

DOI: 10.30612/tangram.v5i3.16420

## **Numeración y cálculo en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido numérico**

*Number and operations in early childhood and primary school: Ten essential manipulatives for developing number sense*

*Números e operações na escola infantil e primária: Dez manipulativos essenciais para desenvolver o sentido do número*

**Ángel Alsina**

Universidad de Girona, Departamento de Didácticas Específicas  
Girona, España

E-mail: [angel.alsina@udg.edu](mailto:angel.alsina@udg.edu)

Orcid: 0000-0001-8506-1838

**Ester Bosch**

Universidad de Girona, Gabinet de Materials per la Recerca i la Matemàtica a l'Escola  
Girona, España

E-mail: [ebosch16@xtec.cat](mailto:ebosch16@xtec.cat)

Orcid: 0000-0001-7169-0924

**Resumen:** La enseñanza de la numeración y el cálculo en infantil y primaria se está transformando como consecuencia de la incorporación de la competencia matemática en el currículo: se está dejando atrás un enfoque focalizado en la repetición, la reproducción, la mecanización y la realización de ejercicios descontextualizados a través de un libro de texto, por un enfoque cuya meta es desarrollar el sentido numérico a través de una variedad de recursos, entre los que los materiales manipulativos tienen un papel muy relevante. Con base en este cambio de paradigma, en la primera parte de este artículo se describen los conocimientos importantes e ideas centrales de numeración y cálculo para desarrollar el sentido numérico; y, en la segunda parte, se presenta una selección de diez materiales manipulativos esenciales, a partir de criterios de contenido, de finalidades didácticas y de tipo de material. Para cada material, se describen diversas actividades por grupos de edad: 3-6 años; 6-8 años; 8-10 años; 10-12 años.

**Palabras clave:** Numeración y cálculo. Sentido numérico. Materiales manipulativos. Educación Infantil. Educación Primaria.

**Abstract:** The teaching of numbers and operations in Early Childhood Education and Primary Education has been transformed as a result of the incorporation of mathematical competence into the curriculum: an approach focused on repetition, reproduction, mechanisation and decontextualized exercises through a textbook is being replaced by an approach whose goal is to develop number sense through multiple resources, among manipulative materials play a very relevant role. Based on this paradigm shift, the first part of this article describes the important knowledge and big ideas of number and operations for developing number sense; and, in the second part, a selection of ten essential manipulative materials is presented, based on criteria of content, pedagogical purposes and type of material. For each material, various activities are described by age: 3-6 years; 6-8 years; 8-10 years; 10-12 years.

**Keywords:** Number and operations. Number sense. Manipulative materials. Early Childhood Education. Primary Education.

**Resumo:** O ensino da numeração e cálculo no ensino pré-escolar e primário está a ser transformado como consequência da incorporação da competência matemática no currículo: uma abordagem centrada na repetição, reprodução, mecanização e realização de exercícios descontextualizados através de um manual está a ser substituída por uma abordagem cujo objectivo é desenvolver o sentido numérico através de uma variedade de recursos, entre os quais os materiais manipuladores desempenham um papel muito relevante. Com base nesta mudança de paradigma, a primeira parte deste artigo descreve os importantes conhecimentos e ideias centrais de numeração e cálculo para o desenvolvimento do sentido numérico, e a segunda parte apresenta uma selecção de dez materiais manipuladores essenciais, com base em critérios de conteúdo, fins didácticos e tipo de material. Para cada material, as actividades são descritas por grupo etário: 3-6 anos; 6-8 anos; 8-10 anos; 10-12 anos.

**Palavras-chave:** Numeração e cálculo. Sentido numérico. Materiais manipuladores. Educação pré-escolar. Ensino primário.

**Recebido em**  
13/07/2022  
**Aceito em**  
11/08/2022

## INTRODUCCIÓN

La idea de utilizar materiales manipulativos para desarrollar el conocimiento matemático tiene una larga trayectoria. Desde inicios del siglo XX, ha sido un campo muy productivo a partir de las aportaciones de numerosos expertos del ámbito de la Psicología del Aprendizaje, la Pedagogía, la Matemática y la Ciencia, principalmente. Entre ellos, destacan autores clásicos como Maria Montessori, Jean Piaget, Ovide Decroly, Célestin Freinet, Hans Freudenthal, Zoltan P. Dienes, Georges Cuisinaire, Gastón Mialaret..., junto con otros autores como Pedro Puig Adam, que dejó muy claros sus planteamientos en su famoso decálogo (Puig Adam, 1955) o M. Antonia Canals, que ha recopilado una amplia variedad de materiales en el *Gabinet de Materials i de Recerca per la Matemàtica a l'Escola* (GAMAR, por su acrónimo en catalán), entre otros. Para estos autores:

la manipulación es mucho más que una manera divertida de desarrollar aprendizajes. La manipulación de materiales es en ella misma una manera de aprender que ha de hacer más eficaz el proceso de aprendizaje sin hacerlo necesariamente más rápido. Por otra parte, el uso de materiales es una manera de promover la autonomía del aprendiz ya que se limita la participación de los otros, principalmente del adulto, en momentos cruciales del proceso de aprendizaje (Alsina y Planas, 2008, p. 50).

Progresivamente, los currículos de matemáticas se han ido impregnando de esta idea. En el caso de la legislación educativa española, por ejemplo, el Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil señala que, para el desarrollo de la competencia matemática (junto con la competencia en ciencia, tecnología e ingeniería), es necesario prestar especial atención a la manipulación de objetos; asimismo, en el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria, se menciona que, en relación a las Matemáticas, “el área debe abordarse de forma experimental, concediendo especial

relevancia a la manipulación, en especial en los primeros niveles” (p. 93). Aunque, de acuerdo con el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (Alsina, 2019, 2020), no se comparte que la manipulación deba priorizarse en los primeros niveles, sino siempre que se introduzca una nueva idea para promover la visualización de ideas matemáticas, lo que se pretende enfatizar aquí es que la manipulación de materiales está muy presente en el currículo.

A partir de los antecedentes descritos ha surgido una gran avalancha de propuestas anónimas en diversos medios, principalmente en redes sociales como Instagram, Pinterest, etc. En este sentido, Alsina (2020) indica que esta gran cantidad de propuestas requiere que el profesorado tenga criterios objetivos, es decir, respaldados por la investigación, para seleccionar recursos que garanticen un buen aprendizaje de las matemáticas.

Desde este punto de vista, nuestra finalidad consiste en presentar diez recursos manipulativos esenciales que contribuyan a desarrollar el sentido numérico de los 3 a los 12 años, a partir de criterios de contenido, de finalidades didácticas y de tipo de material.

## **NUMERACIÓN, CÁLCULO Y SENTIDO NUMÉRICO DE 3 A 12 AÑOS: CONOCIMIENTOS IMPORTANTES**

La noción de “matemáticas importantes” fue impulsada por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 2003) en el contexto de los Principios para las Matemáticas escolares y, más concretamente en el Principio Curricular, al indicar que “un currículo es algo más que una relación de actividades: tiene que ser coherente, estar centrado en matemáticas importantes y bien articulado a través de los diferentes niveles” (NCTM, 2003, p. 15). Con ello, se referían a unas matemáticas que preparen para un estudio continuado y para la resolución de problemas en diferentes entornos: el aula, la casa o el trabajo. Y añadían, además, que su buena articulación incentiva a los niños para ir aprendiendo ideas matemáticas cada vez más complejas a medida que avanzan los estudios.

A partir de una amplia revisión de la literatura, Alsina (2022) destaca tres grupos de conocimientos importantes que deberían trabajarse sistemáticamente a lo largo de la etapa de infantil: la comprensión de los números, la representación de los números y el cálculo aritmético, al tratarse de aspectos clave poder avanzar hacia la adquisición del sentido numérico. Estos conocimientos tienen continuidad en la etapa de primaria, de manera que Alsina (2019) subraya los siguientes conocimientos importantes: la comprensión de los números en particular y del funcionamiento de los conjuntos numéricos en general, las relaciones que existen entre ellos y las diferentes formas de representarlos; la comprensión de los significados de las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división, las relaciones entre ellas y su aplicación en los distintos conjuntos numéricos; y la resolución fluida de las operaciones aritméticas, principalmente a través de la estimación y del cálculo mental, así como la resolución de situaciones problemáticas que requieran dichas operaciones. Para promover la comprensión de los números, hace falta considerar diversos aspectos: el reconocimiento de los números, la situación de los números en la recta numérica, la comparación de números, el uso de referentes numéricos, el valor posicional de los números y la representación de los números:

- El reconocimiento de la cantidad de objetos de una colección (el cardinal): requiere reconocer instantáneamente (súbitamente) el número de elementos que hay en un grupo (subitización) y saberlos contar, con todo lo que implica la enumeración. Para contar, se debe conocer el nombre de los números y usar estos nombres de acuerdo con la serie numérica. Progresivamente, debe transferirse el reconocimiento de los números naturales a otros conjuntos numéricos, como los racionales, de manera que comprendan qué significa  $\frac{1}{4}$ ; que identifiquen qué lugar ocupa  $\frac{1}{4}$  en la recta numérica; o bien que distingan si  $\frac{1}{4}$  está incluido dentro de  $\frac{1}{3}$  o no y por qué motivo, entre otros aspectos.
- La recta numérica: implica identificar la cantidad de objetos de una colección dispuestos en línea recta, por lo que son necesarios los números ordinales para identificar la posición que ocupa cada objeto dentro de la colección. Este

conocimiento debe generalizarse de manera que al finalizar la etapa de primaria el alumnado sepa situar cantidades enteras y no enteras pertenecientes a diferentes conjuntos numéricos (naturales y decimales) en la recta numérica.

