Tangram
Revista de Educação Matemática

DOI: 10.30612/tangram.v4i2.14328

Desarrollo histórico del concepto de volumen y su tratamiento en libros de texto colombianos

Desenvolvimento histórico do conceito de volume e do seu tratamento em livros escolares colombianos

Historical development of the concept of volume and its treatment in Colombian textbooks

Wilmer Ríos-Cuesta
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle - Univalle
Cali,Colômbia
E-mail: wilmer.rios@correounivalle.edu.co
Orcid: 0000-0001-8129-2137

Resumen: El concepto de volumen ha presentado dificultades en su enseñanza y aprendizaje, algunas de ellas se asocian al hecho de que se enseña y aprende de manera algorítmica, reduciéndose a la aplicación de fórmulas que, en muchas ocasiones, los estudiantes confunden. Lo anterior ha provocado diversas investigaciones que buscan dar cuenta de su riqueza y de algunas posibilidades para su enseñanza. Sin embargo, los libros de texto colombianos no hacen uso de los resultados de estas investigaciones ni del desarrollo histórico del concepto, sino que se limitan a presentar algoritmos y ejercicios para resolver en clase. En este estudio se ofrece una revisión histórica que permite comprender la evolución del concepto y brinda elementos a los profesores para desarrollar secuencias didácticas en contextos retadores que los ayuden a comprender la naturaleza del concepto, sus usos y posibilidades y sortear la ausencia en los libros de texto colombianos.

Palabras clave: Concepto de volumen. Desarrollo histórico. Libros de textos.

Abstract: The concept of volume has presented difficulties in its teaching and learning, some of them are associated with the fact that it is taught and learned in an algorithmic way, being reduced to the application of formulas that, on many occasions, students confuse. This has led to several investigations that seek to account for its richness and some possibilities for its teaching. However, Colombian textbooks do not make use of the results of this research or of the historical development of the concept but limit themselves to presenting algorithms and exercises to be solved in class. This study offers a historical review that allows understanding the evolution of the concept and provides elements for teachers to develop didactic sequences in challenging contexts that help them understand the nature of the concept, its uses and possibilities and overcome its absence in Colombian textbooks.

Keywords: Concept of volume. Historical development. Textbooks.

Resumo: O conceito de volume tem apresentado dificuldades no seu ensino e aprendizagem, algumas delas estão associadas ao facto de ser ensinado e aprendido de forma algorítmica, sendo reduzido à aplicação de fórmulas que, em muitas ocasiões, os estudantes confundem. Isto levou a várias investigações que procuram dar conta da sua riqueza e de algumas possibilidades para o seu ensino. Contudo, os livros escolares colombianos não fazem uso dos resultados desta investigação ou do desenvolvimento histórico do conceito, mas limitam-se a apresentar algoritmos e exercícios a resolver em classe. Este estudo oferece uma revisão histórica que permite compreender a evolução do conceito e fornece elementos para os professores desenvolverem sequências didáticas em contextos desafiantes que os ajudam a compreender a natureza do conceito, os seus usos e possibilidades e a ultrapassar a sua ausência nos livros escolares colombianos.

Palavras-chave: Conceito de volume. Desenvolvimento histórico. Livros escolares.

Recebido em
11/04/2021
Aceito em
13/06/2021

INTRODUCCIÓN

La génesis

La historia del concepto de volumen ha estado ligada a la historia del cálculo y al desarrollo de la geometría. Los primeros registros datan de aproximadamente 5000 años. En el papiro de Moscú, conocido anteriormente como papiro Goleníshchev (figura 1), se encuentran 25 problemas matemáticos de los cuales llama la atención el número 14 que trata del volumen de una pirámide truncada de base cuadrada.

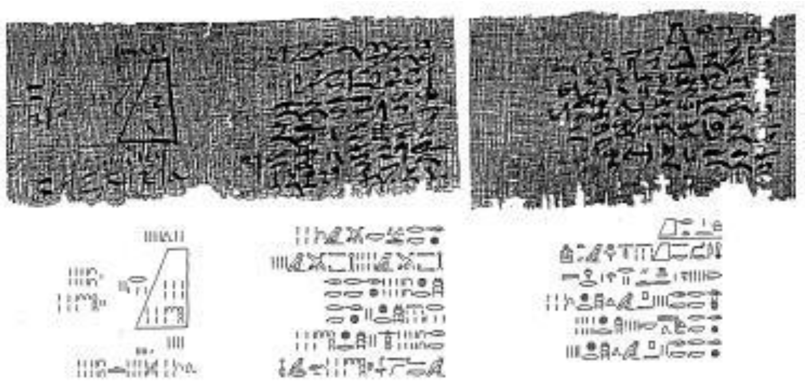

Figura 1. Papiro de Moscú 1890 a.C.

