suporte adequado do aplicativo e de suas ferramentas para a formação, análise e verificação de hipóteses elaboradas (por meio de medições, mudanças de perspectiva sobre a construção, manipulação da figura, entre outros), o que permitiu a investigação de propriedades e consolidação de conceitos e ideias sobre os objetos planos e tridimensionais abordados.

Uma perspectiva que pode complementar esta atividade é um trabalho com uma demonstração, por meio dos axiomas das Geometrias Plana e Espacial, de que a figura encontrada é um retângulo. Embora não tenhamos explorado este caminho em nossa investigação, acreditamos que essa é uma discussão pertinente no trabalho com a formação de futuros professores de Matemática.

Por fim, com relação às questões colocadas por Lecrer e Pazuch (2020), acreditamos que atividades como a que discutimos neste artigo podem contribuir como novas perspectivas para a formação de professores de Matemática, além de instrumentalizá-los com novas ideias e abordagens para suas aulas.

Destacamos, ainda, que está em curso uma investigação com estudantes do Ensino Médio que utilizam as atividades aqui apresentadas, pois interessa-nos avaliar as potencialidades e limitações deste tipo de estratégia de ensino nas salas de aula da Educação Básica.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Federal de São Paulo – campus Guarulhos, pela bolsa de PIBIFSP concedida.

REFERÊNCIAS

Brasil. Ministério da Educação. (2018). Base Nacional Comum Curricular. Brasília. Recuperado em 29 de novembro, 2023, de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.

Guimarães, R. C. C.; Vieira, W.; Imafuku, R. S.; Pereira, E. F. M. (2021). Uso do smartphone na investigação sobre propriedades de quadriláteros notáveis. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 61, 1-20. https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/226

Lecrer, O. P. V. G.; Pazuch, V. (2020). O ensino de Geometria Espacial: um panorama de pesquisas por meio de uma metassíntese. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 9 (20), 38-61. https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6258

Leme, C. B. (2017). O Uso do GeoGebra no Ensino da Geometria Espacial para Alunos do 2º Ano do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa. https://tede2.uepg.br/jspui/bitstream/prefix/2429/1/Claudio%20Leme.pdf

Macedo, I. S. (2013). Facilitando o Estudo da Geometria Espacial com o GeoGebra 3D. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal da Bahia. https://repositorio.ufba.br/handle/ri/22977

Silva, M. D. F.; Lyra, A. B. (2020). O Uso do GeoGebra em Atividades Matemáticas na Formação Docente. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, 10 (2), 18-34. https://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/5012/0

Sousa, R. C. de; Alves, F. R. V.; Fontenele, F. C. F. (2020). Aspectos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) Aplicada ao Ensino de Geometria Espacial Referente às Questões do ENEM com Amparo do Software GeoGebra. *ALEXANDRIA: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia*, 13 (2), 123-142. https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/65363

Souza, V. H. G.; Bonomi, M. C.; Vieira, W.; Imafuku, R.S. (2020). Cônicas com dobraduras e GeoGebra: uma possível abordagem para a educação básica. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 59, 83-101. https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/128

Tall, D. O. (2013). *How humans learn to think mathematically: exploring the Three Worlds of Mathematics* (1st Edition ed.). Cambridge, England: Cambridge University Press.