Tangram
Revista de Educação Matemática

DOI:https://doi.org/10.30612/tangram.v5i2.15469

# El Teorema de Pitágoras en libros de texto escolares: una descripción desde la teoría antropológica de lo didáctico

## *O Teorema de Pitágoras nos livros didáticos: uma descrição a partir da teoria antropológica do didático*

*Pythagorean Theorem in school textbooks: a description from the anthropological theory of the didactic*

**Yesica Eugenia Torres**
EES N°5
Bragado, Argentina
Email:eugeniat@live.com.ar
Orcid:https://orcid.org/0000-0001-9756-2736

**Verónica Parra**
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT).
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA).
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
Tandil, Argentina
Email: vparra@niecyt.exa.unicen.edu.ar
Orcid:https://orcid.org/0000-0002-6956-0052

**Resumen:** Este trabajo utiliza como referente teórico la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2017). Se identifican los componentes (tareas, técnicas, tecnologías y teorías) de las organizaciones matemáticas (OM) relativas al Teorema de Pitágoras, reconstruidas a partir de un conjunto de 34 libros escolares, destinados al nivel secundario. Además, se infiere su grado de completitud a partir del conjunto de indicadores formulados por Fonseca (2004). Se identifican 201 tareas agrupadas en 11 tipo de tareas y en 5 géneros de tareas. Se concluye en la caracterización de OM centradas en el bloque práctico-técnico, sesgadas al cálculo como consecuencia de la preponderancia del género de tareas “Calcular”, con predominio de dos tipos de tareas: “Calcular el valor de la hipotenusa, diagonal, lado/s” y “Calcular el valor del área y del perímetro”. Se concluye además que estas OM poseen un bajo grado de completitud.

**Palabras- chave:** Organizaciones matemáticas. Teorema de Pitágoras. Libros escolares.

**Abstract:** The anthropological theory of the didactic (TAD) (Chevallard, 1999, 2017) is the theoretical framework of this work. We identified components of mathematical organizations (OM) about the Pythagorean Theorem (tasks, techniques, technologies and theories). The OM reconstructed from a set of 34 school books, for to the secondary level. We analyze their degree of completeness from set of indicators formulated by Fonseca (2004). We identified 201 tasks grouped into 11 types of tasks and 5 genres of tasks. We conclude in the OM centered on the practical-technical block, biased to the calculation as a consequence of the preponderance of the gender of tasks “Calculate”, with predominance of two types of tasks: “Calculate the value of the hypotenuse, diagonal, side/s” and “Calculate area and perimeter value”. It is further concluded that these OM have a low degree of completeness.

**Keywords**: Mathematical organizations. Pythagorean theorem. School books.

**Resumo:** Este trabalho utiliza como referência teórica a teoria antropológica do didático (TAD) (Chevallard, 1999, 2017). Identificam-se os componentes (tarefas, técnicas, tecnologias e teorias) das organizações matemáticas (OM) relativas ao Teorema de Pitágoras, reconstruídas a partir de um conjunto de 34 livros escolares, destinados ao nível secundário. Além disso, o seu grau de completude resulta do conjunto de indicadores formulados por Fonseca (2004). São identificadas 201 tarefas agrupadas em 11 tipos de tarefas e em 5 gêneros de tarefas. Conclui-se na caracterização de OM centradas no bloco prático-técnico, enviesadas ao cálculo como consequência da preponderância do gênero de tarefas “Calcular”, com predominância de dois tipos de tarefas: “Calcular o valor da hipotenusa, diagonal, lado/s” e “Calcular o valor da área e do perímetro”. Conclui-se ainda que estas OM possuem um baixo grau de completude.

**Palavras-chave**: Organizações matemáticas. Teorema de Pitágoras. Livros escolares

Recebido em:
30/11/2021

Aceito em:
29/03/2022

## INTRODUCCIÓN

Este trabajo es parte de una tesis de grado impulsada (Torres, 2020) por la dificultad que reviste el estudio de la Matemática y en particular, el estudio del teorema de Pitágoras en el nivel secundario (Vargas-Vargas y Gamboa-Araya, 2013; Duque-Gómez, 2013; Echavarría y Bermúdez, 2011). Dificultades que, de acuerdo a los distintos marcos teóricos, se describen de formas diferentes. Por ejemplo, considerando la teoría antropológica de lo didáctico (TAD; Chevallard, 1999, 2017) – referente teórico de nuestro trabajo – estas dificultades se formulan y describen en términos de una serie de fenómenos, emergentes del sistema educativo como, por ejemplo, el denominado alegóricamente por “autismo temático”. Este fenómeno es utilizado para describir la pérdida de sentido y de las razones de ser de las praxeologías que se estudian en las instituciones escolares, su desconexión e incompletitud. Según Chevallard (2001), para que una cuestión matemática se estudie en una institución escolar debe recorrer una jerarquía de niveles que comienza en la humanidad, continúa por la civilización, la sociedad, la escuela, la pedagogía y luego, los denominados niveles más específicos, propios del ámbito de la matemática. Dentro de estos últimos, se consideran el nivel de la cuestión en sí misma y del tema a estudiar, entre otros. Y es aquí, donde desde la TAD se define y describe el fenómeno del “autismo temático”. Se observa un “abandono”, involuntario, por parte del profesor, de los niveles superiores de organización, desde el de la sociedad y la escuela hasta incluso el de los sectores, lo que provoca un retraimiento de su acción sobre el nivel de los temas. No hay que olvidar que existe asimismo una especie de autismo disciplinar (Chevallard, 2001) que se manifiesta en que una cuestión de una disciplina no podría ser estudiada en otra. Esto suele advertirse en expresiones del tipo, por ejemplo, “este tema es de Geografía, no de Matemática”. Gascón (2003) prefiere referirse a “autismo temático de la institución” y no del profesor. Alude a que el profesor está sujeto a este fenómeno y que sólo puede incidir localmente y en un grado relativamente insignificante. Finalmente, Parra y Otero (2009) proponen referir a “encierro evaluativo”, detectado en un estudio de casos donde tanto los docentes como los estudiantes centraban el proceso de estudio en las cuestiones probables de incluirse en los exámenes.

