Tangram
Revista de Educação Matemática

UFGD editora

DOI: 10.30612/tangram.v6i3.17147

A Geometria do Origami: explorando o Teorema de Haga em um curso de extensão

The Geometry of Origami: exploring Haga's Theorem in a knowledge mobilization course

La Geometría del Origami: explorando el Teorema de Haga en un curso de extensión

Carolina Yumi Lemos Ferreira Graciolli
Universidade Estadual Paulista – UNESP
Rio Claro, São Paulo, Brasil
E-mail: carolina.graciolli@unesp.br
Orcid: 0000-0003-3763-4157

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva
Universidade Estadual Paulista – UNESP
São José do Rio Preto, São Paulo, Brasil
E-mail: ricardo.scucuglia@unesp.br
Orcid: 0000-0002-5810-2259

Marcelo de Carvalho Borba
Universidade Estadual Paulista – UNESP
Rio Claro, São Paulo, Brasil
E-mail: marcelo.c.borba@unesp.br
Orcid: 0000-0003-3101-5486

Resumo: Neste artigo apresentamos os resultados de uma pesquisa cujo objetivo foi investigar os conhecimentos matemáticos desenvolvidos por estudantes do curso de extensão universitária “Matemática, Origami e Produção de Vídeos Digitais”. Inicialmente, explicitamos aspectos da pesquisa qualitativa, descrevemos o cenário de pesquisa e apresentamos alguns fundamentos sobre a geometria do origami, dando destaque as suas operações básicas. Em termos de resultados, discutimos como os participantes do curso exploraram o Teorema de Haga e destacamos a importância dos vincos no papel para o movimento de argumentação e discussão acerca das provas matemáticas. Mencionamos também aspectos sobre o pensar-com-mídias diante das interações dos participantes com o software GeoGebra e origamis. A pesquisa contribui com a produção de conhecimentos em Educação Matemática envolvendo as temáticas origami, artes, prova matemática e tecnologias digitais.

Palavras-chave: Dobradura. Provas matemáticas. Educação Matemática.

Abstract: In this article we present the results of a research with the objective of investigating the mathematical knowledge developed by students of the university extension course “Mathematics, Origami and Production of Digital Videos”. Initially, we explain aspects of qualitative research, describe the research scenario and present some fundamentals about origami geometry, highlighting its basic operations. In terms of results, we discussed how the participants explored Haga's Theorem and highlighted the importance of creases in the paper for the movement of argumentation and discussion about mathematical proofs. We also mentioned aspects of thinking-with-media in the face of participants' interactions with GeoGebra software and origamis. The research contributes to the production of knowledge in Mathematics Education involving the themes of origami, arts, mathematical proof and digital technologies.

Keywords: Folding, mathematical proofs, Mathematics Education.

Resumen: En este artículo presentamos los resultados de una investigación cuyo objetivo fue indagar en los conocimientos matemáticos desarrollados por estudiantes del curso de extensión universitaria “Matemáticas, Origami y Producción de Videos Digitales”. Inicialmente, explicamos aspectos de la investigación cualitativa, describimos el escenario de la investigación y presentamos algunos fundamentos sobre la geometría del origami, destacando sus operaciones básicas. En cuanto a los resultados, discutimos cómo los participantes del curso exploraron el Teorema de Haga y destacamos la importancia de los pliegues del papel para el movimiento de la argumentación y la discusión sobre las pruebas matemáticas. También mencionamos aspectos del pensamiento-con-medios frente a las interacciones de los participantes con el software GeoGebra y el origami. La investigación contribuye a la producción de conocimiento en Educación Matemática involucrando origami, artes, demostración matemática y tecnologías digitales.

Palabras clave: Plegado, demostraciones matemáticas, Educación Matemática.

Recebido em
21/04/2023
Aceito em
27/08/2023

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O nosso objetivo com a produção do artigo é apresentar uma pesquisa cujo foco específico foi investigar os conhecimentos matemáticos mobilizados por estudantes do curso de extensão universitária “Matemática, Origami e Produção de Vídeos Digitais” que estiveram envolvidos com origami, demonstrações e matemática. De maneira geral, a pesquisa buscou explorar aspectos didático-pedagógicos de experiências matemáticas estéticas. Tais experiências são fomentadas pelo uso (inovador) das artes e das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de matemática em diversificados níveis de ensino. De acordo com Dewey (2010), “o que distingue uma experiência como estética é a conversão da resistência e das tensões, (...), em um movimento em direção a um desfecho inclusivo e gratificante” (p. 139).

Como buscamos compreender aspectos relacionados aos conhecimentos matemáticos dos estudantes, optamos pela abordagem qualitativa, uma vez que, de acordo com Chizzotti (2003), nessa abordagem podemos analisar a qualidade do objeto de estudo, com foco principal em compreender e interpretar seus significados. Segundo Bicudo (1993), envolve o caminhar em direção a explicações sobre uma pergunta feita. Com a elaboração da pergunta objetivamos compreensões acerca de um fenômeno, e não a uma solução definitiva, com interpretações e conclusões plenamente desenvolvidas que encerrem as possibilidades do que é interrogado.