- Comparar cantidades de elementos por criterios cuantitativos: inicialmente, la comparación de colecciones de objetos perceptivamente diferentes usando los comparativos “más... que”, “menos... que”, “tanto... como” o “igual... que”, puede ayudar a superar la primacia de la percepción. Progresivamente, es necesario que el alumnado realice diversas acciones, como clasificar, ordenar, asociar o seriar cantidades de elementos por criterios cuantitativos, lo cual contribuye a reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números que pertenecen a distintos conjuntos numéricos. Para comparar números, es importante emplear métodos como la estimación o de la descomposición y usar distintas propiedades numéricas: p. ej., entender la magnitud de los números implica reconocer que 0,05 es mayor que 0,025, que entre 1,34 y 1,35 hay infinitos números o bien comparar fracciones como  $5/7$  y  $5/3$ .
- El uso de referentes numéricos: progresivamente, es necesario usar referentes mentales para pensar sobre los números, tanto para resolver problemas como para disponer de puntos de referencia en las mediciones de objetos comunes y de situaciones en el entorno: p. ej., en un estadio inicial la edad puede servir para saber quién es más pequeño y más mayor, etc.
- El valor posicional de los números: este conocimiento, más propio de primaria, se refiere al valor que toma un dígito de acuerdo con la posición que ocupa dentro del número (unidades, decenas, centenas...), de manera que el cambio de posición de un dígito dentro de un número altera el valor total del mismo. El conocimiento de la estructura interna de los números, tanto naturales como decimales, es uno de los conocimientos fundamentales para la comprensión del funcionamiento del Sistema de Numeración Decimal.
- La representación de los números: incluye la expresión oral hasta la notación convencional, pasando por otras formas concretas y pictóricas de representación.

La adquisición de la notación escrita de los numerales es un proceso lento y complejo, en el que los usos de formas convencionales y no convencionales conviven durante un largo periodo. Progresivamente, el alumnado debe empezar a representar números correspondientes a otros conjuntos numéricos como las fracciones, y deben aprender a reconocer los tipos de escritura de un mismo número, relacionar una fracción y su escritura decimal: p. ej., identificar que  $\frac{1}{4} = 0,25$ . También deberían identificar qué tipo de número es apropiado a cada contexto o reconocer y usar distintas expresiones de un mismo número: fracción, decimal, porcentaje, etc.

Para promover la comprensión de las operaciones aritméticas y promover el cálculo mental, deberían considerarse diversos conocimientos: distinguir los distintos aspectos de las operaciones; conocer los diversos significados de las operaciones y sus propiedades; conocer el efecto relativo de las operaciones; y, finalmente, saberlas relacionar.

- Los distintos aspectos de las operaciones: se refiere a un conocimiento en torno a cuestiones como la comprensión, la funcionalidad o los algoritmos. Desde este punto de vista, habitualmente se han distinguido tres grandes aspectos: 1) el aspecto comprensivo, que se refiere a que el alumnado debería comprender que operar significa, en un sentido amplio, transformar cantidades: p. ej., añadir (o quitar) una cantidad determinada respecto a una cantidad inicial implica que la cantidad final sea diferente de la inicial (salvo cuando se añaden o quitan cero objetos); 2) el aspecto funcional, que se refiere a que, progresivamente, deberían descubrir para qué sirven las operaciones aritméticas, es decir, cuando es necesario sumar, restar, multiplicar o bien dividir en diferentes conjuntos numéricos; y 3) el aspecto técnico, que se refiere a los algoritmos para sumar, restar, multiplicar o bien dividir. Paulatinamente, se ha ido dando mayor protagonismo a los aspectos comprensivo y funcional de las operaciones y, en consecuencia, se ha situado el foco en las estrategias de cálculo, más que en la mecánica de las operaciones. En este sentido, incluimos un cuarto aspecto: 4) el

aspecto heurístico, que incide en el descubrimiento de estrategias de cálculo para obtener resultados de manera eficaz.

- Los significados de las operaciones: se trata de un conocimiento muy relevante que se refiere a las distintas perspectivas para definir las operaciones. La suma se puede definir desde el conteo (calcular); desde la modelación, que comprende la suma de dos números como dos conjuntos unidos que forman un tercero cuyo cardinal es la suma de los otros dos; y desde las estrategias de cálculo, donde ya aparece una conceptualización más sofisticada que permite considerar que la suma de dos números es el resultado de contar el número de veces que indica el segundo desde el primero o, más eficiente aún, contar desde el más grande de los dos el número de veces que indica el restante. La resta se define como la operación inversa a la suma, es decir, dado un número, al restarle otro obtendremos un tercero tal que al sumarle el segundo conseguiríamos el primero. En el caso de los números naturales, existe una restricción importante a tener en cuenta: la resta solo está definida en este conjunto numérico si el sustraendo es menor que el minuendo, pues en otro caso el resultado de la resta generaría números negativos, abriendo la puerta a la conceptualización de los números enteros. La multiplicación se puede entender como: un operador; la repetición de grupos iguales; el área que ocupa el producto de dos factores; o como recuento combinatorio: p. ej., la expresión  $5 \times 4$  indica que vamos a sumar cinco veces cuatro o cuatro veces cinco, o bien que forma un rectángulo cuya área es de 20 unidades cuadradas, entre otros significados. Finalmente, la división se define como la operación inversa de la multiplicación y, en el caso de los números naturales, se puede asociar principalmente al reparto y a la medida. En el caso del reparto, inicialmente generaría estrategias vinculadas a las correspondencias biyectivas; mientras que, desde el punto de vista de la medida (cuántas veces cabe el divisor en el dividendo), implica hacer agrupaciones cuantitativas. Desde este prisma, surgen dos ideas fundamentales asociadas a la operación de división: las partes iguales y el resto que no se puede repartir o que no se puede medir, y al que es importante darle significado.



Las propiedades de las operaciones: además de contribuir a comprender mejor las operaciones, las propiedades permiten facilitar el cálculo numérico y estimar el resultado. Por ejemplo, cuando se debe decidir qué operación  $28 \times 52$  o  $30 \times 50$  tiene un resultado mayor: si es capaz de utilizar la descomposición y la propiedad distributiva, no será necesario que sepa el valor final de ambas operaciones, bastará con que realice el siguiente razonamiento:  $28 \times 52 = 28 \times (50 + 2)$  y  $30 \times 50 = (28 + 2) \times 50$ , el alumnado observará que el factor  $28 \times 50$  aparece en ambas operaciones, por lo que solo debe comparar  $28 \times 2$  y  $2 \times 50$ , un cálculo sencillo que puede realizarse mentalmente (Almeida, 2017). En la Tabla 1 se presenta una síntesis de las propiedades que cumplen las cuatro operaciones básicas:

**Tabla 1**

Propiedades de las operaciones básicas.

	Suma	Resta	Producto	División
<b>Operación interna</b>	x		x	
<b>Elemento neutro</b>	x	x	x	x
<b>Conmutativa</b>	x		x	
<b>Asociativa</b>	x		x	
<b>Distributiva</b>		x	x	

- Efecto relativo de las operaciones: se trata de identificar cómo las diferentes operaciones afectan a su resultado. P. ej., cuando se presenta la operación  $152 \times 0.97$ , el efecto relativo implica comprender que no es necesario realizar el cálculo exacto para estimar que el resultado será un poco menor que 152.
- Relacionar las operaciones: p. ej., saber que  $10 \times 0,25$  es lo mismo que  $10:4$ .