El “autismo”, en cualquiera de sus consideraciones, debe ser interpretado, por tanto, como:

> […] un fenómeno que condiciona el conjunto de las cuestiones matemáticas que pueden ser estudiadas en las instituciones escolares y, las posibles

> formas de organizar el estudio de dichas cuestiones. Es un fenómeno que afecta a la institución escolar en su conjunto y no sólo a los sujetos que la conforman. Su creciente y negativa incidencia sobre el problema del currículo se materializa en la desaparición, no sólo de las razones de ser de las OM enseñadas, sino incluso de ciertos sectores, como la geometría analítica y hasta de áreas completas de la matemática, como la propia geometría (Gascón, 2003, p.9).

También se materializa en la transparencia de las disciplinas en general y de la matemática en particular. Esta "transparencia" consiste en considerar a la matemática por sí y para sí misma, como si no fuese necesario justificarla ni mostrar su utilidad. Esta transparencia se corresponde al carácter rígido, desconecto y poco articulado de las organizaciones matemáticas (Fonseca, 2004; Fonseca, Bosch y Gascón, 2010). Fonseca, Bosch y Gascón (2010) han mostrado que las OM que se estudian en Secundaria son puntuales (centradas en un único tipo de tareas), rígidas y poco articuladas entre sí.

Siguiendo en el marco de la TAD, otro de los fenómenos didácticos descriptos por este enfoque es el denominado, metafóricamente por Chevallard (2005) como "monumentalización del saber": en una enseñanza monumental, la actividad matemática del alumno se describe a partir de una analogía con la visita a un museo. Los estudiantes son los visitantes y el profesor, el guía de esa visita. Allí, los alumnos sólo transitan por el museo admirando los monumentos que el guía les presenta y explica. En esa visita, sólo pueden admirar y venerar las obras sin fotografiarlas y menos aún, manipularlas. En el aula, esto se traduce en que el alumno sólo puede reproducir la obra que le es presentada por el profesor. Se genera así un proceso de estudio donde sólo se hace un inventario de los saberes a estudiar, con raras y hasta ausentes conexiones entre ellas. Otra consecuencia de la monumentalización es la instalación de un proceso sistemático y arraigado de eliminación de preguntas, preguntas que han sido, en algún momento, el origen de esos saberes, y que son sustituidas por la enseñanza, mecánica, de respuestas (Chevallard, 2005). Esto impacta directamente en la formulación de los programas de estudio:

> Aunque el hecho de que en la escuela se enseñe el Teorema de Pitágoras y no la elasticidad es el resultado de decisiones humanas; la forma concreta como aparece el Teorema de Pitágoras en el currículo actual es, a su vez, una consecuencia de las leyes que rigen el desarrollo interno del currículo de matemáticas. Resulta así que el currículo de matemática no es arbitrario, como tampoco lo es la manera en que se transforma la matemática en el seno de una institución escolar. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 117)

Cada uno de los fenómenos antes descriptos condicionan no sólo lo que es posible estudiar en el aula sino también la manera de realizar este estudio y conducen a un cuestionamiento en torno a cuál debería ser el equipamiento praxeológico útil (y necesario) del que deben disponer los profesores de matemática del nivel secundario (Bosch y Gascón, 2009). Este equipamiento, tal como su nombre lo indica, se compone de praxeologías que, junto a otra serie de recursos, le permiten al profesor diseñar y gestionar sus clases. Entre los recursos utilizados por los profesores, el libro de texto escolar o manuales escolares es uno de los muy frecuentemente utilizados. Resulta fundamental entonces analizar ese tipo de recurso particular (Garcia de Melo y Fabiani Marcatto, 2020; Sturion y Amaral-Schio, 2019; Quiroz Rivera y Rodríguez Gallegos, 2015; Marmolejo Avenia y González Astudillo, 2013; Occelli y Valeiras, 2013; González Astudillo y Sierra Vázquez, 2004).

En este trabajo, nos centramos en el Teorema de Pitágoras en el nivel secundario, enfocándonos en las praxeologías propuestas para enseñar reconstruidas a partir de un conjunto de 34 libros de texto destinados al nivel escolar medio. Resulta importante desarrollar este análisis no sólo para describir las praxeologías, sino también porque muchos docentes, como ya lo mencionamos, utilizan los libros como uno de sus recursos principales, y en algunas ocasiones, el único, para el desarrollo de las clases en el aula y para la preparación fuera de ellas. Nuestro trabajo se trata entonces de una investigación cuyo objetivo es identificar y describir los componentes (tareas, técnicas, tecnologías y teorías) de las praxeologías propuestas para enseñar en ese conjunto de libros de texto. Se propone también concluir sobre el nivel de estas OM, tratando de delimitar si se tratan de puntuales, locales, regionales o globales e inferir su grado de completitud.