Sendo assim, buscamos compreensões para a pergunta: o que se mostra acerca dos conhecimentos matemáticos mobilizados por estudantes ao trabalharem com origami e matemática? Buscamos apresentar e discutir aspectos do conhecimento matemático presentes nas expressões de estudantes ao desenvolverem atividades relacionadas à origami e matemática, especificamente envolvendo o primeiro Teorema de Haga. Para isso, nós nos voltamos aos dados da pesquisa que foram produzidos pela gravação e transcrição integral dos encontros do curso de extensão universitária ministrado na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp) de Rio Claro/SP-Brasil.

O desenvolvimento do curso se deu em seis encontros presenciais com duração de três horas cada, onde foram abordados assuntos relacionados a matemática com o foco nas dobraduras de papel. Além disso, para a conclusão do curso os estudantes, em duplas, produziram um vídeo digital que envolvesse origami e matemática. Participaram da pesquisa dois professores dos anos finais do Ensino Fundamental e seis graduandos em Licenciatura em Matemática da universidade em questão. A Tabela 1 a seguir caracteriza os participantes do curso.

Tabela 1

Participantes da pesquisa

Nome fictício	Profissão
Ana	Estudante do terceiro ano de Matemática na Unesp.
Wagner	Estudante do terceiro ano de Matemática na Unesp.
Guilherme	Estudante do terceiro ano de Matemática na Unesp.
Pedro	Professor dos anos finais do Ensino Fundamental, externo à Unesp, e aluno de Pós-graduação em Educação Matemática na Unesp.
Sophia	Estudante do primeiro ano de Matemática na Unesp.
Gabriela	Professora dos anos finais do Ensino Fundamental, externa à Unesp.
Juliana	Estudante do primeiro ano de Matemática na Unesp.
Felipe	Estudante do terceiro ano de Matemática na Unesp.

Fonte: Graciolli (2021, p. 55).

Os encontros semanais tinham foco, na primeira metade do curso, na exploração da geometria recorrendo a dobras no papel e, na segunda metade, a produção de um vídeo digital. Durante o curso os participantes tiveram contato com origamis na perspectiva artística, ao dobrarem animais, objetos e figuras geométricas, e na perspectiva matemática, ao explorarem teoremas, demonstrações e questões da geometria do origami. Para contextualizar o leitor, a seguir apresentaremos alguns aspectos da dobradura na matemática que foram discutidos e explorados durante o curso de extensão.

ORIGAMI

Origami é arte de dobrar papéis que busca, segundo Lang (1996), representar animais, plantas, figuras humanas, objetos inanimados e formas abstratas (Figura 1). Em sua forma originária, os origamis eram feitos a partir de uma única folha de papel em formato quadrado e não poderiam conter cortes ou colagens. Porém a técnica de dobrar papéis, praticada há séculos, passou a ser vista com outros olhares, se tornando tema de diferentes pesquisas em diversas áreas do conhecimento.

Figura 1. Exemplos de origami.

Fonte: Lang (2015, 1993, 2021, 2009)[1].

[1] Disponível em: <https://langorigami.com/artworks/>. Acesso em: 14 jul. 2021.

Basicamente, em um origami, há duas possibilidades principais, as dobras em montanha e as dobras em vale, que são, respectivamente, os vincos com dobra para cima (a) e os com dobra para baixo (b) (Figura 2). Observando as linhas, os desenhos e as formas que compõem um origami, outros modos de olhar para a arte de dobrar papéis foram surgindo. Na geometria, por exemplo, os vincos formados pelas dobras em um pedaço de papel passaram a ser estudados por matemáticos e origamistas que buscavam observar padrões e resolver problemas. De acordo com Monteiro (2008), o dobrar do papel começou a ser visto por uma perspectiva matemática e passou a ser estruturado por um sistema axiomático, dando origem a Geometria do Origami.

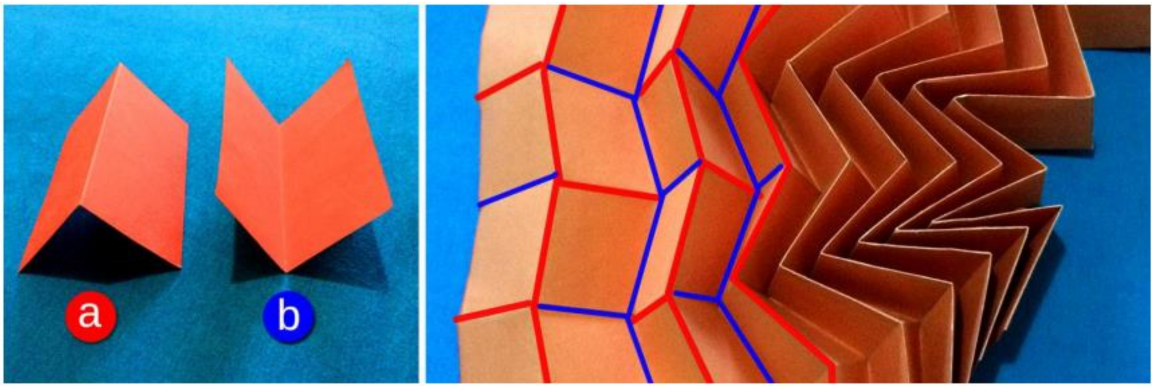

Figura 2. Dobras em montanha e em vale.

Fonte: Teixeira (2017, p. 30).