Fuente: Wikipedia

En el papiro de Ahmes, también conocido como Papiro Matemático Rhind (figura 2), se encuentran 87 problemas matemáticos de los cuales del 41 al 46 y del 56 al 60 son problemas sobre volúmenes, capacidades y poliedros. Gillings (1982) destaca que "dichos problemas proponen el cálculo de volumen de un cilindro cómo el producto del área de la base por la altura" (p. 146).

Figura 2. Papiro de Ahmes 1550 a.C.
Fuente: Wikipedia

A ciencia cierta no se sabe si los egipcios conocían la fórmula para calcular el volumen de una pirámide truncada, o si sólo conocían el proceso para calcular un caso en particular. Por ejemplo, en el caso del problema 14, los egipcios lograban calcular el volumen de una pirámide cuadrangular truncada con arista de base inferior igual a 4, arista de base superior igual a 2 y altura igual a 6 (Sáiz, 2002), el procedimiento que se explica en el papiro es el siguiente:

a. Se eleva 4 al cuadrado
b. Se duplica este 4
c. Se eleva 2 al cuadrado
d. Se suman estos resultados y resulta 28
e. Se obtiene un tercio de 6 y resulta 2
f. 2 se multiplica por la suma obtenida anteriormente
g. El resultado es 56

Se necesita un manejo con cantidades abstractas y ciertas habilidades algebraicas para poder llegar a esta aproximación del volumen de la pirámide truncada del ejercicio del papiro (Gillings, 1982), la cual corresponde a la fórmula $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$. Sin embargo, solo lo hacían para la pirámide truncada con los datos mencionados anteriormente.

Según Gillings (1982) los egipcios tenían problemas con el uso de las unidades, ellos calculaban el volumen de un cilindro mediante una fórmula que les permitía obtener el resultado en medidas de granos (i.e. cálculo de la capacidad de un contenedor de granos), otras veces calculaban el área de la base por la altura y luego transformaban las unidades obtenidas en otras de capacidad.

Del método de exhausción al libro de los elementos

Demócrito en el año 500 a.C. encontró una manera de calcular el volumen de una pirámide estableciendo que éste es igual a un tercio del volumen de un prisma de igual base y altura, luego Eudoxo (409-356 a.C.) hace una demostración en la cual calculaba de manera exhaustiva áreas y volúmenes mediante la descomposición de la figura geométrica en áreas o volúmenes conocidos, este método se llama exhausción (Boyer, 1986).

En el libro X de Los Elementos de Euclides (323-285 a.C.) se describe de manera más rigurosa el método de exhausción de Eudoxo (Kline, 1990). Sin embargo, en el libro XII usa el lema de exhausción para para demostrar cómo obtiene las fórmulas para calcular el volumen del prisma y pirámides. Sobre este aspecto, Sáiz (2002) afirma que:

> La mayor parte de las fórmulas contenidas en el Libro XII de Los Elementos era conocida por los geómetras de los valles del Eufrates y el Tigris, la importancia del trabajo de Euclides respecto al concepto volumen, estriba en la organización, formalización y demostración de estos resultados. (p. 5)

Arquímedes (250 a.C.) usando el método de exhausción, logra profundizar más al introducir el peso y el centro de gravedad de los cuerpos para calcular un volumen desconocido en términos de otros cuerpos conocidos, lo que le permitió conseguir volúmenes más complicados como el de la esfera. Arquímedes lo denominó “el método” y en un manuscrito hallado en el siglo XIX detalla paso a paso el procedimiento que utiliza para calcular el volumen revelando el proceso de análisis para llegar a ellos.

De la suma de infinitos a la integral

Según Sáiz (2002), Kepler se interesó en los trabajos de Arquímedes, pero desarrollando sus propios métodos de integración. Kepler concibió la esfera como la suma de muchas pirámides con vértices en el centro e infinitesimalmente cercanas a la superficie de la esfera, esto se conoce como la *conjetura de Kepler*. Además, calcula el volumen de sólidos de rotación de superficies. En su obra, Kepler se interesó en el cálculo del volumen de barriles de vino lo cual favoreció el comercio.