## NUMERACIÓN, CÁLCULO Y SENTIDO NUMÉRICO DE 3 A 12 AÑOS: CONOCIMIENTOS IMPORTANTES

La noción de *idea central* o de *gran idea* en matemáticas se refiere a “una declaración de una idea que es central para el aprendizaje de las matemáticas, una

idea que vincula numerosos conocimientos matemáticos en un todo coherente” (Charles, 2005, p. 10). Para Toh y Yeo (2019), el énfasis de las grandes ideas en matemáticas puede traducirse en un esfuerzo consciente por conseguir que el alumnado vea las matemáticas como un sistema altamente conectado de pensamiento y conceptos a través de varios temas, en lugar de verlos como conceptos aislados. En este sentido, pues, las ideas centrales se refieren a las conexiones de varias ideas a través de las matemáticas y, desde este punto de vista, son una base para el profesorado de matemáticas. Esta idea se ha recogido, por ejemplo, en el currículo de matemáticas del *Singapore Ministry of Education* (2018), que destaca que es necesario "desarrollar una mayor conciencia de la naturaleza de las matemáticas y las grandes ideas que son centrales de la disciplina" (p. 9) con el fin de lograr la coherencia entre los diferentes temas.

Considerando estos antecedentes, el *Centre de Recursos pedagògics específics de Suport a la Innovació i la Recerca Educativa (CESIRE)* del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya ha trabajado en la definición de las ideas centrales correspondientes a los distintos bloques de contenidos. A continuación, se reproducen las ideas centrales de numeración y cálculo para la etapa de infantil (Torra y Roca, 2019) y primaria (Burgués y Serra, 2019):

**Tabla 2**

Ideas centrales de numeración y cálculo de 3 a 12 años.

3-6 años	6-8 años	8-10 años	10-12 años
La cantidad no tiene una única forma.	Contando podemos saber cuántos hay.	Podemos representar cantidades usando números (SND).	Podemos representar e interpretar cantidades usando números (SND).
Podemos saber en un grupo, “cuántos elementos hay” de súbito o bien contando.	Podemos representar e interpretar cantidades usando números (SND).	Relaciones entre cantidades: dos números siempre se pueden comparar.	Relaciones entre cantidades: dos números siempre se pueden comparar.

Los números tienen un orden.	Relaciones entre cantidades: dos números siempre se pueden comparar.	Pensamiento multiplicativo temprano: aplicar flexiblemente la multiplicación y la división a situaciones concretas.	Pensamiento multiplicativo temprano: aplicar flexiblemente la multiplicación y la división a situaciones concretas.
Los números se pueden componer y descomponer.	Pensamiento aditivo: aplicar flexiblemente la suma y el resto a situaciones concretas.	Usando las propiedades de las operaciones y de los números podemos resolver cálculos.	Relaciones multiplicativas parte/todo.
Hay situaciones concretas que nos llevan a sumar y restar.			

Como se puede observar en la Tabla 2, las ideas centrales de numeración y cálculo para la etapa de infantil giran en torno a dos grandes ideas: 1) las cantidades (subitización, conteo de elementos, comparación, composición, descomposición e introducción a las operaciones de suma y resta); 2) los números que se usan para designar las cantidades. En primaria se incluyen otras grandes ideas: 3) la representación de las cantidades (a partir de la notación convencional del Sistema de Numeración Decimal); 4) las relaciones entre cantidades (ordenaciones, clasificaciones, correspondencias... por criterios cuantitativos); 5) el pensamiento aditivo (operaciones de suma y resta y sus relaciones); 6) el pensamiento multiplicativo (operaciones de multiplicación y división y sus relaciones); 7) las relaciones multiplicativas parte/todo; y, finalmente, 8) las propiedades de las operaciones.

## DIEZ MATERIALES MANIPULATIVOS ESENCIALES PARA DESARROLLAR EL SENTIDO NUMÉRICO DE LOS 3 A LOS 12 AÑOS

Como se ha indicado en la introducción, para seleccionar los diez materiales se han seguido criterios de contenido, de objetivo didáctico y de tipo de material: se han seleccionado materiales abiertos, que permitan realizar actividades variadas y usar el

mismo material para diferentes edades. También se ha tenido en cuenta que fuesen materiales de fácil acceso, relativamente económicos y que en caso de no poder disponer del recurso comercializado se pudiera crear manualmente un material parecido. Pero el criterio más importante es que con un mismo material se puedan plantear propuestas didácticas que permitan no solo practicar conceptos sino descubrirlos experimentando; visualizarlos para tener referencias; crear conexiones e investigar.

Los diez materiales seleccionados son: 1) Collar de bolas; 2) Numicon; 3) Material multibase y policubos; 4) Regletas; 5) Cartas de contaje de elementos, subitización y *Frame Ten*; 6) Ábaco y cartones numéricos de descomposición; 7) Recta numérica; 8) Panel numérico; 9) Disco de fracciones, diagrama de Freudenthal y fracciones con torres de equivalencias; y 10) Máquinas de calcular. A continuación, para cada material, se describen algunas actividades concretas que se pueden realizar, organizadas por grupos de edad: 3-6 años; 6-8 años; 8-10 años; 10-12 años (Tablas 3 a 12).

**1. El collar de bolas:** es un material manipulativo que favorece la subitización y el contaje de elementos. Consiste en un cordel con bolas estructuradas en dos colores para visualizar claramente los números (Figura 1). El objetivo principal del collar es descubrir distintas estrategias para contar las bolas e integrar las más eficaces en cada caso.



**Figura 1.** El collar de bolas

Para adquirir una buena base numérica es importante ir despacio con los números y rápido con las operaciones. Este material impulsa este tipo de aprendizaje porque se pueden realizar varias operaciones con cada número para conseguir dominar correctamente su significado. Por ejemplo, si en infantil se parte de un collar de seis

bolas, se pueden proponer muchas actividades: descomponer el 6 de distintas maneras, tapar bolas para descubrir cuántas faltan, repartirlo en dos partes iguales, resolver manipulativamente problemas numéricos, descubrir los distintos significados de las operaciones, etc. El collar se va ampliando en el primer ciclo de primaria hasta llegar a 20. Es necesario dominar muy bien estos números para poder generalizar los descubrimientos. A continuación, se pasa al collar de 50 o 100 pero cambiando de color cada 10 bolas para hacer el paralelismo con el sistema de numeración decimal.

**Tabla 3**

Actividades con el collar de bolas.

3-6	<p>Construcción progresiva del collar de 10 bolas, a medida que se van introduciendo los números. Subitización: p. ej., ¿cuántas bolas hay? ¿cómo lo has sabido? ¿alguien lo ha hecho de distinta manera?</p> <p>Identificación del número concreto de bolas.</p> <p>Reconocimiento de la cantidad de bolas tapadas de los extremos o del centro: p. ej., ¿cuántas bolas he tapado?</p> <p>Descomposición de un número de distintas maneras.</p> <p>Distribución de las bolas en dos partes.</p> <p>Resolución manipulativa de problemas aritméticos: “Si tengo 3 bolas, ¿cuántas me faltan para tener 7?”, “Compro 3 cromos y me regalan dos más, ¿cuántos tengo ahora?”, etc.</p>
6-8	<p>Práctica de las mismas actividades de los niveles anteriores con números hasta el 20.</p> <p>Construcción del collar de 100 cambiando el color cada 10 bolas.</p> <p>Contaje de 2 en 2, de 5 en 5, de 10 en 10.</p> <p>Realización de sumas pasando por la decena exacta y verbalizar como lo hemos hecho: p. ej., si sumamos 15+7, primero marcamos el 15 y al tener que añadir 7 percibimos que 5 son de un color para llegar a 20 y después añadimos dos más.</p>
8-10	<p>Realización de actividades con el collar del 100 para consolidar el cálculo con estos números y actividades con el collar de 10 para entender la generalización del 0.</p> <p><i>Con el collar del 100</i></p> <p>Descomposición del 100; descubrir cómo se calcula el doble de un número (con dos collares de 100 o doblando uno); averiguar la mitad de un número; practicar las restas “para llegar a” (p. ej., 54-37: tengo 37 bolas y quiero llegar a 54), etc.</p> <p><i>Con el collar del 10</i></p> <p>Generalización del 0 (p. ej., si <math>5+2=7</math> también podemos saber que <math>50+20=70</math>, <math>500+200=700</math>, etc.)</p> <p>Valores diferentes a las bolas (100, 1000 o 10000) y realizar las mismas actividades que en 6-8 años, pero con estos números: p. ej., “Si tengo 3000 euros, ¿cuántos me faltan para tener 7000?”</p> <p>Descomposición del 10000.</p> <p>Aproximaciones, etc.</p>

10-12

Práctica de las actividades de los niveles anteriores, adjudicando a cada bola el número que queremos aplicar los cálculos (100000 o 1000000).