O sistema axiomático, chamado por Hull (2021) de "operações básicas do origami" (p. 23), evidenciam os diferentes tipos de operação que podem ser realizadas ao dobrar um papel. Entretanto o autor menciona que, a priori, não era explicito se cada uma das operações era independente das outras. Ele exemplifica recorrendo aos axiomas de Huzita-Scimemi, que são enunciados da seguinte forma:

O1: Dados dois pontos P_1 e P_2, podemos dobrar uma linha que os ligue.
O2: Dadas duas linhas, podemos localizar seu ponto se interseção, se existir.
O3: Dados dois pontos P_1 e P_2, podemos dobrar de forma que P_1 esteja sobre P_2.
O4: Dadas duas linhas L_1 e L_2, podemos dobrar de forma que L_1 esteja sobre L_2.

> O5: Dado um ponto P e uma linha L, podemos dobrar uma linha perpendicular a L passando por P.
> O6: Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma linha L, podemos, sempre que possível, fazer uma dobra que coloque P_1 sobre a linha L e que passe pelo ponto P_2.
> O7: Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas linhas L_1 e L_2, podemos, sempre que possível, dobrar de forma que P_1 esteja sobre L_1 e, ao mesmo tempo, P_2 esteja sobre L_2. (Hull, 2021, p. 23, tradução nossa).

Entretanto, de acordo com Hull (2021), a partir de estudos envolvendo os axiomas de Huzita-Scimemi foi possível provar que bastam as operações O2 e O7 para obtermos o conjunto completo descrito acima. Por exemplo, a operação O4 pode ser efetuada se considerarmos os pontos P_1 e P_2 pertencentes as retas L_2 e L_1, respectivamente, e ao realizarmos, como segue na operação O7, uma dobra em que P_1 esteja sobre L_1, ao mesmo tempo que, P_2 esteja sobre L_2, obteremos um resultado equivalente a operação O4, que diz respeito a dobrar de forma que L_1 e L_2 sejam coincidentes. É exatamente o O7 que separa a geometria do origami da geometria da régua não-graduada e compasso (geometria euclidiana).

A operação sete, assim como destacado por Lucero (2019), se trata do mais poderoso dos axiomas, no sentido que inclui todos os outros como casos particulares e devido à sua associação com uma equação cúbica, a operação pode ter até três soluções. De fato, a operação sete tem sido utilizada para resolver problemas de construção relacionados a equações cúbicas, como trissectar ângulos arbitrários, duplicar o cubo, construir heptágonos e outros.

Com isso, a operação sete abre possibilidades para resolvermos problemas impossíveis, como dois dos problemas clássicos da geometria euclidiana. Além disso, com o desenvolvimento e aprofundamento das questões envolvendo os axiomas, ou operações, foram sendo enunciados teoremas, definições, lemas e corolários próprios da geometria do origami. Um dos teoremas foi descoberto pelo origamista e matemático japonês Toshikazu Kawasaki. A configuração exposta na marca dos vincos apresenta uma regularidade que motiva o pensar matemático e leva Kawasaki a enunciar o teorema: “Um padrão de dobra de vértice único com ângulos $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n = 360°$, é plano e dobrável se n for par e a soma dos ângulos θ_{2i+1} for igual a soma dos ângulos θ_{2i}, ou equivalentemente, qualquer soma deve ser igual a $180°$" (Demaine & O'rourke, 2007, p. 199, tradução nossa), isto é, a soma dos ângulos formados pelos vincos das dobras $\theta_1 + \theta_3 + \cdots + \theta_{n-1}$ e a soma $\theta_2 + \theta_4 + \cdots + \theta_n$ devem ser igual a 180°.

O desenvolvimento da matemática envolvendo origami também tem ganhado espaço na Educação. É o caso da pesquisa de Santa (2016), que ao considerar o construto seres-humanos-com-mídias (Borba & Villarreal, 2005), apresentou resultados sobre a contribuição das dobras no papel para a conceitualização da geometria. A autora menciona o destaque da dobradura ao caracterizar a uma abordagem distinta da régua e do compasso ou do GeoGebra. No sentido proposto por Borba (2021), as mídias condicionam a produção de conhecimento matemático, neste caso, pode-se dizer que as dobras na geometria do origami possuem um potencial "agenciador" no processo de pensar. Além disso, é relevante considerar que existem várias possibilidades para trabalhar conteúdos e conceitos matemáticos com dobradura. Hull (2013) destaca algumas delas ao apresentar trinta atividades de matemática e origami que abrangem desde geometria plana com a construção de discussão de um triângulo equilátero até tópicos de cálculo, álgebra abstrata, teoria dos números, topologia e outros.

Entretanto, é válido destacar que mesmo o curso de extensão tendo como foco vários conceitos envolvendo o origami e também a produção de vídeos, neste artigo focaremos nas interações de somente um dos seis encontros. Elegemos este recorte, uma vez que pretendemos analisar os conhecimentos matemáticos mobilizados ao trabalhar com o Teorema de Haga. Para tanto, na seção a seguir apresentaremos os resultados e a discussão da pesquisa.

DESDOBRAMENTOS

Diante do que foi apresentado, discutiremos algumas das interações durante o curso de extensão universitária, no qual os participantes estiveram envolvidos, em específico, com dobras no papel e matemática. Durante o curso e para a análise dos dados, nós realizamos a leitura atenta da transcrição dos encontros e destacamos expressões dos participantes que consideramos relevantes ao buscarmos compreensões acerca da pergunta de pesquisa.

