Tangram
Revista de Educação Matemática

DOI: 10.30612/tangram.v4i2.14649

Una mirada a la regla de Cramer desde el conocimiento matemático especializado del profesor universitario

Uma olhada na regra de Cramer a partir do conhecimento matemático especializado do professor universitário

A look at Cramer's rule from the specialized mathematical knowledge of the university professor

María del Carmen Regolini
Departamento de Matemática y Estadística. Facultad de Ciencias Económicas,
Universidad Nacional de Río Cuarto -UNRC
Río Cuarto, Córdoba, Argentina
E-mail: maregolini@fce.unrc.edu.ar
Orcid: 0000-0002-6301-6240

Nuria Climent Rodríguez
Departamento de Didácticas Integradas (Área de Didáctica de la Matemática)
Universidad de Huelva -UHU
Huelva, España
E-mail:climent@ddcc.uhu.es
Orcid:0000-0002-0064-1452

Resumen: Este trabajo busca describir el conocimiento especializado de una profesora universitaria cuando imparte la regla de Cramer, en un estudio de caso instrumental. Mediante el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) se analizan una clase y entrevistas, con el propósito de comprender el conocimiento que sustenta su práctica. Los resultados evidencian que la profesora sabe que algunos sistemas de ecuaciones lineales pueden ser resueltos por la regla de Cramer, la manera de obtener y expresar simbólicamente la solución y la forma en que los estudiantes interactúan con el contenido. Encontramos relación entre su conocimiento del contenido matemático, sobre cómo se aprende y sobre su enseñanza, revelándose un abordaje de los contenidos a través de variedad de ejemplos que destacan características relevantes y, a su vez, advierten a los estudiantes sobre potenciales errores. Este estudio coadyuva a validar la utilidad del modelo MTSK para comprender la actividad del profesor universitario.

Palabras clave: Conocimiento del profesor. Álgebra lineal. Universidad

Resumo: Este trabalho busca descrever o conhecimento especializado de uma professora universitária ao ensinar a regra de Cramer, em um estudo de caso instrumental. Utilizando o modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK), uma aula e entrevistas são analisadas, a fim de compreender os saberes que sustentam sua prática. Os resultados mostram que o professor sabe que alguns sistemas de equações lineares podem ser resolvidos pela regra de Cramer, a forma de obter e expressar simbolicamente a solução e a forma como os alunos interagem com o conteúdo. Encontramos uma relação entre seus conhecimentos matemáticos, sobre como é aprendido e sobre o seu ensino, revelando uma abordagem dos conteúdos por meio de uma variedade de exemplos que destacam características relevantes e, por sua vez, alertam os alunos sobre possíveis erros. Este estudo ajuda a validar a utilidade do modelo MTSK para entender a atividade do professor universitário.

Palavras-chave: Conhecimento do professor. Álgebra linear. Faculdade.

Abstract: This work seeks to describe the specialized knowledge of a university professor when she teaches Cramer's rule, in an instrumental case study. Using the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model, a class and interviews are analyzed, in order to understand the knowledge that supports her practice. The results show that the teacher knows that some systems of linear equations can be solved by Cramer's rule, the way to obtain and symbolically express the solution, and the way in which the students interact with the content. We found a relationship between her knowledge of the topic, about how it is learned and about its teaching, revealing an approach to the contents through a variety of examples that highlight relevant characteristics and, in turn, warn students about potential errors. This study helps to validate the usefulness of the MTSK model to understand the activity of the university professor.

Keywords: Teacher's knowledge. Linear algebra. University.

Recebido em
30/04/2021
Aceito em
13/06/2021

INTRODUCCIÓN

Este estudio forma parte de la agenda de trabajo de una tesis doctoral en ejecución que se desarrolla en la Universidad de Huelva, España. Intenta aportar al modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK[1]) (Carrillo et al., 2018) en el ámbito universitario. Busca responder la siguiente pregunta de investigación: *¿qué conocimiento especializado evidencia en la práctica una profesora universitaria que enseña Álgebra Lineal?* En este artículo nos planteamos como objetivo *describir el conocimiento matemático especializado de una profesora cuando enseña la regla de Cramer*. Lo anterior permitirá comprender el conocimiento que sustenta la práctica del profesor y establecer relaciones entre elementos de conocimiento matemático especializado.

El conocimiento del profesor comenzó a caracterizarse en la década de los ´80 del siglo XX, siendo Shulman (1986) uno de los pioneros en la temática. Su principal aporte es la incorporación del Pedagogical Content Knowledge (PCK[2]), lo que ha permitido el diseño de diversos modelos analíticos que toman en consideración conocimientos sobre la enseñanza y el aprendizaje de una disciplina concreta, en nuestro caso de las matemáticas. Entre ellos, el modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT[3]) de Ball, Thames & Phelps (2008) contribuye al conocimiento matemático que necesitan específicamente los profesores para enfrentar las tareas de enseñanza, al que denominan, Conocimiento Especializado del Contenido.

A pesar de ello, Charalambous & Pitta–Pantazi (2016) sostienen que las investigaciones concernientes a la comprensión del conocimiento del profesor en la universidad en relación a la enseñanza, resultan insuficientes. Desde la perspectiva de la enseñanza, es clara la necesidad de conocimiento de contenido del profesor universitario, aunque no es tan evidente el requerimiento acerca de su conocimiento

---

1 Sus siglas en inglés: *Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge*.
2 Conocimiento didáctico del contenido.
3 Sus siglas en inglés: Mathematical Knowledge for Teaching.

didáctico de dicho contenido. Por lo que Nardi (2017) plantea la necesidad de atender a ambas componentes de conocimiento del profesor universitario. Investigar acerca del conocimiento del profesor de matemáticas en la universidad podría aportar al debate sobre su formación para la enseñanza.

El abordaje del Álgebra Lineal presenta características especiales. Mayoritariamente, sus conceptos se enseñan partiendo de una definición formal de los objetos, impidiendo su motivación tomando en consideración conocimientos previos o argumentos geométricos. Existe consenso, entre los investigadores en Educación Matemática, en que las dificultades en su aprendizaje perduran, independientemente del enfoque adoptado –axiomático, matricial, geométrico o computacional– (Dorier, 2002). Las dificultades de los estudiantes provienen de dos fuentes, una conceptual y otra cognoscitiva. En el primer caso, se debe a la naturaleza de los objetos del álgebra lineal en sí misma, por su carácter abstracto y en el segundo, al tipo de pensamiento requerido para su comprensión; no obstante, estos dos aspectos usualmente son inseparables (Dorier, 2002).