Introducción de los números decimales, recordando que hay que ir despacio con los números y rápido con las operaciones, como se ha indicado. P. ej., practicar con el collar de diez bolas adjudicando a cada una el valor 0.1.

Descomposición del 1, dobles y mitades, cálculos rápidos, etc.

**Material alternativo:** se puede construir con material reciclado, por ejemplo, con cápsulas de café. También se puede hacer un collar con policubos ensartables.

**2. Numicon:** se trata de un material basado en el método desarrollado en 1931 por Herbinère Lebert, maestra de la Escuela Materna, para ayudar a aprender y comprender la numeración. Actualmente, consta de diez formas de distintos colores que se corresponden a las distintas representaciones numéricas de los números del 1 al 10 (Figura 2). Este material está especialmente indicado para las primeras edades por sus características multisensoriales, pero también es muy útil en los niveles superiores para hacer relaciones matemáticas e investigar. Con el Numicon, los números se pueden ver y tocar, favorecen el contaje, la creación de imágenes mentales de las distintas descomposiciones de los números y del significado de las operaciones.



Figura 2. Numicon

#### Tabla 4

Actividades con el Numicon.

3-6	<p>Identificación de los números, hacer correspondencias con objetos, compararlos y ordenarlos.                  Utilización del Numicon del 1 para comprobar la asistencia del alumnado.                  Descomposición de un número en sus múltiples posibilidades.                  Realización de sumas y obtención del resultado.                  Exploración inicial de los distintos significados de la resta.                  Uso de las piezas para hacer recuentos en actividades estadísticas.                  Introducción de la técnica del Sudoku con tres piezas del Numicon.                  Utilización de las piezas para pagar en situaciones de compra-venta.</p>
6-8	<p>Consolidación de las descomposiciones de los números.                  Cálculo del valor de un dibujo hecho con piezas Numicon.                  Práctica de la suma de números pasando por el 10 (<math>8+4 = 8+2+2 = 10+2</math>).                  Visualización de los distintos significados de la resta (p. ej.: 10-7 “a 10 le quito 7”, “de 7 para llegar a 10”, “la diferencia entre 10 y 7 es 3”). Para realizar las restas se tienen que sobreponer las piezas.                  Adquisición de la noción de doble y mitad.                  Comprensión del Sistema de Numeración Decimal (unidades y decenas) y visualización de los cambios numéricos al poner y quitar 10.                  Trabajo visual de los problemas de “El todo y las partes”.</p>
8-10	<p>Investigación sobre la suma de números pares e impares: p. ej., “¿cómo son los resultados en cada caso?”                  Noción de multiplicación como suma de factores iguales y obtención del resultado.                  Visualización de las tablas de multiplicar y detección de patrones.                  Exploración manipulativa del significado de la división: p. ej., “¿cuántas veces cabe el 2 en el 8?”</p>
10-12	<p>Significado de divisor de un número.                  Visualización de la suma de fracciones con el mismo denominador (es importante recordar que las fracciones tienen que hacer referencia a la misma unidad; en el caso de los Numicon, a la misma pieza)</p>

**Material alternativo:** se pueden utilizar tapones, hueveras o cartones para realizar las distintas representaciones numéricas.

**3. Material multibase y policubos:** se propone su uso conjunto para reforzar los mismos conceptos de numeración y cálculo: el conteo de elementos y la comprensión del Sistema de Numeración Decimal.

El material multibase, o de base 10, fue creado por William Hull aunque fue Zoltan P. Dienes, matemático de origen húngaro, quien lo difundió como material básico para facilitar la abstracción. Está compuesto de cubos de 1cm cúbico que representan la unidad; barras equivalentes a 10 unidades, que representan las decenas; placas de 100 unidades para identificar las centenas; y cubos de 1000 unidades para las unidades de mil (primera imagen de la Figura 3). Al tener marcadas todas las unidades, facilita el conteo. Este material visualiza el valor de los números

dependiendo de su posición y las equivalencias que hay entre las distintas posiciones, permite la construcción de números y facilita la comprensión de las operaciones tradicionales.

Los policubos o multicubos son unas piezas cúbicas de plástico de unos dos centímetros de arista, encajables entre ellos. Son de diez colores diferentes que coinciden con los de las regletas Cuisenaire para facilitar las conexiones entre ambos materiales (segunda imagen de la Figura 3). Los policubos son un material multifuncional para todas las edades y bloques de contenidos matemáticos.



**Figura 3.** Material multibase y policubos

**Tabla 5**

Actividades con el material multibase y policubos

3-6	<p>Contaje de elementos. Adicionalmente, contaje en sentido bidireccional.                  Relación de números y cantidades.                  Construcción de números del 1 al 9 de forma directa y de forma inversa, es decir, dado un número representarlo con el material y viceversa.                  Ordenación y comparación de las distintas representaciones numéricas.                  Descomposición de un número en dos o tres partes.                  Investigación de cuántas maneras puedo descomponer una barra de 7 cubos.                  Realización de sumas y restas manipulativas.                  Resolución de problemas aritméticos con la ayuda del material.</p>
-----	--



6-8	<p>Comprensión del Sistema de Numeración Decimal: cambiar 10 unidades por 1 decena, 10 decenas por una centena o viceversa. Visualizar las equivalencias entre ellas: 1 centena equivale a 10 decenas y a 100 unidades.</p> <p>Descomposición numérica de forma directa y de forma inversa, es decir, dado un número representarlo con el material y viceversa.</p> <p>Construcción de los números hasta el millar, visualizando las unidades, decenas, centenas y millares.</p> <p>Realización de actividades de poner y quitar decenas y centenas para agilizar la adquisición del sistema de numeración.</p> <p>Visualización de la descomposición del 100 de múltiples maneras.</p> <p>Realización manipulativa de sumas y restas para reforzar los cambios necesarios en las operaciones dinámicas tradicionales (“con llevadas”)</p> <p>Devolución de cambio de 1 euro (100 céntimos) sobreponiendo el valor del precio del producto sobre una placa de 100.</p>
8-10	<p>Construcción de los números de tres y cuatro cifras, visualizando las unidades, decenas, centenas y millares.</p> <p>Relación del tipo de forma representada entre la unidad y la unidad de mil, la decena y la decena de mil, etc.</p> <p>Realización manipulativa de multiplicaciones y divisiones para entender su significado y adquirir estrategias de cálculo.</p>
10-12	<p>Representación de fracciones y visualización de operaciones con el mismo denominador.</p> <p>Introducción de los números decimales otorgando a la placa del 100 el valor de la unidad.</p> <p>Visualización de las potencias de 10.</p>

**Material alternativo:** el material multibase se puede substituir por representaciones en papel de las formas correspondientes con sus unidades marcadas. El cubo que representa el mil puede substituirse por cajas cúbicas de productos alimenticios. Los policubos, en cambio, son difíciles de substituir por otros materiales.

**4. Las regletas:** se trata de un material estructurado compuesto por barras de 1cm<sup>2</sup> de base de distintos colores para representar los diez primeros números naturales: la regleta que representa el uno tiene una longitud de 1cm y representa la unidad; la regleta que representa el 2 equivale a dos regletas unidad y por tanto mide 2cm, y así sucesivamente hasta la regleta del 10 que mide 10cm. La principal característica es que las unidades no están marcadas para favorecer el cálculo y no el contaje de elementos, razón por la cual se recomienda su uso a partir de primaria (existen materiales más útiles para promover el contaje en infantil como el material inespecífico, el Numicon y los policubos).

Las regletas permiten experimentar, descubrir relaciones entre números, visualizar las operaciones, comprobar resultados, facilitar la comprensión de conceptos

abstractos, investigar propiedades, introducir las potencias, etc. Actualmente, existen dos tipos:

- Las regletas Cuisenaire, que deben el nombre a su creador, Georges Cuisinaire, maestro y pedagogo belga que en 1952 publicó un manual sobre el uso de este material llamado “Los números de colores” y que supuso un cambio en la Didáctica de las Matemáticas (primera imagen de la Figura 4).
- Las regletas Maria Antonia Canals, creadas per esta maestra y pedagoga catalana, que tomando ideas preliminares de los bloques multibase de Dienes y las regletas de Cuisinaire, unió en un mismo material la representación en regletas de los diez primeros números naturales, sus cuadrados y sus cubos de colores sin marcar las unidades para favorecer la imaginación de los números, su expresión verbal y el razonamiento a partir de la manipulación. La autora realizó un cambio de colores respecto a las regletas Cuisenaire para poder visualizar las familias de los números y facilitar el trabajo de los múltiplos y divisores (segunda imagen de la Figura 4).