Um dos tópicos abordados no curso foi o primeiro Teorema de Haga. Durante o segundo encontro, foi solicitado aos estudantes que dobrassem um pedaço de papel de acordo com exposto por Haga e que demonstrassem a veracidade da proposição. O primeiro Teorema de Haga é enunciado da seguinte forma: “Pelo simples procedimento de dobragem de colocar o vértice inferior direito de um quadrado no ponto médio do lado superior, cada aresta do quadrado é dividida em uma proporção fixa” (Haga, 2008, p. 7, tradução nossa). Como ilustrado na Figura 3, pode-se encontrar a razão de cada um dos segmentos demarcados após realizarmos a dobra proposta por Haga.

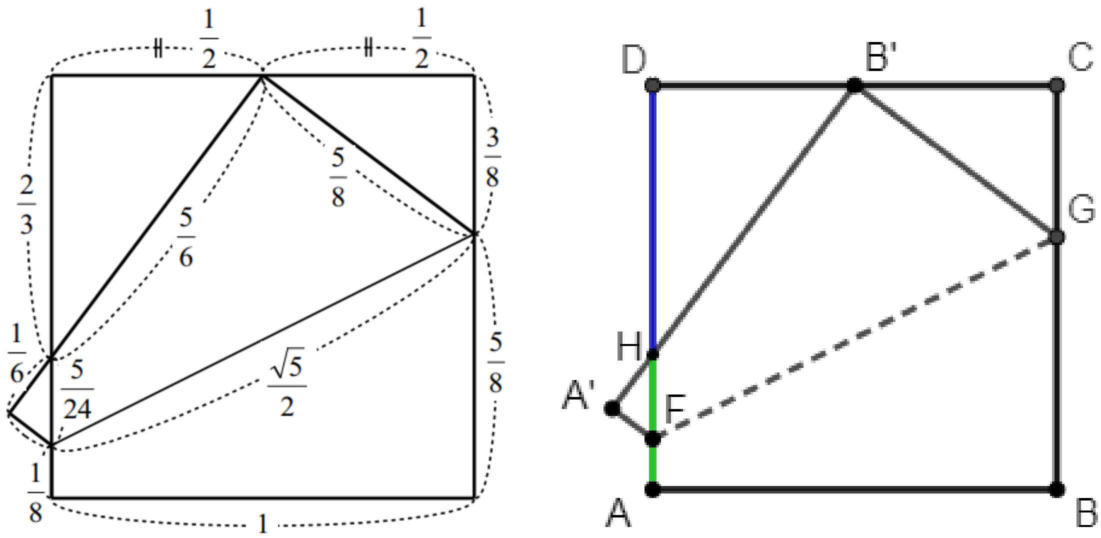

Figura 3. Comprimentos dos segmentos obtidos por meio da dobra.

Fonte: Haga (2008, p. 7).

Propusemos aos participantes provar que ao realizar a dobra em questão pode-se dividir um lado do papel quadrado em um terço, ou ainda em três retângulos de mesma área. Isso ocorre, pois ao marcar o ponto de encontro entre o lado inferior e o lado esquerdo do papel pelo ponto H (ilustrado na Figura 3 a direita), fica delimitado o segmento proporcional a $\frac{2}{3}$ ($\overline{DH}$ em azul), e consequentemente, o segmento proporcional a $\frac{1}{3}$ ($\overline{HA}$ em verde) do lado do papel.

Inicialmente, para verificar o Teorema de Haga, sugerimos aos estudantes que dobrassem o segmento equivalente a $\frac{2}{3}$ na metade e que sobrepusessem os pedaços para visualizar e comparar os tamanhos dos segmentos. Entretanto, Felipe enfatizou que só a sobreposição não é garantia da veracidade do teorema e que todos deveriam “suspeitar”, afinal, na dobradura de alguns estudantes o papel parecia ter se alinhado e na de outros não. Na mesma direção, Gabriela também desacreditou e sugeriu “fazer matematicamente”, isto é, recorrer as figuras geradas pela dobra e analisá-las utilizando como argumentos e justificativas os axiomas da geometria do origami ou conhecimentos prévios de geometria euclidiana.

Como a sobreposição do papel não foi suficiente para o convencimento da turma, os participantes buscaram outros caminhos para provar o teorema, assim como destacado por Mazzi (2018), as provas podem ser artefatos utilizados na busca da verdade, podendo ser uma testemunha, um dado científico, um documento, uma demonstração, entre outros. Ademais, segundo Bicudo (2002) o ato de demonstrar ou provar uma proposição está relacionado à argumentação, em especifico na busca por defender a validade de uma posição a partir de outras já demonstradas.

Tendo como hipóteses o formato quadrado do papel, isto é, quatro lados congruentes e quatro ângulos retos, e o ponto médio do lado superior, eles recorreram a conhecimentos de geometria para justificar suas ideias. Os estudantes poderiam recorrer a quais métodos que julgassem válidos, uso de softwares ou instrumentos como régua e compasso. Uma das primeiras estratégias de um dos grupos de participantes foi recorrer ao processo usual de dividir segmentos utilizando a régua e o compasso. Um estudante, com o auxílio do GeoGebra, traçou uma semirreta partindo de D e com o compasso marcou três pontos sobre a semirreta de forma que

$\overline{DJ} \equiv \overline{JK} \equiv \overline{KL}$. Na sequência, traçou o segmento $\overline{LA}$ e reta retas paralelas a $\overline{LA}$ passando por K e J, como mostra a Figura 4.