Posteriormente, en 1635, el italiano Bonaventura Cavalieri muestra un método para obtener volúmenes (figura 3) el cual plantea: Si dos cuerpos tienen la misma altura y además tienen igual área en sus secciones planas realizadas a una misma altura, poseen entonces igual volumen, esto se conoce como *principio de Cavalieri*.

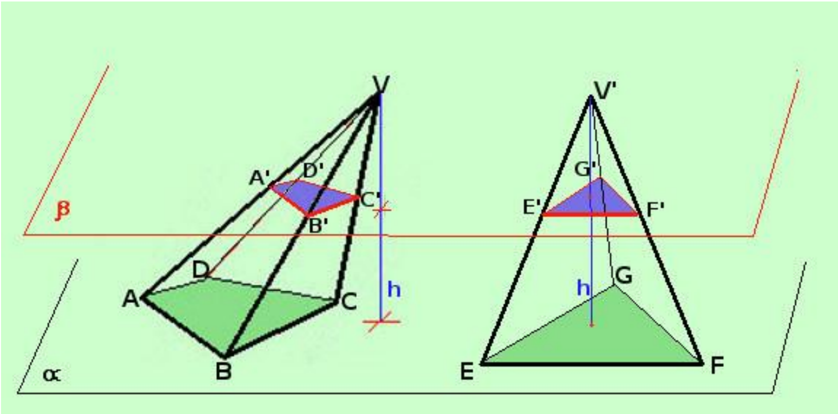

Figura 3. Principio de Cavalieri

Fuente: http://www.ripmat.it/mate/g/gj/gjf.html

En los tiempos de Fermat y Torricelli (mediados del siglo XVII), se trabajó mucho en el cálculo de áreas, volúmenes y centro de gravedad. Se destaca el trabajo de Torricelli quien en 1641 descubrió que sólidos de longitud infinita podían tener un volumen finito, este resultado fue publicado en 1644 en su libro *De solido hiperbólico acuto* incluido en Opera Geométrica (Sáiz, 2002).

Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716) considerados los precursores del cálculo, usaron notaciones diferentes para trabajar derivadas e integrales. Sin embargo, sus trabajos sobre las integrales sirvieron a la obtención de longitudes de arco, áreas y volúmenes de cuerpos. La integración permite calcular el volumen de un sólido de revolución y el de un cuerpo acotado por dos superficies. Posteriormente, Weierstrass (1815-1897) seducido por las funciones elípticas, formaliza la definición de continuidad de una función, límite y derivada, demostrando el teorema del valor medio, y aportando el teorema de Bolzano-Weierstrass, Heine-Borel, entre otros. También introdujo las letras griegas épsilon y delta que se usan actualmente (Sáiz, 2002).

De Cantor a Lebesgue

Georg Cantor (1845-1918) publicó en 1884 un libro llamado *De la puissance des ensembles parfaits de points* en el cual dio una noción de volumen *n-dimensional* para conjuntos de puntos E^n (espacio euclídeo en n dimensiones). Esto sirvió para que más adelante Camile Jordán introdujera la *medida de Jordán* la cual se basó en asignar a cualquier dominio una medida interior y otra exterior (Dieulefait, 2003).

Camile Jordán (1838-1922) extendió la definición de área dada por Peano en 1887 tomando las ideas de Eudoxo y el método de exhausción para hablar de contenido interior y exterior de un conjunto plano. Sin embargo, esta idea trabaja todas las dimensiones, así que logró generalizarse a los conceptos de longitud, área y volumen permitiendo hablar de volumen y capacidad (Dieulefait, 2003).

Las contribuciones de Peano y Jordán lograron una extensión de la noción de tamaño (longitud, área y volumen) a triángulos, círculos y paralelepípedos, estos últimos se consideran una subclase de prismatoides los cuales abarcan pirámides, cuñas, prismas, antiprismas, cúpulas, fustra y cuadriláteros.

La teoría de la medida dispone de un análisis detallado de la noción de longitud de los subconjuntos de puntos de la recta real y, de forma más general, área y volumen de subconjuntos de espacios euclídeos. Junto con la integral de Lebesgue, ayudan a pensar el volumen como una medida en un espacio medible de dimensión tres (Sáiz, 2002).