En estos cursos de álgebra lineal, la importancia del tratamiento de sistemas de ecuaciones lineales tiene un doble propósito. Por un lado, su uso permite modelar diversas situaciones reales o aproximarse a ellas, asociando un objeto no matemático con otro matemático –que involucra varias variables– que representa determinados comportamientos, relaciones o características. Por otro lado, contribuye a la comprensión de otros conceptos que se abordan en esta materia.

ASPECTOS TEÓRICOS

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

El modelo MTSK surge a partir de las ideas de Shulman (1986, 1987) sobre conocimiento de contenido (SMK[4]) y conocimiento didáctico del contenido (PCK[5]) y,

4 Siglas en inglés: *Subject Matter Content Knowledge*.
5 Siglas en inglés: *Pedagogical Content Knowledge*.

de la discusión acerca de la delimitación de los subdomnios (Flores–Medrano, Escudero–Ávila & Carrillo, 2013) que conforman el modelo MKT (Ball et al., 2008). Pretende otorgar una herramienta que posibilite analizar el conocimiento que sustenta la práctica de un profesor de matemáticas. Su finalidad es caracterizar la integración de conocimientos matemáticos y didácticos del contenido que tengan sentido para el profesor de matemáticas. El carácter especializado del MTSK se refiere a que es relativo a la enseñanza de la matemática y está asociado al modelo completo (Carrillo, Climent, Contreras, Muñoz–Catalán, 2013).

En el MTSK se distinguen dos grandes grupos de conocimiento de diferente naturaleza. Uno de ellos, el dominio del *Conocimiento Matemático* (MK[6]), se refiere al conocimiento que tiene un profesor de matemáticas como disciplina científica en un contexto escolar. Está conformado por tres subdominios que permiten el conocimiento profundo del contenido matemático en sí (*Conocimiento de los Temas*, KoT[7]), su estructura (*Conocimiento de la Estructura de la Matemática*, KSM[8]) y, cómo se procede y produce matemáticas (*Conocimiento de la Práctica Matemática*, KPM[9]). El dominio, *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK[10]), contempla el conocimiento que está determinado o condicionado por la matemática en términos de enseñanza-aprendizaje. Sus tres subdominios aluden a la importancia de que el profesor conozca el contenido matemático como un contenido a enseñar, a aprender y desde una visión general de los estándares de aprendizaje a alcanzar. Se denominan respectivamente, *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT[11]), *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM[12]) y *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS[13]). Además, el MTSK toma en consideración las creencias que posee un profesor sobre las matemáticas, referidas

6 Siglas en inglés del dominio *Mathematical Knowledge*.
7 Siglas en inglés del subdominio *Knowledge of Topics*.
8 Siglas en inglés del subdominio *Knowledge of the Structure of Mathematics*.
9 Siglas en inglés del subdominio *Knowledge of Practices in Mathematics*.
10 Siglas en inglés del dominio *Pedagogical Content Knowledge*.
11 Siglas en inglés del subdominio *Knowledge of Mathematics Teaching*.
12 Siglas en inglés del subdominio *Knowledge of Features of Learning Mathematics*.
13 Siglas en inglés del subdominio *Knowledge of Mathematics Learning Standards*.

a cómo se aprende y cómo se debería enseñar, permeando el conocimiento del profesor en los diferentes subdominios. De modo que, el dominio *Creencias sobre las Matemáticas y sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas* se ubica en el centro de la **Figura 1**.

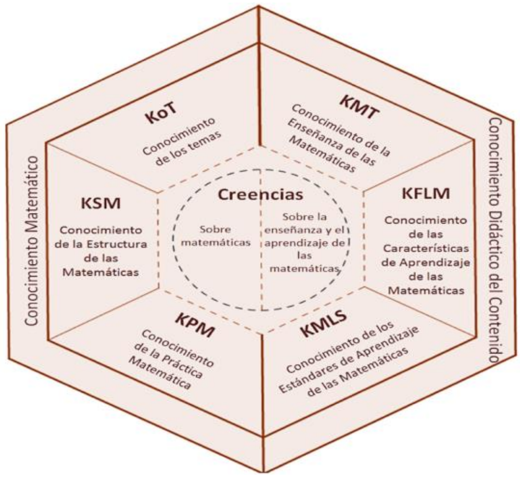

Figura 1. Dominios y Subdominios del MTSK.

Fuente: Sosa Guerrero, Flores–Medrano & Carrillo Yáñez, 2016.

Del MTSK se describen los seis subdominios de conocimiento, enfatizando en el KoT, KFLM y KMT acompañados de algunos ejemplos, en razón de que esta investigación está focalizada en ellos[14].

El ***Conocimiento de los Temas*** (KoT) concierne a un modo de conocimiento local de la propia matemática. Supone conocer los contenidos matemáticos y sus significados de manera argumentada y conexiones en la proximidad de un concepto (*intraconceptuales*) (Martínez, Giné, Fernández, Figueiras & Deulofeu, 2011). Las categorías que conforman este subdominio son:

• *Fenomenología y aplicaciones* corresponde al conocimiento referido a fenómenos –asociados a los significados de un tema matemático– y de los usos y aplicaciones dentro de la propia matemática. Entre otros, el profesor conoce que la

14 Una descripción más detallada del MTSK se puede consultar en Carrillo et al., 2018.

matriz inversa se podría emplear para hallar la solución única de un sistema de ecuaciones lineales cuadrado y compatible determinado.

- *Definiciones, propiedades y sus fundamentos* comprende el conocimiento que permite caracterizar un concepto y las propiedades de un objeto matemático. Verbigracia, el profesor sabe la propiedad que establece que "si una matriz cuadrada tiene una línea –fila o columna– nula, su determinante es igual a cero".