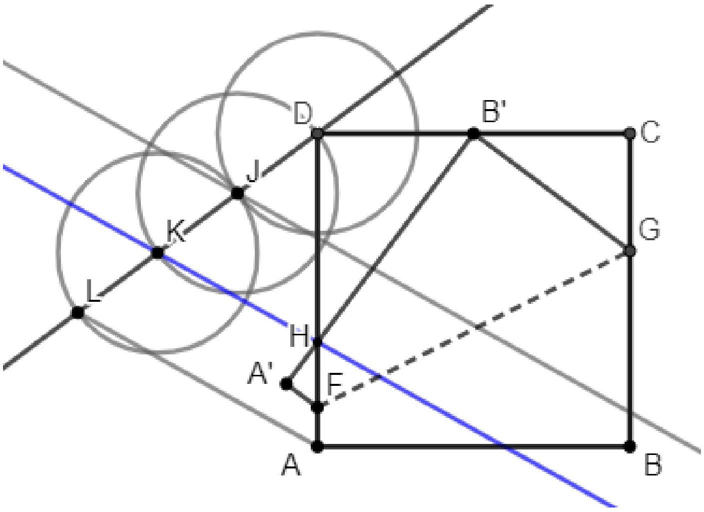

Figura 4. Método para divisão de segmentos em três partes iguais.

Fonte: elaborada pelos autores.

A estratégia escolhida para resolver o problema fazia referência aos passos para a divisão de segmentos, utilizando régua e compasso. Sendo assim, o estudante pôde argumentar que a reta paralela responsável por dividir o segmento do lado do quadrado em um terço passava exatamente no ponto marcado ao realizar a dobra proposta. Ele defendeu:

> Guilherme: Eu usei a quarta proporcional. Tipo, você faz, calma lá, eu não sei se é exatamente isso, mas enfim. Eu tracei a medida aqui do quadrado, aí, depois, eu tracei um segmento qualquer, e marquei três vezes e tracei paralelas. E aí, dividiu certinho em 3.
> Sophia: Você usou a hipótese.
> Pesquisadora: Você usou a tese.
> Sophia: Isso, desculpa.
> (Diálogo entre alunos e pesquisadora, 2019).

Entretanto, a Sophia contra-argumentou, enfatizando que pelo método descrito o Guilherme teria utilizado a tese e que para demonstrar seria necessário recorrer as características da dobra buscando sentido para a construção. Sendo assim, eles destacaram que o feito se trata de uma verificação, assim como medir por meio de uma régua, ou comparar as medidas, mas que tentariam achar outras formas para justificar a veracidade do teorema. As questões em foco para desenvolver uma prova pelo software eram: o que estamos fazendo no papel? Como representar a dobra no GeoGebra? O que está acontecendo (matematicamente) quando dobramos a folha?

Durante as interações, os estudantes argumentavam e buscavam convencer os colegas (De Villiers, 2001). Gabriela e Guilherme defenderam que os ângulos $D\widehat{B'}H$ e $C\widehat{B}'G$ (Figura 4) eram iguais e que mediam 45º, em contra partida, Pedro, Sophia e Felipe apresentavam contra exemplos como forma de defender um ponto de vista diferente. Na situação, ambos os participantes queriam legitimar suas afirmações, argumentando e recorrendo a conhecimentos prévios, por exemplo a definição de ângulos rasos e ângulos complementares, bem como afirmaram e mostraram que por meio da dobradura o ângulo de 90º seria transportado. Dessa forma, conhecendo a definição de ângulo raso e sabendo o valor de um dos ângulos ($H\widehat{B}'G$) eles poderiam afirmar que a soma de $DB'H$ e $CB'G$ seria igual a 90º, porém eles argumentaram que isso não é suficiente para afirmar que os ângulos são iguais. Neste movimento os estudantes procuravam maneiras de provar e de convencer seus colegas e, segundo Lourenço (2002), “a melhor prova que se pode oferecer para alguém, sobre qualquer tema, é o convencimento de que o fato é real” (p. 4).

Um caminho que foi comum a vários grupos envolvia a análise das figuras formadas após dobrar o papel. Os estudantes concluíram que os triângulos $DB'H$ (verde) e CGB' (azul) são semelhantes (Figura 5). Isso porque, os ângulos $H\widehat{D}B'$, $H\widehat{B'}G$ e $B'\widehat{C}G$ são congruentes, uma vez que, são ângulos formados pelos lados de um quadrado, por hipótese, e como $D\widehat{B'}H$, $H\widehat{B'}G$ e $G\widehat{B'}C$ formam um ângulo raso. Os triângulos em questão são congruentes, pois possuem os respectivos ângulos congruentes entre si. Tendo dois triângulos semelhantes, os estudantes buscaram medidas para desenvolver a proporção $\frac{\overline{HB'}}{\overline{B'G}} = \frac{\overline{DB'}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{HD}}{\overline{B'C}}$ visando encontrar o valor de

$\overline{HD}$. Como hipóteses eles consideraram $\overline{DB'}$ e $\overline{B'C}$ iguais a $\frac{1}{2}$ e, desta forma, o lado do quadrado é igual a 1.