Para calcular el volumen de una montaña, Lebesgue propuso particionar el rango de la función de modo que, a mayor cantidad de subdivisiones, mayor precisión se tendrá, por el contrario, el método de Riemann consistía en dividir el dominio en subintervalos tal como se muestra en la figura 4. Al igual que el método de Lebesgue, entre más subdivisiones se tengan menor será el margen de error.

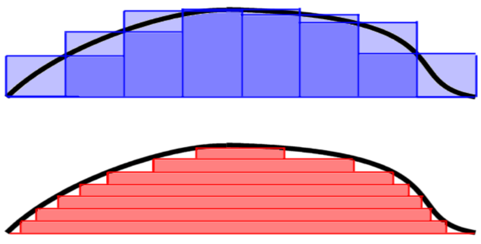

Figura 4. Integral de Riemann (azul) e integral de Lebesgue (rojo) para el cálculo del volumen de una montaña

Fuente: Wikipedia

El hecho de tomar una figura plana y descomponerla en otras conocidas como cuadrados, rectángulos y triángulos permitió el cálculo del área de otras figuras poligonales, esto se conoce como el *método de equidescomponibilidad* (Turégano, 1993). Sin embargo, en el cálculo del volumen no hubo forma de demostrar mediante los métodos de descomposición que el volumen de una pirámide se podía calcular usando el volumen de otro sólido.

Por otro lado, con los trabajos de Lebesgue, se simplificó más el concepto de volumen definiéndolo como una medida de un espacio medible de dimensión tres, haciendo que dicho concepto pierda rigor de modo que es posible estudiarlo sin tener que diferenciarlo de la longitud o del área (Sáiz, 2002).

Los problemas de Hilbert y el volumen en la actualidad

Hilbert presentó al mundo 23 problemas de matemáticas en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900 para estimular la investigación en el campo. Estos problemas resultaron ser muy influyentes en las matemáticas del siglo XX. De ellos, el tercero se refiere al cálculo de volumen. Según Di Sacala (2001) el problema plantea "¿es posible dividir un tetraedro regular de volumen 1 en subpoliedros de manera que estos subpoliedros sean congruentes con los que provienen de una subdivisión del cubo de lado 1?" (p. 23).

Este problema fue resuelto por Dehn en 1990 dando como resultado que no es posible. Lo demostró con un contraejemplo introduciendo el *invariante de Dehn*. En el caso de los polígonos de dos dimensiones, siempre es posible cortar uno de ellos en polígonos que puedan ser armados construyendo el segundo, esto es lo que se conoce como el teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein (Gardner, 1985).

En el caso del volumen, Dehn tomó dos poliedros que tuvieran el mismo volumen, luego introdujo lo que llamó *tijeras congruentes*, con esto pretendía conseguir que las invariantes de Dehn fueran iguales y encontró que en el caso del cubo se obtenían invariantes iguales a cero y en las caras de un tetraedro eran diferente de cero.

También se hace usando el mosaico tridimensional de Boltianski, el cual descompone el espacio en tres planos en un sistema de cubos. En su libro *figuras* *equivalentes y equicompuestas*, Boltianski menciona que su cálculo se reduce al uso de dos procedimientos que son: el método de división y el de adición. Por ejemplo, para hallar el volumen de un prisma oblicuo lo hace mediante el producto del área de la sección perpendicular por la longitud de la arista lateral, tal como lo vemos en la figura 5.

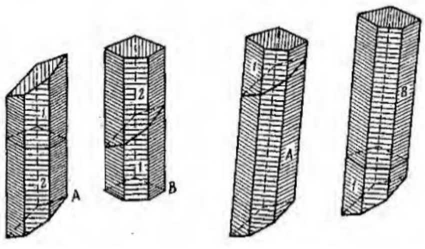

Figura 5. Método de división y adición de Boltianski

Fuente: Boltianski, 1981, p. 62

Sin embargo, para el cálculo del volumen de una pirámide no se puede proceder de la misma manera, para ello se utiliza el *método de límites*, examinando cuerpos escalonados más complicados y luego pasando al límite con un número creciente de escalones a lo que llamó escalera diabólica. Por lo general, después de construir una pirámide triangular lo que hace es construir un prisma triangular oblicuo el cual dividía en tres pirámides triangulares, luego valiéndose del teorema de Hadwiger, demostraba que las tres pirámides eran congruentes y tenían la misma base que la pirámide, por lo tanto, su volumen es un tercio del área de la base por la altura. Razonamientos similares le permitieron conseguir fórmulas para otros prismas, tales como los paralelepípedos y otros poliedros (Boltianski, 1981).