- *Registros de representación* corresponde al conocimiento de las diferentes formas en que se puede representar un contenido (algebraico, gráfico, aritmético, pictográfico, mediante el lenguaje coloquial, etc.) (Duval, 1995), tomando en cuenta el vocabulario matemático. Por ejemplo, el profesor conoce que la solución única de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con dos incógnitas podría ser expresado como el punto que representa el origen del plano cartesiano, el par ordenado $(0;\ 0)$ o la matriz columna nula $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- *Procedimientos* en los que se distinguen cuatro subcategorías, *¿Cuándo se puede hacer?*, *¿Cómo se hace?*, *¿Por qué se hace así?* y *Característica del resultado*. Por ejemplo, el profesor conoce el procedimiento para determinar el rango de una matriz a través del método de Gauss-Jordan. Sabe que se puede aplicar a matrices no nulas de cualquier orden –*¿Cuándo se puede hacer?*– mediante la aplicación reiterada de operaciones elementales por filas hasta lograr la matriz forma reducida –*¿Cómo se hace?*– porque en las sucesivas iteraciones se consiguen matrices equivalentes entre sí –*¿Por qué se hace así?*– para identificar el rango de la matriz original mediante la cantidad de filas no nulas que tiene su matriz forma reducida –*Característica del resultado*–.

El ***Conocimiento de la Estructura de la Matemática*** (KSM) se refiere al conocimiento del profesor sobre relaciones entre objetos matemáticos (interconexiones) que forman parte de diferentes núcleos de contenido. Contempla *conexiones de simplificación, complejización, contenidos transversales y auxiliares* que permiten al profesor comprender y desarrollar conceptos elementales con una perspectiva avanzada, conceptos avanzados desde una visión elemental, las ideas que subyacen a distintos contenidos matemáticos y, qué contenido o tema diferente al que se está abordando se utiliza como herramienta para explicar aspectos del contenido tratado. A modo de ejemplo de conexión de complejización, el profesor conoce que el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo representa el núcleo de una transformación lineal definida entre espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo.

El ***Conocimiento de la Práctica Matemática*** (KPM) incluye el conocimiento del profesor sobre las formas de conocer, crear o producir en matemáticas, así como el conocimiento de aspectos de la comunicación matemática, del razonamiento y la prueba. Por ejemplo, el profesor sabe que la propiedad de los determinantes que establece: “Si una matriz cuadrada tiene dos líneas (filas o columnas) iguales, su determinante es cero” permite enunciar un teorema de condición suficiente: “Es condición suficiente para que el determinante de una matriz cuadrada sea nulo, que tenga dos filas o dos columnas iguales” (Ibañez & Ortega, 1998).

El ***Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas*** (KFLM) comprende el conocimiento del profesor sobre cómo se aprende un contenido matemático. Sus categorías son:

- *Teorías de Aprendizaje*, alude al conocimiento acerca de teorías personales o institucionalizadas referidas al aprendizaje. Dicho conocimiento puede provenir de la experiencia adquirida por el profesor y también, de resultados de investigaciones obtenidos en el ámbito de Educación Matemática. Entre otros, el profesor podría saber que mediante la teoría cognitiva APOE[15] se pueden establecer las construcciones y mecanismos mentales necesarios como prerrequisitos para el aprendizaje del teorema de la matriz asociada a una transformación lineal (Trigueros Gaisman, Maturana Peña, Parraguez González & Rodríguez Jara, 2015).

15 Acrónimo de “Acción, Proceso, Objeto y Esquema”

• *Fortalezas y dificultades*, es el conocimiento referido a las dificultades y fortalezas que se perciben en los estudiantes al abordar un contenido matemático. Tales como: el profesor sabe que los estudiantes suelen tener dificultades para distinguir si un conjunto finito de vectores genera un espacio vectorial completo o un subespacio vectorial propio.

• *Formas de interacción con un contenido matemático*, comprende el conocimiento sobre procedimientos y estrategias –convencionales o no– que emplean los estudiantes al desarrollar las tareas matemáticas y los términos que utilizan al referirse a contenidos específicos. Por ejemplo, el profesor conoce que los estudiantes aplican la regla de Sarrus para obtener el determinante de una matriz triangular (superior o inferior) de orden 3x3, en lugar de emplear la propiedad correspondiente.

• *Intereses y expectativas*, es el conocimiento del profesor sobre las motivaciones de los estudiantes. Entre tantos, el profesor conoce que los alumnos suelen estar más predispuestos a aprender sistemas de ecuaciones lineales, por sus numerosas aplicaciones en la resolución de problemas, que la teoría de espacios vectoriales.

El ***Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas*** (KMT) comprende el conocimiento del profesor sobre cómo se enseña un contenido matemático concreto, sin considerar el conocimiento de aspectos pedagógicos generales. Este subdominio incluye las categorías:

• *Teorías de la enseñanza de las matemáticas*, formales –que puede haberlas estudiado– o derivadas de su experiencia. Por ejemplo, el profesor conoce que mediante la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (2007) es factible diseñar tareas para el aula y ambientes de trabajo matemático apropiados para dichas tareas.

• *Recursos didácticos*, es el conocimiento de herramientas que se pueden emplear para la enseñanza de un tópico matemático específico. Entre otros, el profesor conoce la utilidad de GeoGebra para enseñar, aprender y recrear la representación gráfica de las ecuaciones lineales que conforman un sistema, tanto en el plano cartesiano como en el espacio tridimensional, visibilizando la interpretación geométrica de la existencia o no de solución y su correspondiente conjunto solución. Lo anterior facilita la clasificación del sistema de ecuaciones lineales en: homogéneo o no homogéneo, cuadrado o rectangular y compatible (determinado o indeterminado) o incompatible.

- *Estrategias, Técnicas, Tareas y Ejemplos*, corresponde al conocimiento del profesor referido a, qué tareas –ejemplos, situaciones, etc.– son apropiadas para enseñar un determinado contenido y cuáles son las potencialidades y limitaciones de las estrategias y técnicas didácticas para abordarlo. Verbigracia, el profesor sabe que cuando selecciona ejercicios de sistemas de ecuaciones lineales para distinguir si podrían ser resueltos por el método de la inversa, deberá incluir algunos sistemas rectangular y cuadrado –en este caso, cuya matriz de coeficientes no sea invertible–, para que los estudiantes adviertan la necesidad de analizar y comprobar las condiciones requeridas para aplicar este método.

