Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

Conhecimento especializado de um formador de professores de Matemática ao ensinar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana: um foco nos exemplos e explicações

A Mathematics teacher educator's specialized knowledge when teaching the Euclid's Division Algorithm Theorem: a focus on examples and explanations

Conocimiento especializado de un formador de profesores de matemáticas al enseñar el Teorema del Algoritmo de División Euclidiana: un enfoque en ejemplos y explicaciones

Marieli Vanessa Rediske de Almeida
Universidade Estadual de Campinas, PECIM
Campinas, Brasil,
marieli.almeida@outlook.com
Orcid: 0000-0002-7491-8936

Miguel Ribeiro
Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação
Campinas, Brasil,
cmribas78@gmail.com
Orcid: 0000-0003-3505-4431

Enviado:10/09/2020

Aceito:05/12/2020

DOI: 10.30612/tangram.v3i4.12716

Resumo: De acordo com algumas perspectivas, qualquer profissional envolvido e responsável pela formação de professores pode ser considerado um formador. Nesse sentido, um matemático que trabalha em cursos de formação inicial é considerado também como formador de professores, e seu conhecimento influencia diretamente o foco e qualidade dessa formação. Buscando compreender quais elementos compõem e caracterizam o conhecimento especializado de um formador de professores, ao abordar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana, neste artigo analisamos a prática de um matemático em contexto de formação inicial de professores e discutimos o seu

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

conhecimento especializado, considerando a perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*. Os resultados obtidos permitem destacar a natureza especializada do conhecimento do formador, salientando algumas dessas dimensões matemáticas especializadas que são cruciais na prática.

Palavras-chave: Conhecimento especializado do formador. Licenciatura em Matemática. Teoria dos Números.

Abstract: Under some perspectives, all professional involved and responsible for teacher education can be considered a teacher educator. In this sense, also mathematicians who teach in teacher education are considered mathematics teacher educators and his/her knowledge directly influence the foci and quality of teacher education. Aiming to understand which elements compose and characterize a teacher educator specialized knowledge when discussing the Euclidean Division Algorithm Theorem. In this paper we analyze the practice of a mathematician acting as mathematics teacher educator and discuss her revealed specialized knowledge considering the scope of the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge. Results allow to highlight the specialized nature of the mathematics teacher educator knowledge bringing to front some of those mathematical dimensions which are crucial in practice.

Keywords: Mathematics teacher educator specialized knowledge. Initial teacher education. Number Theory.

Resumen: Según algunas perspectivas, cualquier profesional involucrado y responsable de la formación del profesorado puede considerarse un formador. En este sentido, un matemático que trabaja en cursos de formación inicial también es considerado como formador de docentes, y sus conocimientos influyen directamente el foco y calidad de la formación de profesores. Buscando comprender qué elementos componen y caracterizan el conocimiento especializado de un formador, al discutir el Teorema del Algoritmo de División Euclidiana. En este artículo analizamos la práctica de un matemático que trabaja en la formación de profesores y discutimos los conocimientos especializados de este formador, considerando la perspectiva del *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*. Los resultados obtenidos permiten destacar la especialización del conocimiento del formador, y ponen de relieve algunas de esas dimensiones matemáticas que son cruciales en y para la práctica.

Palabras clave: Conocimiento especializado del formador. Formación inicial del profesorado. Teoría de los Números.

Introdução

Os estudos com foco no formador de professores têm aumentado nas últimas décadas, havendo diversas possibilidades de pesquisa, incluindo investigações sobre identidade,

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

desenvolvimento profissional, crenças, conhecimentos e sobre a formação do formador. No que se refere ao conhecimento, algumas investigações tentam caracterizar o conhecimento do formador, as quais originaram diferentes modelos (ver, por exemplo, Contreras et al., 2017; Jaworski, 2008; Zopf, 2010). Pelas especificidades do contexto brasileiro, no qual os principais responsáveis pela formação matemática dos futuros professores de Matemática são os matemáticos, estes podem ser considerados também formadores (Kelchtermans, Smith, & Vanderlinde, 2017) – na linha de que qualquer profissional envolvido e responsável pela formação de professores o poderá ser.