## MARCO CONCEPTUAL: LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO (TAD)

Este trabajo adopta como referencial teórico la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2005, 2017); teoría que sitúa la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio en matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales (Chevallard, 1999, p.1). El postulado base de la TAD admite que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume con la palabra de praxeología (Ibid., p1). Esta palabra proviene de la unión de los términos “praxis” y “logos”. El primero, remite a la práctica que se realiza, la praxis o saber-hacer, es decir, los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen y utilizan para abordarlos. El segundo, recoge la parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad, que se denomina logos o, simplemente, saber. Incluye las descripciones y explicaciones que se elaboran para validar las técnicas, esto es, el discurso tecnológico y la teoría que permite fundamentar las descripciones y demostraciones tecnológicas. Tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías son las cuatro categorías de elementos que componen una organización o praxeología. En el marco de la TAD, “hacer matemáticas” consiste entonces en poner en práctica una praxeología matemática para realizar un determinado tipo de tareas y “estudiar matemáticas” consiste en construir o reconstruir determinados elementos de una praxeología matemática para dar respuesta a una determinada cuestión problemática.

## Componentes de las praxeologías

Describiremos a continuación, los componentes de una praxeología: tareas, tipos de tareas y géneros de tareas; técnicas; tecnologías y teorías.

*Tareas*: una tarea supone un objeto relativamente preciso (Chevallard, 1999). Se entiende por tarea un problema, un ejercicio, una actividad, una pregunta, etc. Es un objeto – en el sentido de la TAD – al que se debe buscar una manera de hacer. En la mayoría de los casos, una tarea (y el tipo de tareas asociado) se expresa por un verbo: dividir el entero 10 por el entero 5; integrar la función ln(x) entre x = 1 y x = 2 (Chevallard, 1999); calcular el límite de la función f(x) = x + 1 cuando x tiende a 3.

*Tipos de tareas*: un tipo de tareas es un grupo de tareas cuya manera de hacer es compartida. Es decir, una misma técnica permite resolver las tareas de ese tipo. Al igual que las tareas, los tipos de tareas, suponen también un objeto relativamente preciso. Algunos ejemplos teniendo en cuenta lo expresado en las tareas serían: dividir un entero por otro; integrar una función real entre x = a y x = b, siendo a y b números reales; calcular el límite de la función real f(x) cuando x tiende a un valor finito.

*Géneros de tareas*: análogamente al agrupamiento de tareas en tipos de tareas, diremos que los tipos de tareas se asocian formando géneros de tareas. Concretamente un género de tareas no existe más que bajo la forma de tipos de tareas, cuyo contenido está especificado (Chevallard, 1999). Por ejemplo: calcular; subir; etc. es lo que se llamará un género de tareas y generalmente se denotan utilizando verbos.

*Técnicas*: una tarea requiere, al menos en principio, de una manera de realizarla, una determinada manera de hacer, es decir, requiere una forma de resolverla. Una técnica no necesariamente es de naturaleza algorítmica o casi algorítmica. Las técnicas son relativas, esto significa que una técnica tiene éxito sobre algunas tareas y no sobre otras. Esto es lo que se denomina “alcance de la técnica” (Chevallard, 1999). Esto conduce a ampliar las técnicas de manera tal que permitan resolver tareas de un mismo tipo o bien, modificar e incluso reemplazar las técnicas. Una praxeología relativa a un tipo de tareas T contiene pues, en principio, una técnica τ relativa a T. contiene así un “bloque” designado por [T/ τ], que se denomina bloque práctico-técnico y que se identificará genéricamente con lo que se denomina un saber-hacer. En una institución dada, y alrededor de un tipo de tareas específico, existe al menos una técnica, o al menos un pequeño número de técnicas institucionalmente reconocidas, con la exclusión de técnicas alternativas posibles (Chevallard, 1999).

*Tecnologías*: se entiende por tecnología, y se indica generalmente por θ, un discurso racional – el logos- sobre la técnica –. Es un discurso cuyo primer objetivo es justificar “racionalmente” la técnica para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo T, es decir, realizar lo que se pretende. Cualquiera que sea el tipo de tareas T, en una determinada Institución, la técnica τ relativa a T está siempre acompañada de al menos un embrión de tecnología θ. En numerosos casos, incluso, algunos elementos tecnológicos están integrados en la técnica (Chevallard, 1999). Una segunda función de la tecnología es la de explicar, de validar, de aclarar la técnica. Una tercera función corresponde a un empleo más actual del término de tecnología: la función de producción de técnicas (Chevallard, 1999).

*Teorías*: la teoría, Θ, ocupa es el análogo a la tecnología de la técnica. Es decir, es la justificación, validación, explicación, producción de tecnologías (Chevallard, 1999).