El ***Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas*** (KMLS) se refiere al conocimiento del profesor acerca de los contenidos estipulados en las normativas curriculares, considerando también aspectos de conocimiento provistos por grupos de investigación, asociaciones profesionales y reportes científicos (Gómez–Chacón, 2017). Abarca el conocimiento del profesor sobre los contenidos que abordará en un curso y nivel determinados, la profundidad con que deberá tratarlos y las secuenciaciones retrospectiva y prospectiva con otros contenidos. Por ejemplo, el profesor conoce que, en un curso introductorio y elemental de Álgebra Lineal, en lugar de considerar el contexto general de los espacios vectoriales, esta Teoría se focalizará en los espacios R^n.

METODOLOGÍA

La metodología de la investigación desarrollada puede describirse como cualitativa e interpretativa (Lincoln & Guba, 1985) y su diseño consiste en un estudio de caso instrumental (Stake, 2007), debido a que se pretende lograr una mejor comprensión del conocimiento del profesor universitario ligado a su práctica y establecer relaciones entre elementos de su conocimiento especializado sobre un determinado contenido matemático.

Josefina –seudónimo de la profesora observada– es Licenciada en Administración de Empresas. En el año 2013, al inicio de la investigación, contaba con una experiencia de siete años en el dictado de clases prácticas[16] de Álgebra Lineal para alumnos de una Facultad de Ciencias Económicas en Argentina. Esta profesora ha sido seleccionada por su interés para colaborar en la investigación y, además, por ser integrante del equipo docente en el que la primera autora de este artículo se desempeña como profesora responsable. Asimismo, porque con posterioridad se aspira a diseñar e implementar una propuesta didáctica en la cátedra, cuyas actividades puedan ser elaboradas por todos los miembros del equipo docente. Para lo cual se advierte la necesidad de profundizar sobre los dominios de conocimiento matemático especializado (conocimiento del contenido y didáctico del contenido) del profesor.

El programa de la asignatura está compuesto por matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales –representación gráfica y resolución algebraica–, espacios vectoriales, transformaciones lineales y programación lineal.

Los datos corresponden a clases grabadas en vídeo, empleando el *método de observación no participante* (Cohen & Marrion, 2002), entrevistas semiestructuradas, realizadas antes de la observación, y una propuesta de examen presentada por Josefina, en los que se aborda la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales y su aplicación dentro de la misma asignatura. De estos instrumentos, para esta comunicación la información seleccionada alude a la resolución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales utilizando la regla de Cramer. Los datos recolectados han sido transcriptos y divididos en unidades de análisis, que conciernen a las

16 Se refiere a la resolución de ejercicios o problemas en una clase posterior al dictado de una clase teórica.

expresiones orales y escritas de la profesora y de sus estudiantes. Mediante el método de *análisis de contenido* (Bardin & Suárez, 1996) se ha examinado la transcripción completa de la clase y se han seleccionado episodios[17] en los que se presume evidencia o indicio de conocimiento en la acción y las declaraciones de la profesora, que hicieran alusión a los subdominios y categorías del MTSK y así, profundizar en el conocimiento que se observa. Esto ha permitido identificar también relaciones entre los diferentes subdominios de conocimiento.

Flores–Medrano (2015) realiza una distinción entre evidencia e indicio de conocimiento. Se emplea evidencia cuando se dispone de datos claros que permiten justificar el conocimiento –profundo o superficial– que se advierte. En cambio, indicio hace referencia a la presunción de que el profesor posee un determinado conocimiento. Un indicio de conocimiento se convierte en evidencia cuando se dispone de datos provenientes de otros instrumentos –p. ej., entrevistas, clases previas o el diario del profesor– que clarifiquen la evidencia.

RESULTADOS

A continuación, se exhiben extractos de episodios[18] de una clase de Josefina complementados con fragmentos de entrevistas que hacen alusión a aspectos relacionados. Estos ofrecen indicios o evidencias de conocimiento matemático especializado en su práctica, de acuerdo con los subdominios del MTSK.

En clases previas, la profesora ha utilizado distintos registros de representación[19] para los sistemas de ecuaciones lineales y los ha clasificado de tres maneras diferentes (en cuadrado o rectangular, homogéneo o no homogéneo y, compatible –determinado o indeterminado– o incompatible). Y para resolverlos, en forma

17 Fragmentos o partes de una clase.
18 Para indicar las intervenciones en la sesión se empleará “J” para la profesora y “A” o “As” para un estudiante -sin distinguir cuando sean diferentes personas- o varios alumnos, respectivamente.
19 Como un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas y una ecuación matricial, de la forma, A . X = B.

algebraica, ha utilizado el métodos de Gauss–Jordan y el método de la Inversa y, el teorema de Rouché–Fröbenius para determinar el tipo de compatibilidad.

Siguiendo su guía de ejercicios, Josefina se dispone a resolver por la regla de Cramer cuatro sistemas de ecuaciones lineales (que ya han sido clasificados de acuerdo con la existencia o no de solución, en sesiones previas). Después de leer la consigna [20] y antes de explicar el procedimiento, la profesora se dirige a la clase para indagar acerca del método :

> J: […] ¿Qué nos dice la regla de Cramer?
>
> A: Que el sistema de ecuaciones lineales tiene que ser cuadrado y el determinante debe ser distinto de cero.
>
> J: Bien, con esas dos características podemos aplicar la regla de Cramer y trabajar. […] ¿cada variable del sistema me va a quedar planteada como qué, como el cociente entre qué? […] el cociente de dos determinantes. El denominador va a ser el determinante de la matriz de coeficientes y como numerador el determinante de una matriz que vamos a construir, ¿qué características va a tener? ¿Alguien se acuerda?
>
> A: Se reemplaza una columna por la primer[a] columna cambiando así por la matriz de términos independientes.
>
> J: Es una matriz que la vamos a llamar C, para llamarla en forma genérica, y va a surgir de la matriz de coeficientes a la cual yo le voy a reemplazar si quiero calcular la primer[a] incógnita, la primer[a] columna por la matriz de términos independientes. (**Unidad 1**)