Para a elaboração de um modelo de conhecimento do formador, um dos principais elementos a considerar é a diversidade de perfis desses sujeitos (Beswick & Chapman, 2012; Escudero-Ávila et al. [no prelo]). Além disso, o que já se sabe sobre o conhecimento do professor de Matemática pode ser considerado como um ponto de partida para estudar o conhecimento do formador. Os trabalhos que discutem o conhecimento do formador geralmente adotam uma perspectiva de investigação sobre a própria prática (Almeida, Ribeiro, & Fiorentini, 2018), ou focam no *Pedagogical Content Knowkedge* (PCK) do formador (e.g. Appova & Taylor, 2017). Levando em conta estas dimensões e o contexto brasileiro, torna-se necessário um foco no conhecimento do formador de professores que seja um matemático e atue em um curso de licenciatura em Matemática.

Para prover ao professor um conhecimento que lhe permita, por exemplo, definir e dar exemplos de um objeto matemático ou explicar os procedimentos envolvidos em um algoritmo – como fazer, quando pode ser feito, por que é feito dessa forma –, é necessário ao formador possuir conhecimentos mais aprofundados sobre a elaboração de definições matemáticas e o emprego de algoritmos, convencionais ou alternativos, bem como sobre diferentes formas de explicar um algoritmo.

Este conhecimento do professor e do formador pode ser visto sob uma diversidade de perspectivas, e entre elas encontra-se a conceitualização do *Mathematics Teachers'*

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

Specialized Knowledge – MTSK[1] (Carrillo et al., 2018). Nesse conhecimento que cumpre ao formador de professores, por ser ele também professor, inclui-se conhecer os exemplos numéricos mais apropriados para ressaltar cada um dos três casos em que se divide a demonstração do Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana (TADE), que deverão ser conhecidos pelos futuros professores de Matemática. No que se refere às explicações,

> se os formadores de professores acreditam que os futuros professores devem ser capazes de explicar por que diferentes algoritmos funcionam [...], têm de ser capazes de dedicar tempo suficiente de seus cursos para esses temas. Também devem decidir a melhor forma de explicar as justificativas para esses algoritmos, e as possibilidades e limitações deles em exemplos concretos (Contreras et al., 2017, p. 17, tradução nossa).

Para investigar o conhecimento desse formador, elegemos o tópico divisibilidade, abordado em uma disciplina de Teoria dos Números. A Teoria dos Números é um dos ramos mais importantes da Matemática (Doumbia, Carvalho, & Almouloud, 2020) e, em particular, aqui nos concentraremos no Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana. Esta opção centra-se também no fato de as pesquisas apontarem dificuldades dos alunos concluintes do Ensino Fundamental, até mesmo na compreensão dos procedimentos algorítmicos relativos à operação de divisão e à decomposição de números (Chaparin, 2010; Pizysieznig, 2011; Soares & Machado, 2017), e na convicção de que a melhoria da aprendizagem matemática dos alunos se sustenta na melhoria do conhecimento e da prática de seus professores (Chicote & Deixa, 2020; Nye, Konstantopoulos, & Hedges, 2004).

Nesse sentido, diversas investigações apontam dificuldades de futuros professores de Matemática para compreender a divisibilidade (Brown, Thomas, & Tolias, 2002; Zazkis & Campbell, 1996; Zazkis, Sinclair, & Liljedahl, 2013), e o trabalho do formador é imprescindível para que elas possam ser sanadas, ou, pelo menos, diminuídas durante a formação inicial, o que demanda desenvolver as dimensões especializadas do conhecimento

[1] Optamos por manter a nomenclatura em inglês, pois esta é uma conceitualização do conhecimento do professor reconhecida internacionalmente, e a tradução desvirtuaria não apenas o sentido, mas, essencialmente, o conteúdo de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa.

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

do (futuro) professor (Carrillo et al., 2018), em particular no que se refere à divisibilidade. Considerando esta perspectiva, torna-se importante entender mais amplamente o conteúdo do conhecimento do formador de professores no âmbito da divisibilidade – em particular em contexto de discussão do TADE, principalmente nos exemplos e nas explicações fornecidas sobre esse teorema.

Neste texto, focamos o conhecimento especializado de um formador de professores e discutimos algumas das dimensões do conhecimento matemático e pedagógico revelado nesse contexto. Buscamos resposta para a seguinte questão de pesquisa: Quais elementos compõem e caracterizam o conhecimento especializado de um formador, ao fornecer exemplos e explicações sobre o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana?