## Praxeologías puntuales, locales, regionales y globales

Se pueden distinguir cuatro niveles de praxeologías (Chevallard, 1999; Bosch, Espinoza, Gascón, 2003): *praxeologías puntuales*: son aquellas que se construyen alrededor de un único tipo de tareas teniendo una técnica común; *praxeologías locales*: están formadas por la articulación de las organizaciones matemáticas puntuales entorno a un discurso tecnológico común, es decir, teniendo una tecnología común a las técnicas; *praxeologías regionales*: están formadas por la articulación de organizaciones matemáticas locales alrededor de una teoría común, es decir, una teoría común a cada una de las tecnologías y; *praxeologías globales*: son producto de la agregación de organizaciones regionales, sería una teoría de las teorías. (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003). Es importante mencionar que esta "clasificación" es relativa. Una praxeología puede ser, por ejemplo, local en una institución, pero puntual en otra.

## Indicadores del grado de completitud de una OM local

Fonseca (2004) y Fonseca, Bosch y Gascón (2010) proponen dos tipos de conjuntos de indicadores del grado de completitud de una OM local. Uno de esos conjuntos corresponde al proceso de estudio a través del cual se reconstruirá esa OM. Intervienen en este caso, los momentos del estudio (Chevallard, 1999). El segundo tipo de conjunto de indicadores corresponde a la OM ya construida, haciendo abstracción, tal como lo plantea Fonseca (2004, p.11) del proceso de estudio. En este trabajo utilizaremos este segundo conjunto de indicadores pues no se ha analizado ningún proceso de construcción de una OM, sino que se analizan OM (finalizadas) reconstruidas a partir de un conjunto de libros de texto. Por lo tanto, detallaremos esta segunda formulación tal como la presenta Fonseca (2004) y Fonseca, Bosch y Gascón (2010, p.12-13):

> OML1. Los tipos de tareas y técnicas aparecen "integrados" (en contraposición a "aislados" e independientes entre sí) y contienen tareas matemáticas relativas al cuestionamiento tecnológico, esto es, tareas cuya realización permitirá responder a cuestiones relativas a ciertas características de las técnicas matemáticas (dominio de validez, economía, justificación, interpretación de los resultados que se obtienen con ella, etcétera).
>
> OML2. Para cada uno de los tipos de tareas que forman parte de la OM local en cuestión, existen diversas técnicas matemáticas potencialmente útiles para llevar a cabo dichas tareas y en la propia OM local existen criterios operativos para elegir en cada caso la técnica más adecuada.
>
> OML3. Los objetos matemáticos (técnicas, tareas, nociones, teoremas, etc.) son relativamente independientes de los objetos materiales (ostensivos) que se utilizan en cada caso para representarlos materialmente. Esta característica de la OM local requiere que ésta contenga diversos objetos ostensivos (gráficos, verbales, gestuales, etc.) para representar un mismo objeto matemático.

OML4. Las tareas y las técnicas que forman parte de la OM local permiten “variaciones” de todo tipo, esto es, son relativamente “flexibles”. En particular, tanto las tareas como las técnicas puedan ser “invertidas” (no de manera única) para dar origen a nuevas tareas y nuevas técnicas que denominamos inversas de las anteriores.

OML5. La OM local en cuestión contiene tareas matemáticas cuya realización permite interpretar el funcionamiento de las técnicas matemáticas que se utilizan en dicha OM y, también, el resultado de aplicar dichas técnicas. Este indicador no se cumple en aquellas instituciones donde la interpretación del funcionamiento de las técnicas que se utilizan (y la interpretación del resultado que se obtiene al aplicarlas) no forma parte de la responsabilidad asignada a la comunidad de estudio.

OML6. En la OM local en cuestión deben aparecer, de manera relevante, tareas matemáticas abiertas, esto es, tareas matemáticas cuyos “datos” e “incógnitas” no estén completamente determinados de antemano. Entre dicho tipo de tareas matemáticas deben citarse, en primer término, las que requieren un proceso de modelación matemática.

OML7. El discurso tecnológico-teórico de la OM local en cuestión, esto es, el discurso matemático que sirve para interpretar y justificar la práctica matemática, debe incidir efectivamente sobre ésta y debe permitir, en particular, construir técnicas matemáticas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas y flexibilizar la práctica matemática (Fonseca, Bosch, Gascón, 2010, p.12-13).

## METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación es de tipo descriptiva y tiene por objetivos:1) identificar las tareas, las técnicas, tecnologías y teorías que componen las praxeologías propuestas, entorno al Teorema de Pitágoras, en un conjunto de 34 libros de texto pertenecientes al Ciclo Básico (1ro, 2do y 3er Año) destinados al nivel secundario argentino (estudiantes entre 13 y 16 años); 2) agrupar esas tareas en tipos de tareas y éstos, a su vez, en géneros de tareas; 3) clasificar estas praxeologías tratando de delimitar si se tratan de puntuales, locales, regionales o globales y 4) dar indicios sobre su grado de completitud. La selección de estos 34 libros de texto, y no de otros, se debe al acceso a los mismos por parte de la investigadora. Los libros están editados a partir de los años 1975 hasta el 2016 y son producidos por variados grupos editoriales. Los libros fueron rotulados con una $M_i$, con i desde 1 hasta 34.

El primer objetivo de este trabajo se asocia a una pregunta de investigación, formulada de la siguiente manera: ¿Qué características, en términos de componentes, tienen las organizaciones matemáticas (OM) propuestas para enseñar entorno al Teorema de Pitágoras, en un conjunto de libros de texto destinados al nivel secundario argentino? Para responder esta pregunta se construyeron dos tablas. La primera de ellas (Tabla 1) pretende describir de forma amplia cada libro. En la primera columna se colocó su nombre; en la segunda columna, su editorial; en la tercera columna, el nombre del(los) autor(es); en la cuarta columna, el año de edición del libro; en la quinta columna se tuvo en cuenta el año escolar al cual estaba destinado el libro de acuerdo a lo explicitado en él; en la sexta se hizo referencia al nombre del capítulo en el cuál cada libro incorporaba el Teorema de Pitágoras (TP) y en la séptima columna, se indicaron los capítulos anterior y posterior al del Teorema de Pitágoras.