Hay evidencias de que Josefina conoce el enunciado de la regla de Cramer al establecer, de manera coloquial, las condiciones que debe cumplir un sistema de ecuaciones lineales y cómo se obtiene el valor de cada variable (KoT–*Definiciones, Propiedades y sus fundamentos*). Cuando se refiere a cómo determinar el valor de la primera incógnita, se advierten indicios de su conocimiento sobre la notación que utilizará para la matriz que debe construir y qué elementos debe considerar (KoT–*Registros de representación*). Además, Josefina muestra su conocimiento acerca de

20 Cuyo enunciado es J: *“Resuelva los sistemas de ecuaciones lineales correspondientes a los incisos a, e, f y g correspondientes al ejercicio 3 mediante la regla de Cramer, en caso de que sea posible. Justifique la respuesta”*

¿Cuándo se puede hacer? y *¿Cómo se hace?* (ambos, KoT–*Procedimientos*) la resolución de un sistema de ecuaciones lineales empleando este método.

En cada uno de los ejercicios, la profesora utiliza el mismo modus operandi para enseñar el procedimiento. Comienza escribiendo el sistema como un conjunto de ecuaciones lineales que, posteriormente, expresa de otra manera. Por ejemplo, cuando trabaja con el primer sistema de ecuaciones lineales manifiesta:

> J: lo que estoy escribiendo es lo que ya tenemos planteado en el ejercicio tres. Estoy trayendo nuevamente ese ejercicio.

$$6)\ a) \begin{cases} x+y=1-2z \\ x+2y-z=-2 \\ 3y+z+x=5 \end{cases}$$

$$A_{3x3}\ .\ X_{3x1}=B_{3x1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(**Imagen 1**: expresión en el pizarrón del inciso a)

Fuente: propia

En lo anterior, se aprecian indicios de que Josefina sabe que los sistemas de ecuaciones lineales se pueden expresar, simbólicamente, como un conjunto finito de ecuaciones lineales simultáneas o una ecuación matricial de la forma $A\ .\ X=B$. En este último caso, pone de manifiesto su conocimiento sobre qué representan las letras empleadas para las matrices intervinientes –con A la matriz de coeficientes, X la de incógnitas y B para la matriz de los términos independientes– y cuáles son sus órdenes respectivos; también sabe que los elementos de las matrices –numéricos o literales– se escriben entre corchetes (KoT–*Registros de Representación*). (**Imagen 1**)

Estos indicios corresponden a evidencias de su conocimiento, las cuales han sido percibidas en una clase anterior. En esta, la profesora solicitó a un estudiante que presentara en el pizarrón su resolución correspondiente a otro ejercicio, manifestando:

> J: […] pasaste de un sistema que estaba escrito en notación algebraica y al que le podías identificar tres ecuaciones y tres incógnitas y lo escribiste a través de una ecuación matricial, […] identificando qué elementos van a formar parte de la matriz de coeficientes, cuáles de la matriz de incógnitas y cuáles de la de términos independientes. Como en mi escritura algebraica yo tenía tres ecuaciones, sé que estas tres ecuaciones van a estar reflejadas en cada una de las filas de la matriz de coeficientes y si tengo tres incógnitas, en cada una de las columnas de la matriz de coeficientes. Por eso, mi matriz A va a ser de orden tres por tres. (**Unidad 1 de una lección previa**)

En el extracto anterior, se aprecian imprecisiones en el vocabulario matemático de la profesora al decir, *pasaste de un sistema que estaba escrito en notación algebraica*, para indicar que el sistema de ecuaciones lineales estaba expresado como un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas; al igual que en la Unidad 1, donde emplea el vocablo variable para indicar cómo se obtiene el valor de cada incógnita. Si bien no se conoce a qué se deben estas faltas de rigor, al momento expresarse, quizá se deba a Josefina que no les atribuye la importancia que tienen.

Antes de resolver cada inciso, la profesora analiza que se verifiquen las condiciones establecidas en el enunciado de la regla de Cramer. Es por ello, que focaliza la atención en determinar si el sistema de ecuaciones lineales es cuadrado y el determinante de su matriz de coeficientes es distinto de cero. Esto parece apoyarse en su conocimiento sobre dificultades de los estudiantes (KFLM–*Fortalezas y Dificultades*) y en cómo las aborda, tal como lo evidencia en las respuestas que brinda en la entrevista:

En general, la dificultad que suele presentar en este tema [refiriéndose a la regla de Cramer], es que si la consigna dice “resuelve, de ser posible, por este método”, no tienen en cuenta lo “de ser posible”. […] sí tienen en cuenta que el sistema sea cuadrado, pero no se detienen en calcular el determinante de la matriz de coeficientes, sino que aplican directamente el método de resolución. [Agrega que para sortearla] hago hincapié con los alumnos respecto a qué tipo de sistemas [de ecuaciones lineales] pueden resolverse mediante esta regla, intentando que los estudiantes también hagan esta reflexión antes de resolver los ejercicios en forma individual. (**Unidad E1**[21])

Josefina clasifica todos los sistemas de ecuaciones lineales del ejercicio analizados en este documento, en cuadrado o rectangular, sin ofrecer indicios o evidencias de en qué sustenta dicho conocimiento. Para el sistema lineal del inciso a), presentado en la Imagen 1, expresa:

> J: [...] ¿el sistema de ecuaciones lineales es cuadrado? Sí. ¿Y la segunda característica [se refiere al determinante de la matriz de coeficientes]? (**Unidad 2**)

La profesora copia el sistema de ecuaciones lineales e inmediatamente su expresión matricial correspondiente (**Imagen 2**)

$$6)\ f)\ \begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + \frac{1}{2}y = 4 \\ -6x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$A_{3x2}\ .\ X_{2x1} = B_{3x1}$$

Fuente: propia

(**Imagen 2:** expresión en el pizarrón del inciso f)

y lo clasifica en rectangular porque no es cuadrado, tal como se aprecia en la **Unidad 3**:

> J: [...] ¿Qué pasa con este sistema de ecuaciones lineales? ¿Es cuadrado?
>
> A: No.
>
> J: No, al ser rectangular no lo puedo resolver por la regla de Cramer porque no cumple con una de sus condiciones. El sistema es rectangular. (**Unidad 3**)