Referencial teórico

O conhecimento do professor pode ser entendido por uma multiplicidade de perspectivas, e cada uma delas assume dimensões centrais que podem ser substancialmente distintas. Refinando os trabalhos de Shulman (1986, 1987) e trazendo para a discussão as dimensões específicas da área de conhecimento, várias dessas perspectivas consideram que o conhecimento do professor de ou que ensina Matemática integra o conhecimento matemático, o conhecimento pedagógico da matemática e o conhecimento curricular. Uma dessas múltiplas perspectivas refere-se ao *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (Carrillo et al., 2018), que assevera que todo o conhecimento do professor é especializado. Tomando esse conhecimento especializado como associado às especificidades da prática profissional do professor, quando pensamos no conhecimento do formador de professores e o comparamos com outros profissionais que usam a matemática como um recurso ou instrumento, ou mesmo em relação aos alunos, ele deverá, necessariamente, seguindo a mesma estrutura de ampliação e refinamento, ser considerado dotado de algumas especificidades para essa prática profissional.

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

Também em relação ao professor de e que ensina Matemática no Ensino Superior, pesquisas apontam a necessidade de compreender seu conhecimento e seu desenvolvimento e a forma como o conhecimento se reflete em sua prática de ensino (Delgado-Rebolledo & Zakaryan, 2019), tendo em conta, principalmente, que em boa parte dos casos ele não recebeu formação específica relacionada com o ensino e a aprendizagem dos tópicos das disciplinas que leciona na universidade (Vasco & Climent, 2018).

Na perspectiva do MTSK consideram-se três domínios: *Mathematical Knowledge* (MK), *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) e as crenças sobre a Matemática e sobre o ensino da Matemática (Figura 1).

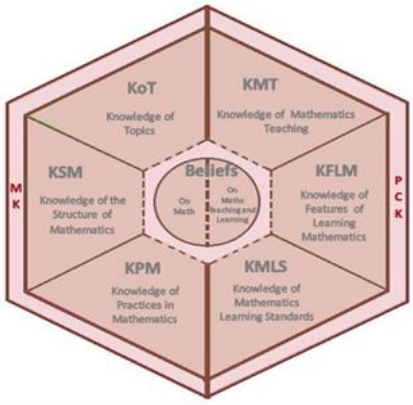


Figura 1 – Domínios e subdomínios do MTSK
Fonte: Carrillo et al. (2018, p. 241)

Para o MK, são considerados três subdomínios: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM).

No KoT inclui-se o conhecimento do professor relativamente ao que o professor de Matemática conhece dos tópicos que ensina e de que maneira o faz. Esse subdomínio é composto por quatro categorias: *procedimentos; definições, propriedades e fundamentos*; *registros de representação;* e *fenomenologia e aplicações*. No tópico de Divisibilidade inclui-se, por exemplo, conhecer o algoritmo da divisão euclidiana e seu significado, conhecer o teorema do algoritmo da divisão euclidiana (TADE) e seu significado, saber que

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

o TADE é válido dentro de determinadas condições, considerando-se o conjunto dos números inteiros, bem como conhecer que a divisão pode ser entendida como medida e que isso está associado a ver quantas vezes é necessário considerar a unidade, ou partes dela, para efetuar a medição.

No subdomínio KSM está incluso o conhecimento do professor sobre conexões entre itens matemáticos (Carrillo et al., 2018), as quais podem ser interconceituais (conexão auxiliar, por exemplo) ou temporais (associadas a complexificação ou simplificação de um determinado conceito). Assim, o KSM possui quatro categorias: *conexões de simplificação*, *conexões de complexificação*, *conexões auxiliares* e *conexões transversais*. Conhecer o Princípio da Boa Ordem, uma propriedade utilizada na prova do TADE, é um exemplo de conexão auxiliar, caracterizando a necessária participação desse item em um processo maior.