**Tabla 1:** Descripción general de los 34 libros

| Libro | Editorial | Autor(es) | Año de edición | Año escolar | TP | Entre capítulos |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | | | | | | |
| ... | | | | | | |
| $M_{34}$ | | | | | | |

Fuente: propia

La segunda tabla (Tabla 2) permitió identificar, reconstruir y detallar la OM propuesta en cada a partir de la identificación de cada uno de sus componentes. En la primera columna se hizo referencia al rótulo del libro ($M_i$); en la segunda columna se colocaron cada una de las tareas propuestas en el capítulo que involucraban el Teorema de Pitágoras; en la tercera columna, las técnicas propuestas para resolver esas tareas; en la cuarta y quinta columna, las tecnologías y teorías posibles de identificar y/o inferir para cada técnica y tarea, respectivamente. A continuación, se detalla qué fue considerado como “tarea”, “técnica”, “tecnología” y “teoría”, definiendo estas categorías a partir del marco teórico.

*Tareas*: se consideró una tarea a los ejercicios/actividades/problemas que se proponen en cada libro, ya sean resueltos o no, y se rotuló con la letra t.

*Técnicas*: se consideró una técnica a las herramientas que se construyen y utilizan para abordar ese problema y se rotuló con la letra τ.

*Tecnología*: se consideró una tecnología a las descripciones y explicaciones que se proponen en el libro como una manera de explicar o de justificar las técnicas empleadas y/o propuestas. Se rotuló con la letra θ.

*Teoría*: se consideró una teoría a aquellas justificaciones y/o explicaciones que se explicitaban o inferían como maneras de justificar las tecnologías. Se rotuló con la letra Θ.

**Tabla 2:** Descripción e identificación de las organizaciones matemáticas en términos de sus componentes

| Libro | Tarea (t) | Técnicas (τ) | Tecnología (θ) | Teoría (Θ) |
|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | | | | |
| ... | | | | |
| $M_{34}$ | | | | |

Fuente: Propia

Esta tabla permitió detallar cada tarea precisada en cada uno de los libros, así como las técnicas, tecnologías y teorías. Luego, esas tareas se agruparon en tipos de tareas. El criterio para este agrupamiento fue identificar aquellas tareas que se resuelven con una misma técnica. Esto permitió determinar los diferentes tipos de tareas propuestos en cada libro, las técnicas asociadas a esos tipos y en caso de explicitarse, las tecnologías y teorías. Luego, esos tipos se agrupan en géneros de tareas. El criterio fue, tal como lo indica Chevallard (1999), considerando un verbo en infinitivo. En la sección siguiente, se detallan estos aspectos. Otra pregunta que nos planteamos es ¿Cómo se clasifican estas OM, en términos de puntuales, locales, regionales o globales? Para responderla se consideran los 4 niveles de praxeologías formulados por Chevallard (1999) y Bosch, Espinoza, Gascón (2003), caracterizados en la sección relativa al marco teórico. Luego, nos cuestionamos sobre el grado de completitud de esas praxeologías matemáticas. Para responder esta pregunta se utilizaron los indicadores formulados por Fonseca (2004, Fonseca, Bosch y Gascón, 2010) y que se han descripto también en el capítulo relativo al marco teórico. En este caso, generamos descriptores para cada uno de esos indicadores (ver Tabla 3).

**Tabla 3:** Descriptores de los indicadores generados por Fonseca (2004)

| Indicador | Descriptores |
|---|---|
| **OML1** | **OML1$_1$**: Los tipos de tareas y técnicas aparecen integrados.<br><br>**OML1$_2$**: Las tareas matemáticas relativas al cuestionamiento tecnológico están presentes |
| **OML2** | **OML2$_1$**: Para cada tipo de tareas existen diferentes técnicas.<br><br>**OML2$_2$**: En la propia OM existen criterios para elegir la técnica más adecuada. |
| **OML3** | **OML3$_1$**: La OM local contiene diversos objetos ostensivos (gráficos, verbales, gestuales, etc.) para representar un mismo objeto matemático.<br><br>**OML3$_2$**: Los objetos matemáticos son independientes de los objetos (ostensivos) que se utilizan para representarlos. |
| **OML4** | **OML4$_1$**: Las tareas y las técnicas son relativamente "flexibles".<br><br>**OML4$_2$**: Las tareas y las técnicas puedan ser "invertidas" (no de manera única) para dar origen a nuevas tareas y nuevas técnicas. |
| **OML5** | **OML5$_1$**: La OM contiene tareas matemáticas que permiten interpretar el funcionamiento de las técnicas.<br><br>**OML5$_2$**: La OM contiene tareas matemáticas que permiten interpretar el resultado de aplicar las técnicas. |
| **OML6** | **OML6$_1$**: Las tareas matemáticas abiertas están presentes (esto es, tareas matemáticas cuyos "datos" e "incógnitas" no estén completamente determinados de antemano).<br><br>**OML6$_2$**: La OM contiene tipos de tareas que requieren un proceso de modelación matemática. |
| **OML7** | **OML7$_1$**: El discurso tecnológico-teórico de la OM incide efectivamente sobre ésta.<br><br>**OML7$_2$**: El discurso tecnológico-teórico de la OM permite construir técnicas matemáticas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas y flexibilizar la práctica matemática. |