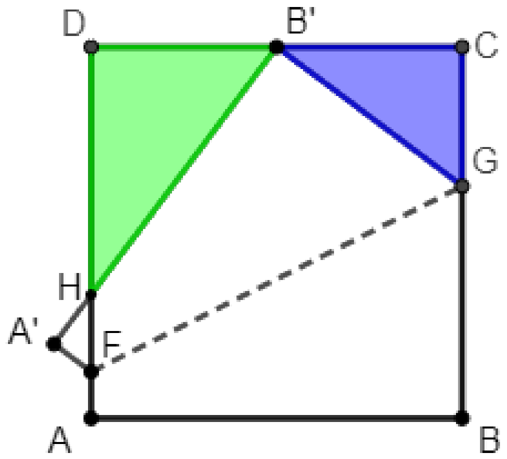

Figura 5. Semelhança entre triângulos.

Fonte: elaborada pelos autores.

Para obter respostas, os participantes tiveram que observar o movimento que é feito com papel e quais as suas implicações matemáticas. Eles puderam perceber que ao dobrar o papel o segmento $\overline{GB}$ é igual ao segmento $\overline{B'G}$, isto porque ao realizar o movimento envolvido no ato de dobrar o papel está-se levando todo o segmento $\overline{BG}$ para outra posição, portanto sua medida não se altera.

Todos os argumentos utilizados foram fundamentados em conceitos matemáticos, visto que as dobras não são somente compreendidas como um movimento de dobrar o papel, mas passam a significar transporte de medidas e ângulos. É nesse sentido que argumentamos acerca do "poder agenciador" – *agency* – das mídias (Borba, 2021), pois atores não humanos, próprios da linguagem, condicionam a produção de conhecimento matemático. Especificamente, um exemplo pode ser destacado no diálogo entre dois estudantes a seguir:

> Gabriela: Esse ângulo é igual aqui [$C\hat{B}A$ com $H\widehat{B'}G$, ver Figura 6] e esse pedaço aqui é igual [$\overline{BG}$ com $\overline{B'G}$] por causa da dobradura. Esse pedaço aqui é igual a esse pela dobradura [mostrando ao dobrar e desdobrar o papel].
> Pedro: Essa parte é igual a essa [dobrando e desdobrando o papel]. Aqui, é x e aqui, é $l - x$.
> (Diálogo entre dois alunos, 2019).

Dessa forma, como mostra a Figura 6, foi possível relacionar o lado do quadrado com os lados do triângulo. Os participantes atribuíram a variável x ao segmento $\overline{CG}$ e, consequentemente, como o lado do quadrado é igual a 1, o segmento $\overline{GB}$ será $1 - x$. Porém, os estudantes mencionaram que o triângulo CGB' é retângulo, ou seja, o Teorema de Pitágoras é válido e quando recorremos a ele obtemos $(1 - x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2$, então $x = \frac{3}{8}$, ou ainda, $\overline{CG}$ equivale a $\frac{3}{8}$.

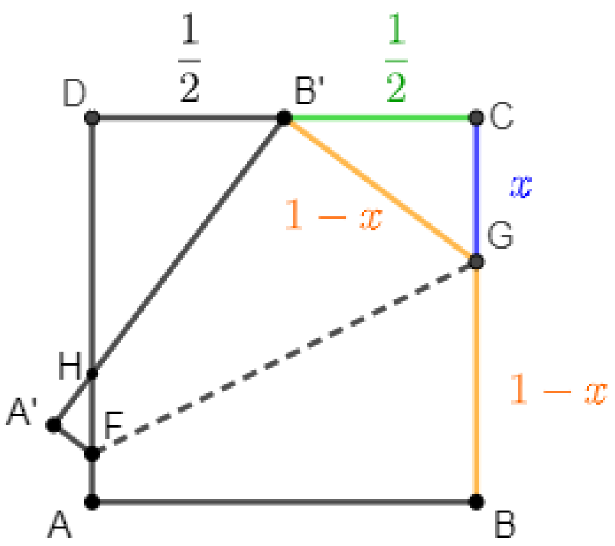

Figura 6. Atribuição de variáveis proposta pelos participantes da pesquisa.

Fonte: elaborada pelos autores.

Sabendo os valores de $\overline{CG}$, $\overline{DB'}$ e $\overline{B'C}$ os estudantes recorreram a relação de proporção entre os lados dos triângulos semelhantes e concluíram que o segmento

$\overline{HD}$ e equivale a $\frac{2}{3}$ do lado do quadrado e, consequentemente, $\overline{HA}$ vale $\frac{1}{3}$. Esse processo caracteriza "o fazer matemático em demonstrações, como uma capacidade de ajustar coisas aos padrões que estão dados, a partir do reconhecimento de semelhança entre aspectos de problemas e/ou ideias" (Batistela, Barbariz & Lazari, 2016, p. 214), esse desenvolvimento é importante para a produção de conhecimento, pois se trata de uma possibilidade para transformar o pensamento (Borba & Villarreal, 2005), o pensar é condicionado pelas mídias e a prova proposta pelos estudantes leva em consideração o dobrar do papel e as implicações matemáticas causadas por ela.

Contudo, é valido destacar que a conclusão não ocorreu de modo linear, os estudantes testaram algumas estratégias e em alguns casos obtiveram resultados inconclusivos como 2 = 2, ou 180º = 180º, ou $2x^3 = 2x^3$, e partiram de premissas equivocadas, por exemplo, que o ângulo $G\widehat{B}'C$ é igual a 45º. Diante das tentativas para justificar a veracidade do teorema, eles buscaram outras estratégias e até chegarem aos resultados. Se voltarmos o olhar para a experiência matemática estética, de acordo com Sinclair (2006), uma das funções da estética está relacionada ao uso da sensibilidade estética como forma de auxiliar nas abordagens escolhidas para resolver um problema, isto é, por meio dela podem surgir novas ideias e *insights*. Para tanto, "compreende-se que existem elementos e valores estéticos intrínsecos à Matemática, além de uma dimensão estética no processo de produção do conhecimento" (Scucuglia & Idem, 2021, p. 35).