No que se refere ao KPM, o foco está mais no funcionamento da matemática do que no processo de ensiná-la (Carrillo et al., 2018), incluindo conhecimentos relacionados a criação e produção matemáticas, a linguagem e demonstrações matemáticas. De acordo com Delgado-Rebolledo e Zakaryan (2019), para o KPM são consideradas as seguintes categorias: *formas de proceder*, *formas de validar*, *formas de explorar*, *formas de gerar conhecimento em matemática* e *formas de comunicar matemática*. No tópico Divisibilidade inclui-se, por exemplo, saber como justificar o algoritmo da divisão euclidiana e saber quais são as condições necessárias e suficientes para que o teorema seja válido.

Por sua vez, o PCK inclui os subdomínios *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT), *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM) e *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS).

O KMT refere-se ao conhecimento do professor relativo a *teorias sobre o ensino de matemática*, *recursos para o ensino,* e *estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*. No tópico Divisibilidade inclui-se, por exemplo, o conhecimento de exemplos representantes dos três casos envolvidos na demonstração da existência do quociente e do resto no TADE.

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

Ainda, o subdomínio KFLM compreende o conhecimento nas categorias *teorias de aprendizagem matemática*, *potencialidades e dificuldades dos alunos ao aprender matemática*, *formas de interação dos alunos com o conteúdo matemático* e *aspectos emocionais da aprendizagem da matemática*. No tópico Divisibilidade insere-se, por exemplo, conhecer a dificuldade comum dos estudantes em explicitar os elementos do conjunto dos possíveis restos, gerado na demonstração do TADE, que é outro conhecimento do professor que ensina Teoria dos Números.

Por sua vez, o subdomínio relativo ao KMLS está relacionado com as categorias *resultados de aprendizagem esperados*, *nível esperado de desenvolvimento conceitual e procedimental* e com o *sequenciamento de tópicos*. No tópico Divisibilidade figura, por exemplo, conhecer as habilidades que precisam ser trabalhadas em determinado momento, de acordo com a *Base Nacional Comum Curricular* – BNCC (Brasil, 2018); por exemplo, entre o 6.º e 7.º anos do Ensino Fundamental, conforme a BNCC, os alunos deverão aprender a elaborar e resolver problemas envolvendo os conceitos de múltiplo, divisor e divisibilidade.

Desde a primeira publicação (Carrillo et al., 2013), o modelo MTSK vem sendo rediscutido e aprimorado, por meio de novas investigações que se aprofundam no modelo em si e também em seus domínios e subdomínios, buscando sempre melhor compreender o conhecimento do professor de e que ensina Matemática.

Uma vertente complementar dessas pesquisas tem por foco o conhecimento do formador, que pode ser pensado a partir do conhecimento especializado que se pretende promover nos (futuros) professores (Carrillo et al., 2019). Com relação ao conhecimento matemático, o conhecimento do formador deve abranger o conhecimento a ser desenvolvido nos (futuros) professores que forma, sem estar limitado a ele, tendo uma visão geral e inter-relacionada do conhecimento matemático, que o leve a enfatizar conexões e profundidade de conhecimentos na formação (Escudero-Ávila et al., [no prelo]).

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

Focando no conhecimento matemático do formador, podem ser diferenciados três pontos com relação ao conhecimento do professor (Escudero-Ávila et al., [no prelo]): (i) o conhecimento do formador se torna mais amplo e profundo porque é o resultado de um processo de crescimento no qual a matemática adquire maior complexidade e vai sendo vista de forma cada vez mais holística, visão na qual os *links* entre os conceitos se tornam mais variados; (ii) o formador atribui importância a aspectos sintáticos do conhecimento matemático, reconhecendo que o conhecimento, por si mesmo, é necessário, mas não suficiente, e compreendendo, por exemplo, a essência das demonstrações, o significado de teoremas e definições e o rigor da linguagem matemática; (iii) o conhecimento do formador é organizado de forma diferenciada, com uma compreensão mais clara das ideias estruturantes da Matemática e das conexões que permitem simplificar ou aumentar a complexidade de um tópico (Montes, Ribeiro, Carrillo, & Kilpatrick, 2016), tornando-o capaz de promover a construção do conhecimento dos professores em formação.

No que se refere ao PCK do formador, Escudero-Ávila et al. (no prelo) vão um pouco mais longe e apresentam três subdomínios, intitulados *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers*, *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes* e *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes*.