Fuente: Propia

Finalmente, la Tabla 4 permitió identificar cual o cuales de estos indicadores podían detectarse (o no) en cada OM reconstruida. Para ello, se consideran en las primeras columnas, cada tipo de tarea, las técnicas y tecnologías propuesta en cada caso. Luego, en las columnas siguientes, los descriptores de cada uno de los siete indicadores, donde se colocan cruces para determinar cuál o cuáles de ellos están presentes.

**Tabla 4:** Identificación y presencia de los indicadores propuestos en cada libro

| | | | | OML1 | | OML2 | | OML3 | | OML4 | | OML5 | | OML6 | | OML7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mi | Tarea (T) | Técnicas (T) | tecnología (Θ)/teoría (Θ) | $OML1_1$ | $OML1_2$ | $OML2_1$ | $OML2_2$ | $OML3_1$ | $OML3_2$ | $OML4_1$ | $OML4_2$ | $OML5_1$ | $OML5_2$ | $OML6_1$ | $OML6_2$ | $OML7_1$ | $OML7_2$ |

Fuente:Propia

# RESULTADOS Y DISCUSIÓN

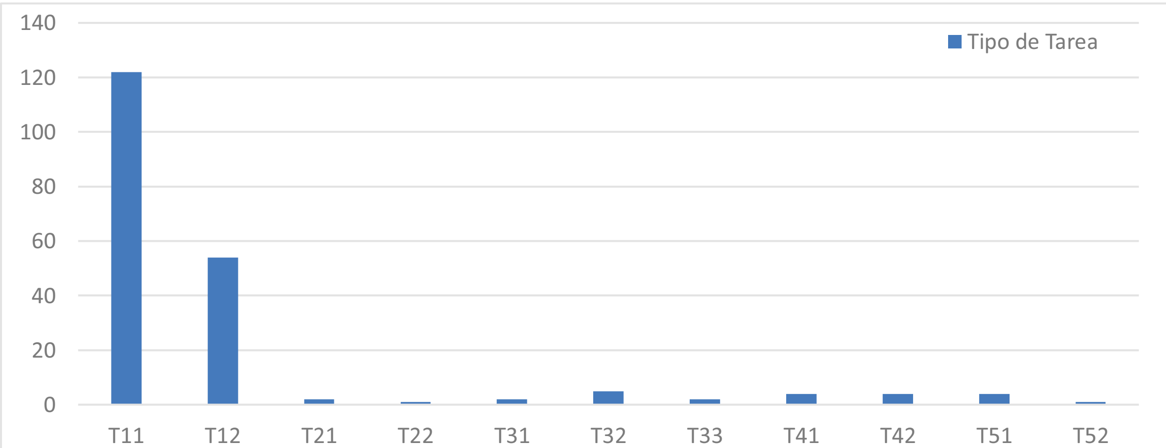
## Caracterización en términos de sus componentes

A partir de la información de la Tabla 1, obtuvimos que 9 libros están destinado al primer año (estudiantes de 13 años); 19 textos, a segundo año (estudiantes de 14 años) y 6 libros, a tercer año (estudiantes de 15 años). En los del primer año, en general, el Teorema de Pitágoras se propone después de la unidad de construcciones geométricas y antes de la unidad de números enteros; en segundo año, mayoritariamente, después de la unidad de cuadriláteros y antes de la unidad de probabilidad y estadística y, en tercer año, antes de la unidad de sistemas de ecuaciones y después de la unidad de movimientos en el plano.

A partir de los datos de la Tabla 2 se obtuvo un total de 201 tareas agrupadas en 11 tipos de tareas diferentes ($Ti_j$). La notación refiere al tipo de tarea j correspondiente al género de tareas i. Los géneros de tareas serán presentados a continuación de los tipos de tareas: $T1_1$: Calcular el valor de la hipotenusa/diagonal, lado/s, catetos, apotema, altura del triángulo (122 tareas); $T1_2$: Calcular el valor del área, perímetro, superficie lateral, distancia (54 tareas); $T2_1$: Identificar triángulos (2 tareas); $T2_2$: Identificar el valor de los lados (1 tarea); $T3_1$: Determinar la veracidad o falsedad de las proposiciones (2 tareas); $T3_2$: Determinar si se cumplen las condiciones para construir un triángulo (5 tareas); $T3_3$: Determinar las ternas pitagóricas y a que lados corresponden los datos (2 tareas); $T4_1$: Comprobar la relación pitagórica y decidir si los triángulos son rectángulos (4 tareas); $T4_2$: Comprobar el valor de un cateto en la terna pitagórica (4 tareas); $T5_1$: Construir triángulos rectángulos (4 tareas) y $T5_2$: Construir cuadrados (1 tarea).