La epistemología del concepto

En primer lugar, el cálculo del volumen de una pirámide truncada provocó un reto para los egipcios, ellos no le dieron mucha importancia a la magnitud ni al cálculo para resolver un problema real, sino que era una característica de los cuerpos sobre la cual se reflexionaba (Sáiz, 2002). Usaban el hegaq para medir principalmente el trigo y la cebada el cual tenía una equivalencia de 4.54 litros, el henu (equivalente a un décimo del hegaq) lo usaban para medir líquidos como la cerveza, el vino, el agua y la leche, aunque también usaron el des, secha y el hebenet (Sánchez, 2000).

Por otro lado, Liu Hui (220-280), matemático chino, en su obra *Nueve capítulos sobre el arte matemático*, muestra la descomposición en cuatro cuerpos básicos, el cubo, el semicubo, Yangma y Piehnao. El semicubo se forma partiendo el cubo de forma oblicua. El Yangma forma una pirámide con base cuadrada cuyo vértice superior coincide con uno de los vértices del cubo. El Piehnao es la partición en dos partes congruentes del Yang-ma.

Sobre este aspecto, González-López y Flores (2001) mencionan:

> La composición del Yangma estándar con el Piehnao estándar forma un semicubo. La composición de tres Yangma estándar forma un cubo. Así, el volumen del Yangma estándar es el doble que el del Piehnao estándar. Estas relaciones permiten probar que el volumen del Piehnao estándar es 1/3 del volumen del semicubo. (p. 86)

Dichos autores referencian lo que sería cada uno de los cuerpos básicos que proponía Liu Hui los cuales se muestran en la figura 6.

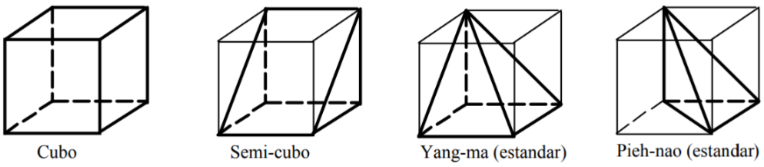

Figura 6. Cuerpos básicos de Liu Hui

Fuente: González-López y Flores (2001)

Sin embargo, Liu Hui fue más un didacta, ofreció en sus trabajos unas presentaciones razonadas de las reglas del Jiuzhang Suanshu, el cual es uno de los libros más antiguos de la China y que contrario a los métodos de resolución axiomáticos planteados por los egipcios, este se centraba en hallar los métodos más generales de resolución de problemas (Straffin, 1998).

Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557), quien, seducido por las ecuaciones cúbicas, desarrolla un método para resolver ecuaciones de tercer grado, logró desarrollar una expresión para calcular el volumen de un tetraedro en función de las longitudes de sus lados la cual conocemos como la *fórmula de Tartaglia* (figura 7).

$$V = \sqrt{\frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & 1 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 & 1 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}$$

Figura 7. Fórmula de Tartaglia

Fuente: Wikipedia

Aunque el interés en esta época no se centraba en la exactitud de los cálculos, siempre y cuando fueran útiles para la situación que se requiere, esto brinda una ruta para su abordaje en las aulas de clase, se puede empezar con el uso de medidas no estandarizadas mediante la comparación de volúmenes usando estimaciones. Por otro lado, al introducir el concepto de volumen mediante la comparación con otras figuras, se pueden dirigir las observaciones a la búsqueda del fraccionamiento de la unidad de medida para afinar las aproximaciones. Estos principios se observan en los trabajos de Demócrito, Euclides, Arquímedes, Kepler y Cavalieri (Freudenthal, 1983).

Con respecto al tercer problema de Hilbert, parece ser que este pretendía que se observara que hay métodos que no se pueden extrapolar ni usar de forma análoga como lo hacemos con los cálculos de área. Esto constituye un reto a nivel educativo; se debe dejar que el estudiante experimente y saque sus conclusiones, teniendo cuidado al momento de decirle que algo no funciona, se sugiere el planteamiento de contraejemplos y permitirle que se equivoque y que puedan hacer sus deducciones (Sáiz, 2012).