**Figura 4.** Regletas Cuisenaire y regletas Canals

## Tabla 6

### Actividades con las regletas

3-6

Se recomienda su uso para actividades no numéricas: clasificar por colores; realizar series y descubrir patrones; realizar composiciones geométricas y hacer simetrías; comparar, ordenar y/o igualar longitudes; etc.

6-8

Ordenación numérica de las regletas y detección de cómo crecen los números.  
 Composiciones y descomposiciones de números: construcción y verbalización de la “pared” de cada número, sobre todo la del número 10.  
 Descomposición, con la ayuda de esquemas, de los números de dos cifras de múltiples maneras.  
 Consolidación del resultado de los dobles (5+5) y los “casi dobles” (5+6)  
 Suma de regletas utilizando diferentes estrategias: dibujos libres con regletas y contar cuánto suman; carrera de regletas (colocar en línea las regletas que salen al lanzar n veces un dado de 10 caras y sumar su valor); construcciones/obras de arte con regletas, estimar el valor de todas las regletas y compararlo con el real, etc.  
 Visualización y comparación de los números de 2 y 3 cifras.  
 Actividades de poner y quitar decenas y centenas para entender el sistema de numeración decimal.  
 Realización de una recta numérica con regletas del 10 e identificación de la situación de distintos números.  
 Visualización del significado de sumar y restar.  
 Práctica de estrategias de cálculo: sumar y restar pasando por la decena, descomponer números, etc.  
 Representación de los problemas del “todo y las partes”.

8-10

Representación de los números de 3 y 4 cifras, usando el cubo de 1000, las placas del 100 y las regletas.  
 Relación de las formas entre la unidad y la unidad de mil, la decena y la decena de mil, etc.  
 Series numéricas con las regletas: p. ej., contar de 12 en 12, de 25 en 25, etc.  
 Obtención manipulativa de los dobles y las mitades de los números.  
 Descomposición del 100 y del 1000 de múltiples maneras.  
 Visualización de las distintas maneras o algoritmos de sumar y restar para llegar al mismo resultado: método por descomposición, completar “para llegar a”, redondear, etc.  
 Práctica de estrategias útiles para el cálculo mental.  
 Reconocimiento del significado de las propiedades de las operaciones.  
 Construcción de las tablas de multiplicar y verbalización del proceso.  
 Realización de multiplicaciones con el método de recubrir el área que ocupa el rectángulo correspondiente.  
 Construcción de un número a partir de todas las multiplicaciones de 2 factores posibles.  
 Visualización de la propiedad conmutativa.  
 Realización de problemas abiertos para encontrar todas las soluciones: p. ej., “Sabemos que en una habitación hay 12 patas de animales. ¿Cuántos animales puede haber?”  
 Comprensión del significado de dividir repartiendo las regletas.

10-12

Visualización de la propiedad distributiva a partir de situaciones concretas.  
Aplicación de la propiedad distributiva para deducir las tablas de multiplicar.  
Análisis del significado de multiplicar un número por 10. Esta operación significa convertir las unidades en decenas y las decenas en centenas.  
Comprensión del significado de multiplicar un número por 100. Si queremos aumentar el número 100 veces significa que tenemos que cambiar cada unidad por una placa de 100 y cada decena por el cubo de 1000.  
Descomposición del cubo de 1000 en cubos más pequeños para descubrir otras descomposiciones.  
Realización de divisiones utilizando distintas estrategias.  
Visualización del significado de las potencias.  
Actividades para descubrir otros sistemas de numeración: p. ej., el sexagesimal para trabajar las horas, minutos y segundos.  
Introducción de los números decimales otorgando a la placa del 100 el valor de la unidad.  
Deducción del valor de las otras regletas. Visualizar la representación de los números decimales favorece la comprensión y el cálculo.  
Investigaciones diversas sobre propiedades matemáticas: las características de los números cuadrados, como crecen los cuadrados, los números cúbicos, etc.

**Material alternativo:** utilizar regletas impresas en cartulina. Adicionalmente, existen muchas aplicaciones *online* para trabajar las regletas de manera virtual. La mayoría de actividades se pueden realizar también con policubos.

**5. Cartas de subitización, contaje de elementos y Ten Frame:** existen gran variedad de cartas útiles para reconocer cantidades de súbito, contar, relacionar número y cantidad, comparar cantidades y calcular. Una misma carta o representación puede servir para abordar todas estas finalidades, pero diversificar las imágenes, sus tamaños y posición ayudan a mejorar la capacidad de visualizar los números y la fluidez operativa (dos primeras imágenes de la Figura 5).

Se tiene que hacer una mención especial a las cartas para trabajar la subitización, que es la capacidad para reconocer instantáneamente el número de elementos de un conjunto sin utilizar técnicas de contaje de elementos. En edades tempranas, es recomendable ofrecer estímulos visuales y patrones de tres a cinco elementos para desarrollar la subitización perceptiva. Posteriormente, se desarrolla la subitización conceptual, que es la capacidad de ver conjuntos de números dentro de conjuntos más grandes.

Las numerosas actividades para construir habilidades de subitización consisten en visualizar tarjetas de patrones de puntos u otros objetos, verbalizar las estrategias utilizadas, proporcionar estructuras de matrices, reconocer números iguales con

patrones distintos, etc. Un caso concreto de identificación de patrón es el que utiliza el “*Ten Frame* o cajitas del 10” (última imagen de la Figura 5), que son rectángulos formados por dos filas de cinco espacios donde se colocan ordenadamente los objetos. El alumnado aprende a visualizar los números en relación al 5 o al 10. Este mismo material sirve para practicar las sumas con la técnica de descomponer uno de los números para completar a diez el otro. Es decir, sumar pasando por la decena.



**Figura 5.** Diversos tipos de cartas en la fila superior y *Ten Frame* en la fila inferior

### Tabla 7

#### Actividades con las cartas

3-6	Identificación de cantidades, contar, relacionar número y cantidad, comparar cantidades, etc. “La casa de los números”: se reparte una carta con un número distinto de objetos a cada niño y tienen que conseguir juntarse con otros niños para conseguir el número propuesto para poder entrar juntos a la casa. Cartas de subitización hasta el 9.
6-8	Cartas de subitización hasta el 10 y verbalización de las estrategias que han utilizado para ver el número sin contarlo. <i>Ten Frame</i> o cajita del 10. Cuando el resultado es superior a 10 se descompone uno de los números para completar hasta diez el otro. P. ej., Por ejemplo, para realizar la suma $6+8$ colocamos 6 fichas amarillas en la primera cajita del 10 y 8 de rojas en la otra. Una estrategia para resolver la suma es completar el primer diez. Pasamos 4 fichas rojas a los 4 espacios libres y la suma nos queda simplificada en $10+4=14$ . También podríamos haber descompuesto el 6 para completar el 8.
8-10	Actividades con cartas de subitización para practicar el pensamiento multiplicativo. Es decir, proponer distribuciones de puntos que favorezcan ver el número de puntos agrupados como una multiplicación (filas y columnas) y para reforzar el uso de la propiedad distributiva. La verbalización de las estrategias será muy importante para ayudar a calcular de manera rápida. Subitización de cartas hasta el 10 cambiando el valor de los puntos. Si imaginamos que cada bola vale 100 o 1000, ¿qué valor representa la carta?

10-12

Actividades con cartas de subitización con representaciones de fracciones decimales. Verbalización de la fracción que representa, el número decimal correspondiente o el porcentaje equivalente.

Visualización de un rectángulo de puntos y verbalizar las distintas estrategias que podemos utilizar para calcular: p. ej., si tenemos un rectángulo de  $8 \times 4$  podemos utilizar la propiedad distributiva de muchas maneras dependiendo de los grupos que hagamos  $(8 \times 2) + (8 \times 2)$ ;  $(4 \times 4) + (4 \times 4)$ ;  $(5 \times 4) + (3 \times 4)$ ... y comprobar que todos los resultados son iguales.

Realización de la misma actividad con un factor superior a 10.

**Material alternativo:** elaboración de las cartas necesarias con dibujos o gomets. Dibujo del *Ten Frame* o caja del 10 en papel.

**6. Ábaco y cartones numéricos:** existen muchas variedades de ábacos, pero todos ellos están formados por barras, fijadas a una base, que representan las unidades, decenas, centenas, unidades de mil, etc. En cada una de las barras se colocan las bolas necesarias para representar un número concreto (primera imagen de la Figura 6). Se trata de una manera organizada, pero abstracta, de representar los números, por lo que se recomienda utilizarlo sólo cuando ya se ha adquirido la noción de cantidad.