El gráfico de barras presentado en la Figura 1, generado a partir de los datos anteriores, representa esta cantidad de tareas para cada uno de los tipos detallados:

**Figura 1** – Cantidad de tareas según los tipos de tareas




Fuente: propia

Hay una preponderancia de dos géneros: $T1_1$ con 122 tareas y $T1_2$ con 54 tareas. Los 11 tipos de tareas, se agruparon en 5 tipos de genero de las tareas ($G_i$):

$G_1$: Calcular, con un total de 176 tareas

$G_2$: Identificar, con un total de 3 tareas

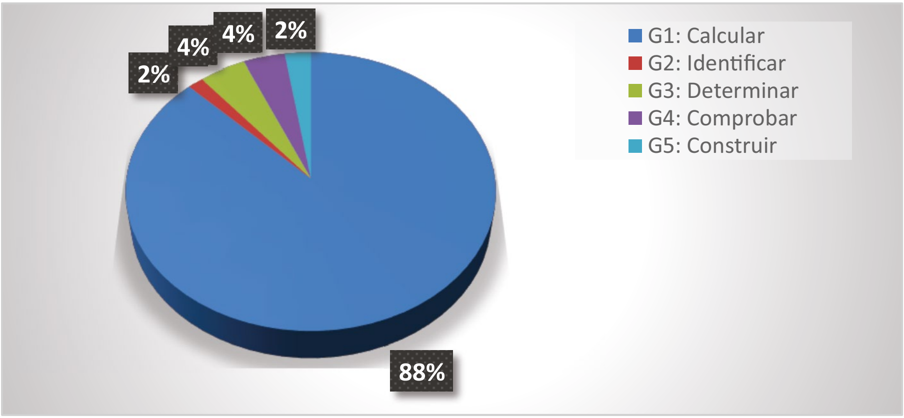
$G_3$: Determinar, con un total de 9 tareas

$G_4$: Comprobar, con un total de 8 tareas

$G_5$: Construir, con un total de 5 tareas

El gráfico siguiente (Figura 2), generado a partir de los datos anteriores, representa esta cantidad de tareas para cada uno de los géneros detallados:

**Figura 2** – Cantidad de tareas según los tipos de tareas




Fuente: propia

Con respecto a las técnicas, cabe destacar que las mismas rondan, por ejemplo, en: reemplazar datos en figuras de análisis para saber qué lado está faltando ($T1_1$); descomponer figuras de análisis para comprobar el teorema ($T2_1$); evaluar la propiedad triangular para hacer posible la construcción del triángulo ($T3_2$); descomponer y relacionar las ternas pitagóricas. ($T4_1$); reemplazar valores en la expresión pitagórica ($T4_2$); construir a través de datos el triángulo pedido ($T5_1$), entre otras. Con respecto a las tecnologías, es importante destacar que este tipo de componentes han sido inferidos ya que no se explicitan en los textos considerados. Nada se dice sobre las justificaciones y/o explicaciones, menos aún, producciones, de tal o cual técnica. En cuanto a la teoría, los libros de texto no proponen ninguna alusión que pueda ser considerada como tal.

## Clasificación de las OM y grados de completitud

A partir del análisis de los componentes realizados anteriormente y en función de los tipos de OM, inferimos que se tratan de organizaciones locales, ya que, si bien en los libros de textos no hay una tecnología explícita, es posible inferir algunas de ellas como por ejemplo una posible justificación de la relación pitagórica o la explicación de la desigualdad triangular para decidir la conformación de los triángulos.

La Tabla 4 permitió concluir sobre la presencia y/o ausencia de los descriptores generados a partir de los indicadores propuestos por Fonseca (2004) y, esto permite aludir al grado de completitud de la organización matemática. Los descriptores que se identifican son cinco. Conviene aclarar que esta identificación no se ha considerado en sentido fuerte. Es decir, se ha considerado presente tal o cual descriptor si existe algún indicio del mismo:

OML$1_1$: Los tipos de tareas y técnicas aparecen integrados. Se ha considerado una "presencia" de este indicador pues para cada tipo de tarea es posible determinar al menos una técnica que permite resolver las tareas de ese tipo.

OML$2_1$: Para cada tipo de tareas existen diferentes técnicas. En este caso, se han identificado y/o inferido para algunas tareas, dos posibles maneras de resolverlas. Por ejemplo: En cada caso, las tres longitudes deben ser las de los lados de un triángulo rectángulo. Rodea las longitudes de los triángulos intrusos. Tarea propuesta en el M6

OML$3_2$: Los objetos matemáticos son independientes de los objetos (ostensivos) que se utilizan para representarlos. Cabe aclarar que, el mismo, se identifica en muy pocos casos.

OML$5_1$: La OM contiene tareas matemáticas que permiten interpretar el funcionamiento de las técnicas, Se ha considerado aquí esta presencia pues hay algunas tareas que ponen a prueba los alcances y limitaciones del Teorema de Pitágoras. Por ejemplo: Señala el ángulo recto de cada triángulo y calcula la longitud del lado que falta indicar. Tarea propuesta en el M1.

OML$6_2$: La OM contiene tipos de tareas que requieren un proceso de modelación matemática. Se considera en este caso una presencia de este indicador cuando hay alguna tarea que considera un "contexto" para la misma. De esta forma, se ha considerado la modelización en un sentido muy débil.

Esto nos conduce a concluir que las OM propuestas en este conjunto de 34 libros de texto tienen un bajo de grado de completitud.