Nas interações apresentadas anteriormente e buscando compreensões para a pergunta podemos destacar que o movimento de tentar convencer os colegas de que seus argumentos eram válidos e que faziam sentido, dá indícios da produção de conhecimento. Uma vez que, elucida o processo de busca, em conhecimentos prévios, por compreender o que estava acontecendo ao dobrar e quais os significados matemáticos de cada vinco feito no papel, além disso, a tentativa de convencer os colegas da veracidade de suas afirmações apresenta indicativos de raciocínio lógico e argumentação. Nesta direção Gróla & Gualandi (2023) destacam que o "desenvolvimento do pensamento geométrico pode possibilitar a construção de vários raciocínios e representações dos conceitos, propriedades, formas geométricas, dentre outros” (p. 71).

Ademais, o processo de construção de uma demonstração se mostra relevante para a produção de conhecimento, uma vez que, segundo Doering, Ripoll & Silva (2022), para “que se desenvolva o pensamento matemático e se adquira uma noção do que é efetivamente a Matemática, é necessário que se compreenda e saiba construir algumas demonstrações ou provas” (p. 2). Tais características foram observadas durante os momentos de discussão, como destacamos anteriormente nas expressões dos estudantes envolvendo prova ou verificação e no movimento de convencer os colegas de que seus argumentos eram válidos e que faziam sentido.

Outro aspecto que podemos destacar refere-se a inquietação acerca da representação das dobras no software GeoGebra, tendo como questão central: o que estamos realizando matematicamente quando dobramos o papel?, esta pergunta envolve o pensar-coletivamente-com-tecnologia, destacado por Borba e Villarreal (2005). No caso, há um pensar-com-dobraduras-e-software, que influencia a produção dos participantes, uma vez que as discussões seriam diferentes se as mídias fossem outras. Ou seja, as mídias “dobras no papel” e “GeoGebra” condicionaram a forma de pensar e produzir dos participantes diante da atividade proposta. As discussões apresentadas explicitam uma forma alternativa de se olhar para as dobras, com uma visão matemática, assim como enfatizam Pope e Lam (2011) ao dizerem que toda construção de origami se fundamenta em Geometria e que devemos explorar as possibilidades dependendo do contexto em que estamos inseridos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente, apresentamos algumas características da geometria do origami (Monteiro, 2008), dando destaque as suas sete operações básicas. Enfatizamos a pesquisa qualitativa como metodologia para o desenvolvimento do trabalho e explicitamos o curso de extensão universitária sobre origami e produção de vídeos digitais onde foram produzidos os dados.

Especificamente, discutimos os distintos modos de resolver um problema que estão condicionados a escolha das estratégias dos estudantes. No desenvolver do curso, os participantes da pesquisa discutiam quais caminhos seriam ou não eficientes para encontrar uma solução. A demonstração recorrendo a argumentos matemáticos foi uma das formas utilizadas para provar o Teorema de Haga e os estudantes se valeram de termos distintos para explicitar o modo como haviam pensado. Foram mencionadas palavras e expressões como “prova”, “demonstração”, “prova visual”, “meio que uma prova”, “mostrar” e “mostrar matematicamente”.

Nas interações apresentadas podemos destacar que há indícios da produção de conhecimento matemático, pois os estudantes mobilizaram conhecimentos prévios para convencer os colegas, expressaram suas descobertas e justificaram seus argumentos. Bem como, foram elucidados os processos de representação das dobras em software (GoeGebra) e seus significados matemáticos, por exemplo ao considerarem o movimento de dobra como o transporte de medidas.

A presença da estética é relevante para a compreensão da matemática e para a produção do conhecimento, tendo em vista que há uma abertura de possibilidades para o que se aprecia como beleza matemática. Nesta direção corroboramos com Scucuglia & Idem (2021) e “compreendemos a experiência matemática estética como uma noção que busca criar ou analisar os contextos em que possibilitam experiências estéticas integradas ao ensino, aprendizagem ou formação de professores de Matemática” (p. 40). Nesse sentido, corroboramos com Lino et. al. (2021) quando argumentam que “é a possibilidade de construção de conhecimento, de aproximação do admirador à cognição do raciocínio matemático, possibilitada pela assimilação de uma prova matemática ou da resolução de um problema, que consiste em sua beleza e que é fruto de admiração estética” (p. 102). Além disso, “a análise estética da resolução de um problema ou da demonstração de um teorema está diretamente ligada à sensação de percepção do próprio conhecimento, proporcionada pela resolução ou pela prova” (p. 102-103).

Por fim, quando nos voltamos para o papel do professor de matemática corroboramos com Faria, Romanello e Domingues (2018) ao destacarem a importância do cenário e dos “artefatos que a escola e os alunos disponibilizam para realizar explorações e atividades investigativas que favoreçam a realização de conjecturas, teste de hipóteses e tomada de decisões” (p. 18), visando a produção de conhecimentos. Neste caso, as possibilidades que se abrem ao trabalhar com papel e dobras podem avançar para tecnologias digitais, como produção de vídeos, softwares de matemática dinâmica, robôs com componentes de Arduino, impressoras 3d, outros materiais além do papel, e assim por diante.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

Batistela, R. F., Barbariza, T. A. M. & Lazari, H. (2016). Um estudo sobre demonstrações matemática por/com computador. *Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT*, 11(1), 204- 215.