Permite experimentar el valor de los números dependiendo de su posición y de la relación que se establece con cada orden de unidades, junto con comprender las operaciones de números naturales y visualizar el algoritmo que se utiliza en su resolución.

Para concretar la idea abstracta de los ábacos, se recomienda complementarlos con los cartones numéricos, también conocidos como los cartones Montessori. Son cartones de distintos tamaños para representar proporcionalmente las unidades, decenas, centenas, etc. (segunda imagen de la Figura 6): cuando se representa un número, se escogen los cartones necesarios de cada orden de unidades y se sobreponen, de manera que las unidades tapan el 0 de las decenas y las decenas tapan el de las centenas. Mirando la composición sólo se ve la escritura del número, p. ej., 1547: se puede leer el número y observar que está compuesto por 1 unidad de mil, 5 centenas, 4 decenas y 7 unidades; sin embargo, cuando se descompone se visualiza que el 1 por su posición en realidad es el 1000, el 5 un 500, el 4 un 40 y el 7 representa las unidades.

Utilizar paralelamente los dos materiales ayuda a comprender el Sistema Numérico Decimal y facilitar el paso a la abstracción.

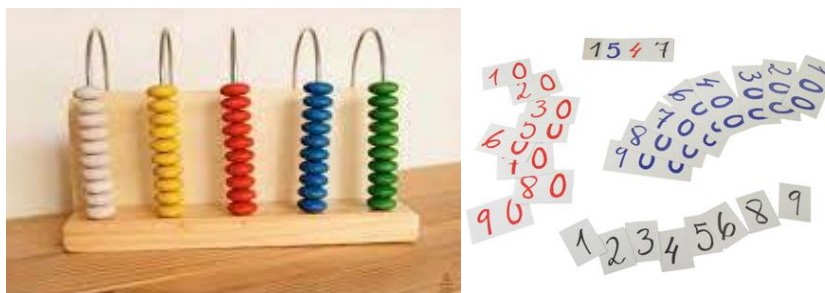


Figura 6. Ábaco y cartones numéricos

Tabla 8

Actividades con el ábaco y cartones numéricos

3-6	Sin propuestas.
6-8	<p>Representación de los números de dos y tres cifras en el ábaco y correspondencia con su valor real a través de los cartones numéricos.</p> <p>Comprensión de que cada diez elementos de la unidad inmediatamente inferior, corresponde a una de la orden siguiente.</p> <p>Construcción y lectura de números.</p> <p>Análisis del valor real que representa una cifra concreta de un número.</p> <p>Composición y descomposición de números.</p> <p>Ordenación y comparación de números.</p> <p>Situación de números en la recta numérica.</p> <p>Visualización del número anterior y posterior.</p> <p>Descubrimiento de estrategias de cálculo.</p> <p>Agrupación de números del mismo orden para agilizar los cálculos mentales.</p> <p>Realización de sumas y restas.</p>
8-10	<p>Composición y descomposición de números.</p> <p>Comparación y aproximación de números de más de 4 cifras.</p> <p>Visualización de series de 10 en 10, o de 100 en 100.</p> <p>Aproximación de números a las decenas, centenas y unidades de mil.</p> <p>Análisis de lo que representan las cifras del 0 en un número concreto.</p> <p>Cálculo del doble o la mitad de un número.</p> <p>Resolución de sumas y restas utilizando dos ábacos.</p> <p>Visualización de problemas concretos.</p>

10-12

Análisis del significado de multiplicar un número por 10. Esta operación significa convertir las unidades en decenas y las decenas en centenas.

Comprensión del significado de multiplicar un número por 100. Si queremos aumentar el número 100 veces significa que tenemos que trasladar cada unidad a la barra de las centenas y las decenas a la de mil.

Aplicación de estos descubrimientos a los cálculos del Sistema Métrico Decimal.

Resolución visual de problemas tipo: "Con cuatro números concretos, ¿cuál es el mayor número que podemos construir? Buscar todas las posibilidades y ordenarlos de mayor a menor".

Realización de multiplicaciones con dos ábacos para visualizar la descomposición  $24 \times 12 = (24 \times 10) + (24 \times 2)$

Utilización del ábaco para introducir otras bases numéricas.

**Material alternativo:** se puede construir con cajas y bolas: cada 10 bolas se cambian por una de orden superior. Los cartones numéricos se pueden construir de manera manual.

**7. La recta numérica:** es un material indispensable para visualizar, organizar y conectar los números que se van trabajando y, al mismo tiempo, permite entender el significado de las operaciones y aprender a realizarlas mentalmente. Se pueden utilizar muchos tipos de rectas numéricas, tanto por los números que representan como por su concreción numérica: incluyen todos los números, sólo marcan las decenas justas, visualizan la grafía y la cantidad, ejemplifican con material, etc. Todas tienen un objetivo concreto, pero se recomienda tener en cada clase una recta numérica sencilla, consistente en una sola línea recta y 10 líneas divisorias marcadas: en la recta hay unos puntos que el alumnado tiene que descubrir y referenciar: el valor de los extremos, el valor de cada línea divisoria y el punto medio de cada división (Figura 7). En cada curso se puede complementar con cartones numéricos de los números trabajados para ir construyendo e interiorizando los conceptos con estos valores concretos.

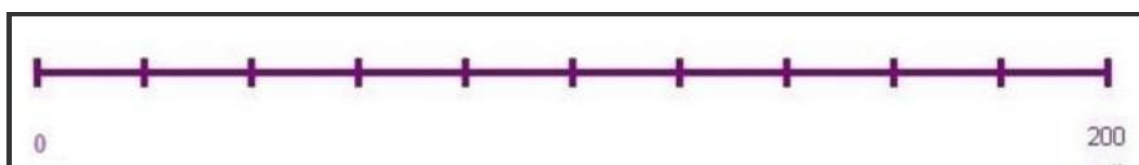


Figura 7. Ejemplo de recta numérica

Tabla 9



Actividades com la recta numérica

<b>3-6</b>	<p>Actividades para crear la necesidad de pasar de la cantidad a la ordenación.                  Construcción progresiva de la recta numérica del 0 al 10 para visualizar los números en la clase.                  Colocación de números en el sitio que les corresponde.                  Construcción de rectas numéricas con material que representen la cantidad.                  Verbalización de la recta numérica en sentido ascendente y descendente.                  Experimentación de la recta numérica: cada niño o niña tiene un número escrito o una pieza de Numicon o el número realizado con policubos y tiene que colocarse en el lugar que crea correcto y verbalizar el porqué.                  Trabajo paralelo del collar de bolas con la recta numérica.                  Realización de desplazamientos sobre una recta numérica marcada en el suelo siguiendo consignas operativas.</p>
<b>6-8</b>	<p>Construcción colectiva de distintas rectas numéricas a medida que se descubren los números: Del 0 al 20, del 0 al 50, del 0 al 100, del 100 al 200, del 0 al 1000.                  Colocación de los números en el lugar que les corresponde y verbalización de la decena o centena a la que se aproximan más.                  Identificación de la posición de números concretos sobre una recta numérica realizada con regletas del 10 u otro tipo de materiales.                  Construcción de una recta numérica individual realizada doblando una tira de papel para conseguir las divisiones y deducción posterior del valor de los extremos, de cada división.                  Realización de distintas actividades con la recta numérica individual: doblarla por un número concreto para descubrir su doble, contar de 20 en 20, etc.                  Realización de sumas sobre una recta numérica sin divisiones: p. ej., en la suma <math>45+24</math>, primero se marca el primer sumando (45) y se realizan los saltos correspondientes del segundo (uno de 20 y otro de 4) para conseguir el resultado final (69).                  Realización de restas sobre la recta numérica utilizando el mismo proceso: se pueden marcar los saltos hacia la izquierda para restar “quitando” o hacia la derecha para realizarlas con el método “para llegar a”</p>
<b>8-10</b>	<p>Construcción de una recta numérica para la clase y/o individual con los números del 0 al 1000, del 0 al 10.000, etc.                  Colocación de los números en el lugar que les corresponde, variando el valor de los extremos o de las divisiones.                  Estimaciones y verbalización de la centena o unidad de mil a la que se aproximan más.                  Identificación de números concretos sobre una recta numérica donde solo están marcados los extremos y el punto medio.                  Trabajo simultáneo de rectas numéricas horizontales y verticales                  Visualización del valor de cada número y la relación entre ellos construyendo una recta numérica con los cubos de 1000 del material multibase o con cajas de la misma forma.                  Escritura de números posibles entre dos divisiones de la recta anterior.                  Colocación de números concretos al lugar que les corresponde.                  Realización de sumas y restas.                  Visualización del significado de multiplicar sobre la recta numérica realizando saltos iguales.                  Colocación de las monedas y billetes vigentes sobre la recta numérica. Análisis de como quedan situadas.                  Construcción de la recta numérica de su vida señalando los hechos más relevantes.</p>

10-12

Construcción de una recta numérica para la clase y/o individual con los números del 0 al 1000000 y del 0 al 1.