Definición experta y escolar del concepto de volumen

En términos de Godino, Batanero y Roa (2003), “El término volumen se usa para designar la característica de todos los cuerpos de ocupar un espacio. Se trata de una magnitud extensiva, derivada, cuya unidad principal es el metro cúbico (m^3)” (p. 622). Esta definición se usa en contextos escolares en la básica y media en Colombia.

De acuerdo con el diccionario de la real academia española el volumen es una magnitud escalar que se define como la extensión en tres dimensiones de una región del espacio que incluye su longitud, ancho y alto, en el sistema internacional de unidades se usa el metro cúbico (m^3).

Por otro lado, Sáiz (2002) define el volumen como:

> Sea M un conjunto de subconjuntos en R3
>
> Sea v una función real definida sobre M tal que la función v no es negativa, esto es, si $P \in M$, entonces v(P) es mayor o igual a cero.
>
> La función v es aditiva, esto es, si $P \; y \; Q \in M$ y no tienen ningún punto interior común, entonces $P \cup Q \in M \; y \; v(P \cup Q) = v(P) + v(Q)$.
>
> La función v es invariante bajo traslaciones, esto es, si $P \in M \; y \; P'$ es la imagen de P al aplicarle una traslación $P' \in M \; y \; v(P) = v(P')$.
>
> La función v es normalizada, es decir, el cubo unidad $Q \in M \; y \; v(Q) = 1$. (p. 15)

En el libro de texto de Prieto (2014) para matemática escolar *Aritmética y Geometría grados 6 y 7* se define el volumen como “el producto de sus tres dimensiones: largo x ancho x alto. En particular, largo x ancho es el área de la base, por lo que tenemos que el volumen del prisma es el área de su base por su altura” (p. 404).

Una secuencia típica en la enseñanza en Colombia se muestra en el texto *Cursillo de Geometría Euclidiana Conceptos Básicos* de Arbeláez et al*.,* (2014a). En la secuencia se inicia con la definición de volumen “El volumen de un sólido es la medida del espacio que ocupa dicho cuerpo y está dado en unidades cúbicas” (p. 38). Después, se explica brevemente algunos tipos de sólidos y la fórmula para calcular su volumen. Seguido, se muestran algunos ejemplos. Para finalizar, se le pide al estudiante calcular algunos volúmenes como el que sigue: “Calcule el volumen y el área superficial de un cono circular recto de altura 3 cm y radio de la base 4 cm”, “Halle el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado 5 m y altura 7 m” (p. 41).

A pesar de que la definición de volumen en la escuela es más singular al punto de dar la idea de haberse reducido a una magnitud tal como se hace con la masa y fuerza por citar algunas.

Tratamiento del concepto en pruebas estandarizadas en Colombia

En una de las preguntas que realiza el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación -ICFES- (2015), pide lo siguiente: "La función $f(x) = (x - 1)(x + 4)(x + 2)$ permite determinar el volumen en centímetros cúbicos de la caja que se muestra en la figura. ¿Cuál debe ser el valor que debe tomar x en centímetros para que el volumen sea 70 centímetros cúbicos?" (p. 69).

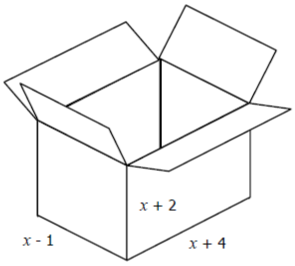

Figura 8. Pregunta 17 prueba saber
Fuente: Icfes (2015)

En el año 2013, el ICFES en la pregunta 28 (figura 9) menciona "Los prismas rectangulares que se muestran a continuación tienen igual volumen (80 cm^3) y sus dimensiones son las señaladas en las figuras:

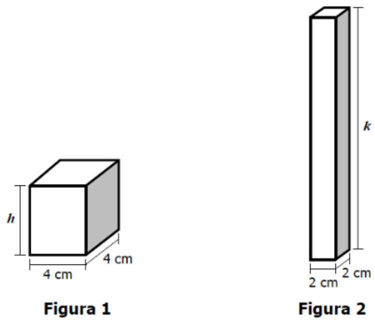

Figura 9. Pregunta 28 prueba saber
Fuente: Icfes (2013)

¿Cuál de las siguientes afirmaciones respecto a h y k es correcta?