Bicudo, I. (2002). Demonstração em Matemática. *Bolema*, Rio Claro – SP, v. 15, n. 18, sem paginação.

Bicudo, M. A. V. (1993). Pesquisa em educação matemática. *Pro-Posições*. 4(1), 18-23.

Borba, M. C. (2021). The future of mathematics education since COVID-19: humans-with-media or humans-with-non-living-things. *Educational Studies in Mathematics*, 108, 385-400.

Borba, M. C. & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking:* information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer,..

Chizzotti, A. (2003). A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evoluções e desafios. *Revista Portuguesa de Educação*, 16(2), 221–236.

Demaine, E. D. & O'Rourke, J. (2007). *Geometric folding algorithms:* linkages, origami, polyhedra. New York: Cambridge University Press, 472p.

De Villiers, M. (2001). Papel e Funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. *Educação e Matemática*, 1(62), 31 – 36.

Dewey, J. (2010). *Arte como experiência*. São Paulo: Martins Fontes.

Doering, L. R., Ripoll, C. C. & Silva, E. V. M. (2022). Construções e percepções de alguns alunos de licenciatura em matemática sobre demonstrações. *Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT*, 17, 01 – 22.

Faria, R. C. W. S., Romanello, L. A. & Domingues, N. S. (2018). Fases das tecnologias digitais na exploração matemática em sala de aula: das calculadoras gráficas aos celulares inteligentes. *Amazônia:* Revista de Educação em Ciências e Matemáticas. 14(30), 105-122.

Graciolli, C. Y. L. F. (2021) *Origami e Produção de Vídeos Digitais:* um estudo sobre a produção matemática em um curso de extensão universitária. 205 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro.

Gróla, M. G., & Gualandi, J. H. (2023). O ensino de geometria e o desenvolvimento do pensamento geométrico: um mapeamento de pesquisas realizadas no estado do Espírito Santo. *TANGRAM - Revista De Educação Matemática*, 6(1), 63–99. https://doi.org/10.30612/tangram.v6i1.16883

Haga, K. (2008). *Origamics:* mathematical explorations through paper folding. Singapore: World Scientific. 134p.

Hull, T. C. (2013). *Project Origami:* Activities for Exploring Mathematics. 2 ed. New York: CRC Press. 338p.

Hull, T. C. (2021). *Origametry*: Mathematical Methods in Paper Folding. New York: Cambridge University Press. 332p.

Lang, R. J. (1996). A computational algorithm for origami design. In: *Proceedings annual symposium on computational geometry*, 96, Pleasanton. ACM, 98-105.

Lino, C. M. C, Rossetto, D. Z., Bertolucci, G. A. & Balieiro Filho, I. F. (2021). Sobre a Estética e a Resolução de Problemas: a Beleza Matemática, o Raciocínio Heurístico e a Compreensão dos Objetos e Processos Matemáticos. In: Scucuglia, R. R. da S. & Idem, R. C. *Experiências Estéticas em Educação Matemática*. Porto Alegre, RS: Editora Fi. 81 – 105.

Lourenço, M. L. (2002). A Demonstração com Informática Aplicada à Educação. *Bolema*. 15(18), sem paginação.

Lucero, J. C. (2019) Existence of a Solution for Beloch’s Fold. *Mathematics Magazine*, 92(1), 24-31.

Mazzi, L. C. (2018). *As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio:* um foco nos capítulos de Geometria. 160 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto de Física, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Monteiro, L. C. N. (2008) *Orígamí:* história de um geometría axíomátíca. 111 f. Tese (Mestrado em Matemática para o Ensino) – Departamento de Matemática, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

Pope, S. & Lam, T. K. (2011). Origami and Learning Mathematics. In: Iverson, P. W.; Lang, R. J.& Yim, M. *Origami 5:* Fifth international meeting of origami science, mathematics and education (5OSME). New York: CRC Press. 205 – 217.

Santa, Z. M. R. (2016). *Producción de conocimiento geométrico escolar en un colectivo de professores-con-doblado-de-papel*. 389 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidad de Antioquia, Antioquia, 2016.

Scucuglia, R. R. da S. & Idem, R. C. (2021). Apresentação. In: Scucuglia, R. R. da S. & Idem, R. C. *Experiências Estéticas em Educação Matemática*. Porto Alegre, RS: Editora Fi. 25 – 52.

Sinclair, N. (2006). *Mathematics and beauty:* aesthetic approaches to teaching children. New York, NY: Teachers College Press.

Teixeira, S. A. (2017). *Design do origami:* Um Estudo Sobre Técnicas Projetuais com Dobras. 103 f. Dissertação (Mestrado em Design) - Faculdade de Arquitetura, Artes e Comunicação, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

1º autor: produção de dados; análise dos dados; metodologia; conceitualização; discussão dos resultados; redação – rascunho original e edição.

2º autor: orientação; produção de dados; análise dos dados; discussão dos resultados; metodologia; conceitualização; redação – revisão e edição.

3º autor: produção de dados; discussão dos resultados; metodologia; supervisão; conceitualização; redação – revisão e edição.