## CONCLUSIONES

El análisis del conjunto de los 34 libros de texto que proponían el Teorema de Pitágoras arrojó un total de 201 tareas, agrupadas en 11 tipos de tareas diferentes y éstos, a su vez, asociados en cinco géneros de tareas. El mayor porcentaje de esas 201 tareas corresponden al género “$G_1$: Calcular” y dentro de él, a sus dos tipos tareas “$T1_1$: Calcular el valor de la hipotenusa/diagonal, lado/s, catetos, apotema, altura del triángulo (122 tareas)” y “$T1_2$: Calcular el valor del área, perímetro, superficie lateral, distancia (54 tareas)”. Esto da indicios de la existencia de praxeologías sesgadas al cálculo con una cantidad insignificante de tareas que pongan en juego otros aspectos de la matemática, tales como las verificaciones, la identificación de datos, construcciones, etc. Con respecto a las tecnologías y teorías, es decir, al nivel de las justificaciones, las primeras han sido algunas inferidas, puesto que no se explicitan en los textos y las teorías, completamente ausentes. Se concluye entones en la identificación de praxeologías con una amplia preponderancia del bloque práctico-técnico por sobre el bloque tecnológico-teórico, que casi podría decirse está completamente ausente, salvo por esas inferencias tecnológicas.

Respecto a la clasificación de las OM, en términos de puntuales, locales, regionales o globales, se concluye en un nivel local. Si bien, como se indicó previamente, no se explicitan elementos tecnológicos-teóricos, sí se han inferido algunas justificaciones de técnicas a partir de algunas tareas y entonces, podría considerarse la existencia de al menos, “un embrión de tecnología”, tal como lo propone Chevallard (1999). Finalmente, considerando la cuestión sobre el grado de completitud de las praxeologías y considerando el análisis a partir de los indicadores de Fonseca (2004), se concluye que estas OM tienen un bajo grado de completitud.

A pesar de estos resultados y, más allá de los objetivos específicos de este trabajo, es importante propiciar una reflexión sobre las praxeologías propuestas en los libros de texto pues, como ya se mencionó, éstos constituyen una parte importante de los recursos de los profesores, tanto para la planificación como para el desarrollo de las clases. No pretendamos, por tanto, que dejen de ser utilizados, sino que se haga un análisis crítico de lo que allí se propone para decidir las adaptaciones, modificaciones, ampliaciones, etc. en función de las necesidades de estudio de cada aula de matemática.

# REFERÊNCIAS

Bosch, M.; Espinoza, L.; Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23 (1), 79 -135.

Bosch, M.; Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En González, M.J; González, M.T; Murillo, J (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89- 113). Santander: SEIEM.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), pp.221-266.

Chevallard, Y (2001) Aspectos problemáticos de la formación docente. *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Huesca. http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Chevallard, Y. (2005). *La place des mathématiques vivantes dans l´éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire*. http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (TAD) (pp. 705-746). Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*. 20(1), pp.159-169.

Chevallard, Y.; Bosch, M.; Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

Duque-Gómez, C. (2013). Pitágoras ayuda al fiscal. *Números*, 82, pp.157-171.

Echavarría, C; Bermúdez, C (2011). El teorema de Pitágoras en la escuela. En García, Gloria (Ed.), *Memorias del 12° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 560-564). Armenia: Gaia.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis doctoral, Universidad de Vigo.

Fonseca, C.; Bosch, M.; Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la competición de organizaciones matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. *Educación Matemática*, 22(2), 5-35.

Garcia de Melo, A. J. y Fabiani Marcatto, F. S. (2020) A abordagem de jogos educacionais nos livros didáticos de matemática. *Tangram – Revista de Educação Matemática, Dourados - MS*, 3(2), pp. 208-228

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *Revista SUMA*, 44, pp.25-34.

González Astudillo, M. T. y Sierra Vázquez, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), pp.389-408.

Marmolejo Avenia, G. A. y González Astudillo, M.T. (2013). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Educación Matemática*, 25(3), pp.61-102.

Occelli M. y Valeiras, N. (2013). Los Libros de texto de ciencias como objeto de investigación: Una revisión bibliográfica. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(2), pp. 133-152.

Parra, V; Otero, M. R. (2009). Praxeologías Didácticas en la Universidad: Un estudio de caso relativo al Límite y Continuidad de funciones. *Revista Zetetiké*, 17, pp. 151-190.

Quiroz Rivera, S. y Rodríguez Gallegos, R. (2015). Análisis de praxeologías de modelación matemática en libros de texto de educación primaria. *Educación Matemática*, 27(3), pp.45-79.

Sturion, B. y Amaral-Schio, T. B. (2019). BNCC do ensino médio: um olhar sobre os conteúdos de área e volumen nos livros didáticos de matemática. *Tangram – Revista de Educação Matemática, Dourados-MS*, 2(3), pp. 88-102.

Torres, Y. (2020). *Organizaciones Matemáticas propuestas para el nivel secundario relativas al Teorema de Pitágoras: una descripción desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Tesis de grado, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Vargas-Vargas, G. y Gamboa-Araya, R. (2013). La enseñanza del Teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del GeoGebra, según el modelo de Van Hiele. Uniciencia, 27(1), pp.95-118.

## CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

1ª autor: conceptualización; recolección de datos; análisis formal; investigación; metodología; administración de proyecto; visualización; corrección y edición.

2º autor: conceptualización; análisis formal; investigación; metodología; administración de proyecto; supervisión; visualización; escritura - borrador original; redacción: corrección y edición.