A. $2h = k$
B. $4h = k$
C. $12h = k$
D. $20h = k$" (p. 113).

Tratamiento en libros de texto colombianos

En el texto de Precálculo 90 lecciones de Arbeláez, et al*.,* (2014b) se plantea "Calcule el volumen y el área superficial de un cono circular recto de altura 3 cm y radio de la base 4 cm" (p. 50). Otro ejercicio del mismo texto, pero con una complejidad mayor es:

> Un recipiente cilíndrico de 5 cm de radio y 30 cm de altura contiene tres pelotas perfectamente encajadas, es decir, el radio de cada pelota es igual al radio del cilindro y la altura del cilindro mide 6 veces lo que mide el radio de cada pelota. Calcule el volumen de aire que hay en el interior del recipiente. (p. 56)

En los anteriores ejemplos de preguntas se puede evidenciar que apuntan a un tipo de competencia que se sitúa en el saber hacer, y dado el carácter de la prueba, no permite que el estudiante que ha trabajado de manera convencional pueda contestar siempre de manera correcta este tipo de interrogantes (Godino, Batanero y Roa, 2002).

En el texto de Sánchez (2014) titulado *Lecciones de Álgebra* se plantea "el volumen de un paralelepípedo es 36 cm^3, su superficie lateral es 66 cm^2 y la suma de las longitudes de todas sus aristas es 40 cm. Hallar la longitud de todas sus aristas" (p. 410). Este problema es propicio para que el estudiante haga modelación matemática dada las características del enunciado. En cambio, el texto de Prieto (2014) plantea "La pirámide de Keops, en Giza, Egipto, tuvo una altura original de 146 m sobre una base cuadrada de 230 m de lado ¿Qué volumen tuvo originalmente la pirámide?" (p. 403), este problema se reduce a la aplicación de una formula. Sobre este tipo de problemas Sáiz (2003) sostiene que es importante enriquecer la enseñanza del concepto de volumen y que no debe reducirse a la aplicación de fórmulas.

De acuerdo con Godino, Batanero y Roa (2002), algunas de las dificultades que presentan los estudiantes al momento de resolver problemas sobre volumen son:

i. Los niños pequeños (12 años) suelen relacionar el volumen con la altura, piensan que a mayor altura mayor volumen.
ii. Al medir longitudes usando una regla graduada es frecuente que cuenten la marca que se encuentra en el cero o colocan la regla en el número 1 lo cual da

lugar a que en ocasiones tengan una unidad de menos o de más a la que corresponde.

iii. En los sólidos que se encuentran inclinados, es frecuente que confundan la altura con la medida de uno de sus lados.

A lo anterior, se agrega el carácter algoritmo con el que se enseña el concepto y la forma como se plantean las situaciones de aprendizaje a los estudiantes que son poco desafiantes a nivel cognitivo.

CONCLUSIONES

En este artículo se hizo un recorrido alrededor de la historia del concepto de volumen, ésta puede incluso mirarse desde dos perspectivas, la primera que va desde el papiro de Ahmes, un documento que data de 1550 a.C., hasta los tiempos de Newton y Leibniz en las cuales, los matemáticos de la época lograron grandes avances en la geometría y el cálculo, desarrollaron algunos algoritmos y fórmulas para calcular volúmenes en casos concretos tal como se observa en el papiro de Moscú (ver figura 2). La segunda parte de la historia es la concerniente a los tiempos de Newton y Leibniz pasando por Weierstrass, Cantor y Camile Jordán entre otros, quienes por medio del cálculo integral lograron calcular áreas y volúmenes introduciendo nuevas concepciones que permitieron usar algunas expresiones que se usan hoy en día.

Los aportes de Lui Hui pueden tener repercusiones en la didáctica de las matemáticas, sus resultados invitan a trabajar con material que los estudiantes puedan manipular, cortar y armar para dar cuanta de algunas fórmulas. Además, problemas como el tercero que planteó Hilbert, pueden marcar una ruta didáctica a la hora de proponer una secuencia didáctica en la cual se proponga la enseñanza del concepto de volumen.