En clases previas, Josefina ha evidenciado conocer que un sistema de ecuaciones lineales de la forma $A\ .\ X = B$ se puede clasificar, excluyentemente, en cuadrado o rectangular. Para ello, su matriz de coeficientes (A) debe poseer idéntica clasificación, es decir, cuadrada o rectangular, que se realiza comparando la cantidad de filas con

---

21 Notamos como Unidad i a la i-ésima unidad que proviene de la observación, como Unidad Ej a la j-ésima unidad que proviene de la entrevista y como Unidad EP_k a la k-ésima unidad que proviene de su propuesta de examen.

la cantidad de columnas que posee la matriz, que, a su vez, queda expuesto cuando indica su orden (KoT–*Definiciones, Propiedades y sus fundamentos*). (**Unidad 2 de una lección previa**)

> J: ¿[En] qué me fijo en la expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales para poder clasificarlo en cuadrado o rectangular?
>
> A: En el orden de la matriz de coeficientes
>
> J: Bien, en el orden de la matriz de coeficientes […]. Por eso, mi matriz A va a ser de orden tres por tres. Si tengo que clasificar este sistema de ecuaciones lineales, en función de si es cuadrado o rectangular. ¿Qué voy a decir?
>
> A: Que es cuadrado.
>
> J: Que es cuadrado. ¿Por qué?
>
> A: Porque la matriz de coeficientes es cuadrada.
>
> J: Bien, porque la matriz de coeficientes es cuadrada. (**Unidad 2 de una lección previa**)

Hay evidencias de que la profesora sabe que toda matriz cuadrada tiene asociado un único número, denominado su determinante (KoT–*Definiciones, Propiedades y sus fundamentos)*, que puede ser calculado aplicando algún método[22] (KoT–*Procedimientos*). Y, conoce que, de acuerdo al valor del rango de toda matriz cuadrada, se puede concluir si su determinante es igual o distinto de cero, estableciendo esta conexión intraconceptual. (**Unidad 4**)

> A: Profe, ahí cuando resolvimos y sabemos que el rango de esta matriz es tres.
>
> J: Sí.
>
> A: El máximo rango es tres entonces sabemos que tiene determinante.
>
> J: No, sabemos que tiene determinante distinto de cero. Todas las matrices cuadradas tienen determinante.
>
> A: Ah, sabemos que tiene determinante distinto de cero, pero no sabemos cuánto es, por eso lo buscamos. Yo lo hice por reducción a uno de menor orden ¿o se puede usar Sarrus?

22 Regla de Sarrus, regla de Laplace y el método de reducción a uno de menor orden.

J: Es lo mismo, el determinante es único, cualquiera sea el método que se use. (**Unidad 4**)

También, sabe que se puede concluir que el determinante de una matriz cuadrada es cero, empleando alguna propiedad o identificando algunas particularidades entre los elementos –una línea formada sólo por ceros o dos líneas paralelas idênticas, entre otras– (en todos los casos, KoT–*Definiciones, Propiedades y sus fundamentos*). Sin embargo, en este extracto, se advierte, nuevamente, otra imprecisión en la expresión oral de Josefina cuando manifiesta *"Bien, tiene todos sus elementos iguales a cero, su determinante es cero"* lo que llevaría a considerar que hace alusión a una matriz (en este caso, correspondería a una matriz nula) cuando en realidad, sólo pretende enunciar la propiedad que establece: si una matriz cuadrada tiene una línea nula entonces su determinante es igual a cero. Independientemente de esto, se observa que Josefina sabe qué símbolos utilizar tanto para una matriz (C_1) como para su determinante ($|C_1|$) (KoT–*Registros de representación*). (**Unidad 5**)

J: Primero [hay que] construir las matrices. C_1 ¿a qué va a ser igual? [Una estudiante expresa cuáles son los elementos de cada columna de la matriz mientras la profesora los escribe en el pizarrón]

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

J: Bien. Y luego, tenían que plantear el cálculo del determinante de C_1 ¿qué pasaba con el determinante de esa matriz?

$$|C_1| = 0$$

As: Es igual a cero.

J: ¿Tuvieron que hacer muchos cálculos?

As: No.

J: ¿Cómo justificaron que era igual a cero?

A: Por una propiedad, cuando una columna es nula, el determinante es igual a cero.

> J: Bien, tiene todos sus elementos iguales a cero, el determinante igual. (**Unidad 5**)

Hay evidencias de que Josefina conoce diversas situaciones sobre la manera en que los estudiantes se relacionan con los contenidos (KFLM–*Formas de interacción con un contenido matemático*). Entre ellas, la profesora muestra saber que para obtener el determinante de una matriz de orden 3x3, los estudiantes emplean la regla de Sarrus, frente a cualquier otro método. Así, lo manifiesta en una entrevista cuando reflexiona acerca de su propuesta de examen,

> J: Pensando en el método [para calcular el determinante de una matriz] […] en general, en clase el método de Sarrus es el preferido. (**Unidad EP 1**)

Y, también, cuando los estudiantes utilizan un mismo ejercicio (por ejemplo, un sistema de ecuaciones lineales clasificado, según su compatibilidad, a través del teorema de Rouché–Fröbenius) para resolver por otro método, no suelen tomar en consideración lo que analizaron o concluyeron; lo que les permitiría identificar información relevante (haciendo, por ejemplo, algunas conexiones intraconceptuales) sin necesidad de efectuar cálculos nuevos o realizarlos de manera reiterada (**Unidad 6**).

> J: ¿Por qué sabés que el determinante es distinto de cero? [se refiere a la matriz A de la Imagen 1]
>
> A: Porque lo calculé.
>
> J: Esa es una opción. ¿Cuánto te dio el determinante de A?
>
> A: Cinco, no sé si está bien.
>
> J: El determinante de A es distinto de cero porque lo calculo y me da cinco. ¿Qué otra opción hay? Si yo quisiera saber de antemano y me dicen, no puede bajo ningún punto de vista calcular el determinante. ¿Cómo puedo llegar a saber que el determinante es distinto de cero?
>
> A: [Por] el rango.
>
> J: Bien. ¿Qué tenía que ver el rango con el determinante? […] si yo tengo una matriz cuadrada, le calculo su rango y es máximo. ¿Qué puedo saber del determinante?