Colocación de los números en el lugar que les corresponde y verbalización del número al que se aproximan más.

Representación sobre la misma recta numérica de equivalencias entre fracciones, decimales y porcentajes para descubrir las relaciones entre ellos.

Aplicación de los descubrimientos anteriores para mejorar las estrategias de cálculo: p. ej., la multiplicación  $40 \times 0.5$  se puede realizar más fácilmente haciendo la mitad de 40.

Representación sobre la recta numérica del valor de los precios de algunos productos de un catálogo de supermercado. Análisis de donde se acumulan más precios.

Práctica del efecto *zoom* entre dos números (decimales o naturales de más de 5 cifras) representados en una recta numérica para ampliar el espacio entre ellos y concretar mejor su posición y los números que podemos encontrar entre ellos.

Colocación de recipientes sobre una recta numérica para visualizar el valor numérico de sus capacidades.

Construcción de rectas numéricas que hagan referencia a hechos históricos, científicos o familiares.

**Material alternativo:** la recta numérica se puede construir fácilmente con papel y números impresos.

**8. Panel numérico:** es una cuadrícula de 10x10 que permite trabajar la numeración, las unidades y decenas, el número anterior y posterior, contar de diez en diez, entender la estructura numérica, descubrir patrones, realizar operaciones, etc. El más funcional es el que se puede colgar en la clase para trabajar de manera colectiva o individual: es un tablero con bolsas de plástico transparentes para colocar tarjetas numeradas del 0 al 100, impresas a doble cara con dos colores distintos para visualizar los cambios que se realizan (Figura 8).

La manera de organizar los números puede variar dependiendo de la habilidad matemática que queramos trabajar: se pueden organizar empezando por el 0 de manera que las decenas exactas sean las primeras de cada fila y los números acabados en 9 sean los últimos; sin embargo, empezar la tabla por el número 1 de manera que las decenas exactas sean los últimos números de cada fila facilita el cálculo de sumas y restas.



Figura 8. Ejemplo de panel numérico

**Tabla 10**

Actividades con el panel numérico

<b>3-6</b>	<p>No es un material imprescindible, ya que prioritariamente se trabajan en profundidad los números hasta el 9 para adquirir una buena noción de cantidad. De todas maneras, en situaciones diversas pueden aparecer números mayores y podemos utilizar el panel numérico para visualizarlos.</p>
<b>6-8</b>	<p>Construcción del panel numérico entre todos e identificación de la relación numérica que tienen entre ellos (+/-1; +10/-10,...).</p> <p>Actividades de lectura de números, encontrar los números que faltan, buscar el anterior y el posterior, etc.</p> <p>Series de 10 en 10, de 5 en 5,... y descubrir relaciones numéricas y geométricas.</p> <p>Identificación de un número siguiendo las pistas.</p> <p>Deducción, sin observar el panel, del cuadrante del panel donde está situado un número concreto.</p> <p>Suma sobre el panel numérico. P. ej., 37+42: se marca el 37 con una ficha, se bajan 4 filas para sumar 40 y se desplazan 2 a la derecha. El resultado es 79.</p> <p>Resta sobre el panel numérico. P. ej., 56-34: se marca el 56 con una ficha, se suben 3 filas para restar 30 y se desplazan 4 casillas a la izquierda. El resultado es 22.</p>
<b>8-10</b>	<p>Dado un fragmento del panel numérico, deducción de los números marcados.</p> <p>Realización de dibujos pintando los números dictados con consignas diversas.</p> <p>Realización de series numéricas siguiendo consignas concretas.</p> <p>Adivinanzas con pistas numéricas.</p> <p>Valoración del recorrido de un camino marcado en el panel numérico (diferencia entre el primer número y el segundo). Buscar otros caminos que tengan el mismo valor.</p> <p>Realización de sumas y restas.</p> <p>Visualización de las tablas de multiplicar: relación entre los números, distribución en el panel, patrones, etc.</p>

10-12

Investigación de propiedades en el panel numérico: valor de las diagonales; si se cambia el orden de los números qué se mantiene y qué cambia; números cuadrados; etc.  
 Actividades de práctica productiva en un panel escrito: se plantea un reto numérico y dependiendo de los pasos hechos para llegar al resultado se pintan los números de distintos colores. El objetivo final es buscar regularidades y patrones.  
 Trabajo de múltiplos de un número y construcción de la criba de Eratóstenes.  
 Identificación de patrones con los movimientos de las piezas del ajedrez.  
 Construcción de la tabla pitagórica.

**Material alternativo:** construir un cuadro numérico de los números impresos.

**9. Diagrama de Freudenthal, fracciones con torres de equivalencias y discos de fracciones:** existe una gran variedad de materiales para visualizar y comprender las fracciones, pero se pueden sintetizar en dos tipos: los que representan las fracciones linealmente (diagrama de Freudenthal y fracciones en torres de equivalencia) y las que representan la unidad con una figura geométrica (círculos de fracciones y fracciones de un cuadrado).

El diagrama de Freudenthal está compuesto por 51 piezas que representan la unidad entera y la unidad dividida en medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, octavos, décimos y doceavos. Las piezas tienen colores diferentes y tiene escrito en una cara el número fraccionario al que representa (primera imagen de la Figura 9); las torres de fracciones de equivalencia constan de las mismas piezas de la tira de Freudenthal pero en forma de prisma. La diferencia radica en que son piezas encajables y que en las distintas caras de cada prisma hay escrito el valor en fracciones, números decimales y porcentajes (segunda imagen de la Figura 9); y en los discos de colores, la unidad es un círculo y sus múltiples fracciones en distintos colores (hasta  $1/24$ ) y los cuadrados de fracciones muestran un cuadrado como unidad (tercera imagen de la Figura 9).

Estos materiales son complementarios, pero todos tienen el mismo objetivo: manipular las distintas fracciones para descubrir su significado, equivalencias, ordenarlas, realizar sumas y restas y otras operaciones de manera que pueden visualizar y comprobar sus hipótesis.



**Figura 9.** Diagrama de Freudenthal, torre de fracciones y discos de fracciones

**Tabla 11**

Actividades con el Diagrama de Freudenthal, torre de fracciones y discos de fracciones

---

**3-6** Sin propuestas para estos niveles

---

**6-8** Visualización, con los círculos de fracciones, de problemas en los que interviene el concepto de fracción: “Si tengo 4 medias manzanas, ¿cuántas manzanas representan?” o viceversa.

---

**8-10** Verbalización de lo que representa cada fracción respecto a la unidad.  
 Ordenación de las fracciones de mayor a menor.  
 Identificación de equivalencias entre fracciones.  
 Construcción de la unidad utilizando diferentes fracciones.  
 Verbalización de lo que representa el numerador y el denominador.  
 Representación de fracciones mayores que la unidad.  
 Resolución manipulativa de problemas de fracciones.

---

10-12

Consolidación de las actividades propuestas de las edades previas.  
 Construcción de fracciones con distinto denominador.  
 Comprobación de las piezas necesarias para construir otra fracción:  $\frac{1}{2}$  es equivalente a dos  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{4}{8}$ .  
 Comparación de fracciones.  
 Ordenación de fracciones y representación gráfica de las mismas.  
 Comunicación verbal de lo que han aprendido.  
 Representación de fracciones modificando sólo el numerador o sólo el denominador.  
 Identificación de patrones.  
 Relación de equivalencia entre las piezas de los círculos de fracción y las del diagrama de Freudenthal: representan la misma fracción, pero se refieren a unidades distintas.  
 Dibujo de una recta numérica que mida la unidad: sobre la misma línea se van marcando todas las piezas del diagrama de Freudenthal indicando su valor ( $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,...). De esta manera, el alumnado aprecia de manera directa el orden de las distintas fracciones y sus equivalencias.  
 Construcción de una recta numérica relacionando las fracciones y los números decimales.  
 Repartición de fichas sobre las distintas fracciones del mismo denominador para calcular lo que representa una fracción de un número. P. ej.,  $\frac{2}{5}$  de 25: se reparten 25 fichas equitativamente encima de cada uno de los quintos y al final se visualiza que sobre dos quintos hay 10 fichas.  
 Realización de la actividad inversa: ¿Qué número es que su quinta parte es 5?