Otro aporte a la didáctica se puede ver en el papiro de Moscú, el problema número 14 muestra la solución al cálculo del volumen de una pirámide truncada de base cuadrada, esto junto con la propuesta de Liu Hui puede ayudar a los estudiantes a comprender este tipo de cálculos. Un desarrollo propuesto por Demócrito indica una manera de calcular el volumen de una pirámide estableciendo que éste es igual a un tercio del volumen de un prisma de igual base y altura. Sin embargo, Eudoxo va un poco más allá y hace la descomposición de figuras geométricas en áreas y volúmenes conocidos, dicho método se le conoce como *método de exhausción*. Dicho método también fue usado por Euclides y lo describe de manera rigurosa en el libro X de los elementos. En los trabajos siguientes se observa un desarrollo de la integral y la teoría de la medida, al punto de que en ocasiones el concepto de volumen se cruza con el de integral, permitiendo que por medio de este último se enriquezca el concepto.

Los egipcios no le dieron mucha importancia a la magnitud ni a la exactitud de los cálculos siempre y cuando fueran útiles, este hecho nos lleva a pensar, que, al momento de introducir el concepto de volumen a los estudiantes, se puede iniciar con la estimación y comparación de volúmenes y, gradualmente se van afinando los instrumentos de medida para lograr una mayor precisión, este hecho se puede observar en los trabajos de Demócrito, Euclides, Arquímedes, Kepler y Cavalieri (Freudenthal, 1983).

El tercer problema de Hilbert deja una enseñanza a nivel de la didáctica de las matemáticas. Se puede dar el caso que cuando se trabaja en la deducción de las fórmulas de áreas usando la descomposición de cuerpos en otros conocidos, por ejemplo, cuando se usa la fórmula del área de un triángulo para hallar la de un hexágono regular, el estudiante puede pensar que funciona de forma análoga al momento de deducir las fórmulas de volumen lo cual no siempre es posible tal como lo mostro Dehn.

AGRADECIMIENTOS

Agradecimiento al Ministerio de Educación Nacional de Colombia por la beca 2997771 Fondo - Excelencia Docente de Educación P B Y M 2016 para realizar estudios de maestría en la Universidad de Medellín.

REFERENCIAS

Arbeláez, H., Baena, J., Bustamante, E., Correa, B., López, B., Muñoz, L., Osorio, M. y Vélez, C. (2004a). *Cursillo de Geometría Euclidiana conceptos básicos*, Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Arbeláez, H., Baena, J., Bustamante, E., Correa, B., López, B., Muñoz, L., Osorio, M. y Vélez, C. (2004b). *Precálculo 90 lecciones*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Boltianskii, V. (1981). *Figuras equivalentes y equicompuestas*. Moscú: MIR.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial S.A.

Di Scala, A. J. (2001). El teorema de Dehn. *Revista de Educación de la Unión de Matemática Argentina, 16*(2), 22-35.

Dieulefait, L. (2003). Medida de Jordán. *Revista Miscelánea Matemática, 37*(1), 29-63, Francia.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of mathematical structures,* Holland: Reidel Pub. Co.

Gillings, R. (1982). *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Nueva York: Dover.

Godino, J., Batanero, C. y Roa, R. (2002). *Medida de Magnitudes y su Didáctica para Maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado el 10 de abril de 2020 de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf

González-López. M. J. y Flores P. (2001). Conocimiento profesional del profesor de secundaria sobre matemáticas: el caso del volumen. *Educación Matemática, 13*(1), 81-93.

ICFES. (2013). *Saber 3º, 5º y 9º Cuadernillo de prueba segunda edición matemáticas Grado 9°.* Bogotá: Ministerio de Educación.

ICFES. (2015). *Saber 3º, 5º y 9º Cuadernillo de prueba matemáticas Grado 9°.* Bogotá: Ministerio de Educación.

Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nueva York: Oxford University Press.

Prieto, C. (2014). *Aritmética y Geometría Grados 6 y 7.* Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Sáiz, M. (2002) *El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto matemático volumen y su enseñanza*. Trabajo de Tesis Doctoral. Cinvestav, México.

Sáiz, M. (2003). Algunos objetos mentales relacionados con el concepto de volumen de maestros de primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 8*(18), 447-478.

Sánchez, C. (2014). *Lecciones de Álgebra*. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires.

Straffin, P. (1998). Liu Hui and the first Golden Age de Chinese Mathematics. *Mathematics Magazine 71*(3)*.* 163-181.

Turégano, P. (1993). *De la noción de área a su definición: investigación histórica sobre las técnicas, métodos y conceptos que condujeron a la teoría de la medida.* España: Ilustrada.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

1ª autor: gestiona la idea, realizo la búsqueda de información en las bases de datos, ingresó los datos en un Excel, analizó los documentos encontrados, escribe el artículo.