As: Que es distinto de cero.

J: Que es distinto de cero, no voy a conocer su valor, pero al menos sí voy a poder afirmar que es distinto de cero. (**Unidad 6**)

En la regla de Cramer, el valor de cada variable surge del cociente entre dos determinantes, lo que lleva a calcular tantos cocientes como incógnitas posee el sistema de ecuaciones lineales. Josefina evidencia su conocimiento de que el determinante de la matriz de coeficientes es el denominador, en todos los cocientes; mientras que cada numerador corresponde al determinante de una matriz que se construirá (KoT–*Procedimientos ¿Cómo se hace?*) y que denotará con C_j (KoT–*Registros de representación*). Del sistema de ecuaciones lineales presentado en la Imagen 1, la profesora muestra saber cómo se relaciona el subíndice de cada matriz C_j con la incógnita cuyo valor se pretende obtener (KoT–*Registros de representación*). (**Unidad 7**)

J: Para resolverlo, cada incógnita va a quedar planteada como el cociente de dos determinantes. El determinante del denominador [es el] de la matriz A. ¿Qué pasaba con el determinante del numerador? Vamos a plantearlo para este caso

$$x = \frac{|C_1|}{|A|} \qquad y = \frac{|C_2|}{|A|}$$

$$z = \frac{|C_3|}{|A|}$$

(**Unidad 7**)

En lo que sigue, se hace evidente el conocimiento de la profesora sobre cómo construir cada matriz C_j (KoT–*Definiciones, Propiedades y sus fundamentos*). Puesto que Josefina aborda estas definiciones, ejemplificando con las matrices C_1, C_2 y C_3 en las que hace notar a sus estudiantes cuál es la columna de la matriz A, cuyos elementos son reemplazados por los términos independientes de las ecuaciones (KoT–*Procedimientos ¿Cómo se hace?*). (**Unidad 8**)

J: ¿Cómo se construye cada una de estas matrices C? […] Como voy a trabajar con los coeficientes que acompañan a “x” Voy a tomar todos los coeficientes que acompañan a “x” y los voy a reemplazar por la matriz de términos independientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

J: Así tengo planteada la matriz C_1

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

J: ¿Qué cambia de la matriz A? la primer[a] columna, que eran los coeficientes que acompañan a “x”[23] ¿Qué valores uso ahora? Los de la matriz de términos independientes. […] Construimos C_2. La primer[a] columna va a quedar tal cual y la segunda es la que va a cambiar

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

J: […] ¿Qué nos faltaría?

A: calcular C_3

J: bien, calcular C_3 [se refiere a construir la matriz]

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

(**Unidad 8**)

El uso de estas matrices revela el KMT de Josefina, referido a la categoría *Estrategias, Técnicas, Tareas y Ejemplos,* al tomar en cuenta que las utiliza para mostrar, a sus estudiantes, todas las posibilidades que tiene la matriz B, de ir ocupando el lugar de las diferentes columnas de A cuando se efectúa el reemplazo.

23 Con “x”, “y” o “z” se hace referencia a las incógnitas o variables.

En el pizarrón, la profesora lo visibiliza para cada matriz, encerrando con un óvalo vertical la columna cuyos elementos corresponden a los términos independientes.

En lo que respecta a la solución de un sistema de ecuaciones lineales, obtenida por la regla de Cramer, la profesora evidencia saber que se indica expresando el valor que asume cada una de las incógnitas (KoT–*Procedimientos: Característica del resultado*) como se advierte en el siguiente fragmento,

> J: Entonces ¿"x" a qué es igual? Va a ser igual a menos treinta sobre cinco. Y esto es igual a menos seis.
>
> $$\boxed{x = \frac{|C_1|}{|A|} = \frac{-30}{5} = -6}$$
>
> J: Así logro hallar el valor de "x", como el cociente de dos determinantes. […] ¿Qué voy a hacer para poder resolver "y" y "z"?
>
> $$\boxed{y = \frac{|C_2|}{|A|} = \frac{15}{5} = 3 \qquad z = \frac{|C_3|}{|A|} = \frac{10}{5} = 2}$$
>
> J: Entonces, ¿a qué llegamos? A que "x" es igual a menos seis, "y" es igual a tres, y "z" es igual a dos. Entonces hemos resuelto el sistema de ecuaciones lineales llegando a la solución de cada variable aplicando la regla de Cramer. (**Unidad 9**)

Durante el desarrollo de la sesión, Josefina ha analizado cuatro ejemplos que recogen todas las posibilidades que podrían presentarse al intentar resolver un sistema de ecuaciones lineales por la regla de Cramer, que ponen de manifiesto su KMT (*Estrategias, Técnicas, Tareas y Ejemplos*). La variabilidad de los ejercicios le permite hacer hincapié en aspectos relevantes del contenido, distinguiendo, inicialmente, entre los sistemas de ecuaciones lineales que podrán ser resueltos por este método, de los que no. Y, en aquellos casos en los que sea factible aplicarlo, enseñar cómo se realiza el procedimiento propiamente dicho, y la manera en que se identifica la solución única. Con lo cual, se evidencia el conocimiento de Josefina sobre la enseñanza de la matemática (KMT) sustentado y/o relacionado con su conocimiento de los temas (KoT).

CONCLUSIONES

En este artículo nos propusimos indagar sobre el conocimiento que sustenta la práctica de una profesora universitaria, que imparte clases de Álgebra Lineal, utilizando el modelo MTSK. Tras el análisis efectuado se ha logrado apreciar una integración entre su conocimiento de los temas (KoT), las características del aprendizaje (KFLM) y de la enseñanza de las matemáticas (KMT).