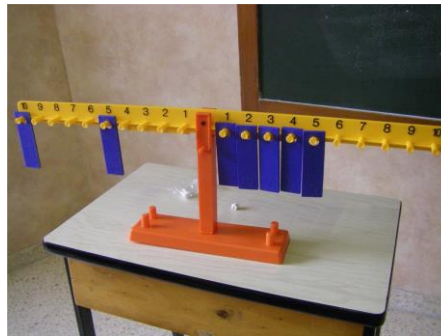
**Material alternativo:** se puede construir fácilmente este material en cartón o goma EVA.

**10. Máquinas de calcular:** este tipo de material, que puede presentarse de diversas formas como las que se muestran en la Figura 10 (tubos que convergen; distintos departamentos que se unen; etc.) ayudan a descubrir qué significan los sumandos, cómo interactúan entre ellos, cual es el resultado de manera dinámica y comprensiva. Sin embargo, únicamente sirven para visualizar las operaciones propuestas porque en realidad el alumnado no realiza la suma, sino que introducen elementos y comprueban el resultado.



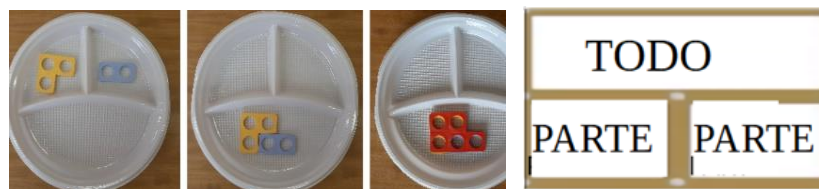
**Figura 10.** Diversas máquinas de calcular

Por esta razón, en otro estadio, deben ofrecerse otras máquinas en las que el alumnado tenga que realizar el cálculo, como las balanzas numéricas (Figura 11)



**Figura 11.** Balanza numérica

Posteriormente, se presentan las visualizaciones del todo y las partes (Figura 12). Este tipo de máquinas esquematizan que el todo se puede repartir, juntar, restar, dividir y visualizar el resultado. La finalidad de estas representaciones es entender que los elementos que forman los sumandos son los mismos que utilizamos para operar y obtener el resultado. Esta idea es básica para entender el significado de las operaciones y analizar si el resultado obtenido puede ser correcto.



**Figura 12.** Representaciones del todo y la parte

**Tabla 12**

Actividades con las máquinas de calcular

3-6

Experimentación con las máquinas de operar, visualización de los resultados y comunicación de lo que se ha realizado.  
Utilización de diferentes máquinas y mecanismos para entender el vocabulario “unir, juntar, quitar, retirar, partir, etc.”

---

6-8	Práctica de resolución de problemas con las máquinas de calcular. Resolución de operaciones con balanzas numéricas. Introducción del esquema del todo y las partes. Utilización básica de la calculadora: descubrir funcionamiento, realización de series, resolución de los triángulos aditivos, utilización en el rincón simbólico del supermercado, resolución de operaciones inversas, realización de problemas, etc.
8-10	Utilización simbólica del esquema del todo y las partes. Práctica de multiplicaciones y divisiones con la balanza numérica. Descubrir las tablas de multiplicar con la calculadora: programarla para contar de dos en dos, cuatro en cuatro, diez en diez, etc. Uso de la calculadora para realizar el tres en raya en el que se tienen que escoger multiplicaciones para poder tapar un número concreto. Resolución de problemas. Identificación de distintos símbolos para reproducir las acciones realizadas con las máquinas: flechas, saltos, signos diversos, etc.
10-12	Investigaciones con la calculadora para relacionar los números fraccionarios y los decimales. Comprobaciones con la calculadora de que si se multiplica un número por 0.5, 0.25..., el resultado es más pequeño que el inicial; y si se divide por los mismos números el resultado es mayor.

---

**Material alternativo:** construir las máquinas con material reciclado. Realizar el esquema del todo y las partes sobre papel.

---

## CONSIDERACIONES FINALES

La presencia de conocimientos numéricos en el currículo de infantil y primaria es indiscutible ya que el número es, por decirlo de alguna forma, la piedra angular a partir de la que se organizan las matemáticas (Alsina, 2019): el álgebra elemental, por ejemplo, se centra en las relaciones entre cantidades, además de otros aspectos; en geometría, los números se necesitan entre otras muchas cosas para clasificar las figuras geométricas según la cantidad de lados; en medida, los números son imprescindibles para comparar una cantidad con otra de la misma naturaleza que se toma como unidad; y la estadística junto con la probabilidad conllevan dar sentido a los números.

Considerando la relevancia del número, en la primera parte de este artículo se han expuesto los conocimientos importantes y las grandes ideas asociadas a la



numeración y el cálculo en las primeras etapas escolares (Alsina, 2019, 2022; Burgués y Serra, 2019; Torra y Roca, 2019); y, en la segunda parte, se han descrito diez recursos manipulativos esenciales que contribuyen a desarrollar el sentido numérico de los 3 a los 12 años, a partir de criterios de contenido, de finalidades didácticas y de tipo de material: 1) Collar de bolas; 2) Numicon; 3) Material multibase y policubos; 4) Regletas; 5) Cartas de contaje de elementos, subitización y Frame Ten; 6) Ábaco y cartones numéricos de descomposición; 7) Recta numérica; 8) Panel numérico; 9) Disco de fracciones, diagrama de Freudenthal y fracciones con torres de equivalencias; y 10) Máquinas de calcular. Adicionalmente, para cada recurso se han propuesto diversas actividades organizadas por niveles, con la finalidad de que el profesorado de infantil y primaria disponga de un amplio abanico de recursos y actividades para desarrollar el sentido numérico en estas etapas educativas.

Este propósito responde a la necesidad de dejar atrás prácticas de enseñanza de la numeración y el cálculo a partir de la repetición, la reproducción, la mecánica y la descontextualización, cuyo principal propósito es la ejercitación más que el uso comprensivo y eficaz del conocimiento numérico en todas las situaciones en las que es necesario. Por esta razón, la legislación educativa de múltiples países, entre ellos España, abogan por promover el sentido numérico: en el Real Decreto 157/2022, por ejemplo, se señala que “el sentido numérico se caracteriza por el desarrollo de destrezas y modos de pensar basados en la comprensión, la representación y el uso flexible de números y operaciones para, por ejemplo, orientar la toma de decisiones” (p. 93).

Con base en este planteamiento contemporáneo, es necesario que el profesorado disponga de un amplio abanico de conocimientos matemáticos y didácticos, en concordancia con lo que indican todos los modelos y caracterizaciones sobre los conocimientos que necesita el profesorado para enseñar matemáticas (i.e., Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018; Godino et al, 2017). Desde este punto de vista, tanto los conocimientos importantes y las ideas clave descritos como la exposición de los diez materiales esenciales y las correspondientes actividades organizadas por niveles

pueden ser un apoyo para que el profesorado de infantil y primaria promueva el desarrollo del sentido numérico del alumnado de 3 a 12 años de manera eficaz.

## REFERENCIAS

Almeida, R. (2017). Sentido numérico en futuros profesores de matemáticas y alumnado de secundaria (Tesis Doctoral). Universidad de la Laguna, Tenerife

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Graó.

Alsina, Á. (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática*, 3(2), 127-159. <https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018>

Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)*. Graó.

Alsina, Á., y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Narcea S.A. de Ediciones.

Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.  
<https://doi.org/10.1177/0022487108324554>

Burgués, C., y Serra, T. (2019). *Idees centrals de Matemàtiques (Primària)*. Recuperado de <https://sites.google.com/xtec.cat/idees-centrals-matematiques-ip/inici>.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán; M<sup>a</sup>.C. (2018). *The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education*, 20, 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>.

Charles, R. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics. *Journal of Mathematics Education Leadership*, 7, 9–24.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113.  
<http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas “Thales”.

Puig-Adam, P. (1955). Decálogo del profesor de matemáticas. *Gaceta Matemática*, 1ª serie, tomo VII, números 5 y 6.

Singapore Ministry of Education (2018). *2020 secondary mathematics syllabuses*. MOE.

Toh, T.L., y Yeo, J.B.W. (2019). *Big Ideas in Mathematics: Yearbook 2019*, Association of Mathematics Educators. WSPC

Torra, M., y Roca, M. (2019). *Idees centrals de Matemàtiques (Infantil)*. Recuperado de <https://sites.google.com/xtec.cat/idees-centrals-matematiques-ip/inici>.