El conocimiento evidenciado por Josefina gira en torno a cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales usando la regla de Cramer (un conocimiento del procedimiento que incluye cuándo se puede hacer, cómo se obtiene y expresa la solución). En relación con los fundamentos de este procedimiento muestra conocimiento de las propiedades en las que se sustenta (la propia regla, la clasificación de matrices en cuadradas y rectangulares, la unicidad del determinante de una matriz, y la aplicación del rango para determinar si el determinante de una matriz cuadrada es distinto de cero). Josefina usa la notación convencional para estos contenidos. En lo que se refiere al aprendizaje y enseñanza del contenido, su conocimiento de qué métodos suelen usar los estudiantes en el cálculo del determinante de una matriz y de que suelen obviar comprobar si se cumplen las condiciones para aplicar el procedimiento de la regla de Cramer, parecen sustentar cierta variedad en el uso de ejemplos y su énfasis en comprobar que se cumplen las condiciones de aplicación del mencionado procedimiento.

No se observan evidencias de conocimiento sobre cómo se relacionan estos contenidos con otros bloques de contenidos (KSM) ni de la práctica matemática. Esto no quiere decir que la profesora no posea estos conocimientos, si bien da muestras de que en esta sesión aborda el contenido de manera local, sin relacionarlos con otros contenidos. Por otro lado, las imprecisiones observadas en la sesión, de las que nos preguntamos si son de carácter conceptual o terminológico, y la poca atención a cómo se hace matemáticas (en el sentido del KPM), refuerzan esa comprensión fundamentalmente procedimental que muestra Josefina.

El conocimiento descrito sustenta una práctica donde se va desgranando paso a paso la aplicación del procedimiento de la regla de Cramer, con énfasis en la verificación de las condiciones necesarias y en el uso de la notación que considera correcta. Con lo cual, el conocimiento matemático que sustenta la práctica de Josefina parece mostrar una comprensión más *instrumental* que *relacional* de acuerdo con Skemp (1978), puesto que se aplican reglas sin necesidad de justificarlas, asociando ideas existentes con conceptos y procedimientos en los que predomina el "cómo hacer". En cambio, en la comprensión relacional prevalecen el "saber qué hacer" y los "por qué se debe hacer", donde las ideas requeridas para comprender un tema en particular, resultan ser básicas para comprender otros temas y flexibilizan la actuación, posibilitando diferentes maneras de llevar adelante la tarea.

Consideramos que este análisis aporta al conocimiento matemático especializado del profesor universitario de Álgebra Lineal. No obstante, creemos que quedan diversas tareas por realizar. Por un lado, ahondar en el conocimiento que sustenta la práctica de Josefina cuando enseña a resolver sistemas de ecuaciones lineales por otros métodos algebraicos, que también involucran matrices, y cómo los emplea en otros bloques de contenidos, ¿el conocimiento revelado seguirá siendo, principalmente, procedimental? ¿o se movilizará un conocimiento conceptual, al que Hiebert y Lefevre (1986, citado en Kontorovich, 2020) caracterizan como *conocimiento rico en conexiones* (p. 591)? También nos planteamos si otro profesor impartiendo este tipo de clases podría evidenciar conocimientos procedimentales y conceptuales entrelazados (como sostiene Kieran. 2003, en Kontorovich, 2020, p. 592, para quien *el aprendizaje de los procedimientos … es de naturaleza intrínsecamente conceptual*[24]).

Comprender el conocimiento matemático especializado que sustenta la práctica del profesor universitario contribuiría a la reflexión de los aspectos que intervienen en ella, en pos de diseñar y llevar adelante proyectos de formación específicos, en los

24 Kieran herself argues that the learning of procedures, their updating, and revising are of an intrinsically conceptual nature (p. 4).

que se ponga de relieve que el conocimiento de la materia a enseñar es necesario, aunque no suficiente.

REFERENCIAS

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Bardin, L. & Suárez, C. (1996). *Análisis de contenido* (2ª ed.). Akal.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. & Muñoz–Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII CERME* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores–Medrano, E., Escudero–Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar–González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Charalambous, C. & Pitta-Pantazi, D. (2016). *Perspectives on Priority Mathematics Education*: Unpacking and Understanding a Complex Relationship Linking Teacher Knowledge, Teaching, and Learning. En L.D. English y D. Kirshner (Eds.), Handbook of International Research in Mathematics Education: Third edition. (pp. 19-59). New York, NY: Routledge.

Cohen, L & Marrion, L. (2002). *Método de investigación cualitativa*. Madrid: La Muralla.

Dorier, J.L. (2002). *Teaching Linear Algebra at University*. En L. Tatsien (Ed.), Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vol. III, pp. 875–884). Beijing, China: Higher Education Press.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et penseé humaine*. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. [Semiosis and human thought. Semiotic registers and intellectual learning] Berne: Switzerland: Peter Lang.

Flores–Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).* Tesis doctoral. Huelva: Universidad de Huelva. (http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11503) ISSN

Flores–Medrano, E., Escudero–Ávila, D., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of Specialized Content Knowledge. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3055–3064). Antalya, Turkey: METU and ERME.

Gómez–Chacón, I. Mª (2017). Epistemología personal y conocimiento matemático del profesor. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. *Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp.48-67). Huelva: CGSE.

Ibañes, M., & Ortega, T. (1998). La Demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria. *Educación Matemática*, 9(1), 65-104.

Kontorovich, I. (2020). Theorems or procedures? Exploring undergraduates' methods to solve routine problems in linear algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 32(4), 589–605.

Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). Naturalistic Inquiry. Beverly Hills, Ca: Sage Publications.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L. & Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco, y M. Palarea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 429–438). Ciudad Real: SEIEM.

Nardi, E. (2017). From advanced mathematical thinking to university mathematics education: A story of emancipation and enrichment. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the CERME 10* (pp. 9–30). Dublin, Ireland: ERME.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22.

Sosa Guerrero, L., Flores–Medrano, E., y Carrillo Yáñez, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación matemática*, 28(2), 151–174.

Skemp, R. (1978). *Relational understanding and instrumental understanding. Arithmetic Teacher,* 26(3), 9-15.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. (4a ed.) Morata.

Trigueros Gaisman, M., Maturana Peña, I., Parraguez González, M. & Rodríguez Jara, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una transformación lineal. *Educación Matemática*, 27(2), 95-124.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

1ª autor: conceitualização; curadoria de dados; análise formal; investigação; metodologia; visualização; redação – rascunho original.

2º autor: conceitualização; administração do projeto; supervisão; redação – revisão e edição.