No *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* considera-se o conhecimento do formador sobre o desenvolvimento profissional dos professores em formação; as dificuldades mais prováveis na sua especialização como professores de Matemática; as sequências ou focos mais apropriados para a construção e o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor; o conhecimento dos futuros professores, ao iniciarem a formação. Um exemplo de conhecimento do formador incluso nesse subdomínio é conhecer que o foco na divisão como medida, ao abordar o TADE, pode ser mais apropriado para construir o conhecimento dos futuros professores sobre divisibilidade.

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

O *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes* envolve conhecimentos sobre repertórios de atividades para desenvolver o conhecimento profissional dos professores de Matemática em formação; conhecimentos sobre as limitações e as potencialidades de diferentes tarefas que podem ser exploradas; conhecimento sobre a utilização de metodologias diversas de avaliação; conhecimento sobre as características mais importantes de cada tópico, sendo capaz de potencializar e desenvolver esse conhecimento.

Por sua vez, o *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes* abarca o conhecimento de padrões curriculares do curso em que o formador atua e também dos diferentes níveis de ensino nos quais os futuros professores atuarão. Tais padrões curriculares, bem como a demanda de conhecimentos matemáticos, podem variar em diferentes universidades, ou conforme o país, de forma que o conhecimento do formador nesse subdomínio também pode implicar conhecer como a formação ocorre em outros contextos.

Uma vez que o conhecimento do formador deve abranger o conhecimento do professor e que, além disso, ainda não há um modelo de conhecimento especializado do formador, nossa proposta para análise do conhecimento matemático de um formador que também é matemático consiste em considerar esse conhecimento a partir dos subdomínios e categorias do *Mathematical Knowledge* (Carrillo et al., 2018).

Para discutir o conhecimento pedagógico do sujeito, por outro lado, propomos olhar para o PCK do formador em dois níveis: como professor que ensina Matemática na universidade, a partir dos subdomínios e categorias propostas em Carrillo et al. (2018); e como formador de professores de Matemática, a partir dos três subdomínios propostos por Escudero-Ávila et al. (no prelo).

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

Contexto e método

Com o objetivo de responder à nossa questão de pesquisa, aqui focamos no conhecimento de um formador de professores que é matemático – desenvolve pesquisas em Matemática, em particular nas áreas de Álgebra e Geometria. Os resultados apresentados fazem parte de uma pesquisa qualitativa mais ampla: um estudo de caso instrumental (Stake, 1995), que busca caracterizar o conhecimento especializado de dois formadores de professores de Matemática que ensinam Teoria dos Números em uma universidade pública.

O participante cujo conhecimento discutimos neste texto, Benny, é bacharel, mestre e doutor em Matemática, desenvolve suas pesquisas na área de Álgebra e possui mais de 20 anos de experiência atuando em cursos de graduação e pós-graduação.

As informações foram coletadas durante um semestre em uma disciplina de Teoria dos Números, oferecida como disciplina comum para estudantes de Licenciatura e de Bacharelado em Matemática em uma universidade pública no estado de São Paulo. A disciplina inclui tópicos como divisibilidade, números primos, congruências lineares e equações diofantinas – tópicos habituais em uma disciplina inicial de Teoria dos Números – , e os estudantes de licenciatura são orientados a cursá-la no 6.º semestre.

A coleta de informações envolveu a observação e a gravação em áudio e vídeo das aulas do formador, bem como a realização de entrevistas semiestruturadas, com o objetivo de entender melhor aspectos da prática de Benny. Aqui nos centramos em duas aulas, nas quais Benny abordou o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana. Cada aula teve cerca de noventa minutos de duração, e tanto as entrevistas quanto as aulas foram transcritas para posterior análise.

O TADE é um teorema de existência e unicidade do quociente e do resto na divisão euclidiana; dessa forma, sua demonstração deve ser feita em duas partes. Ele foi abordado por Benny em um conjunto de cinco aulas (aulas 2, 3, 4, 5 e 6), e o formador introduziu o

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

TADE ao final da aula 2, e discutiu a demonstração da existência nas três aulas seguintes (3, 4 e 5). Ao final da aula 5 e no princípio da aula 6, Benny demonstrou a unicidade.

Benny inicia a aula 3 relembrando propriedades da relação de ordem nos números inteiros (mais informações sobre essa discussão podem ser encontradas em Almeida e Ribeiro [2019]). Posteriormente retoma o TADE, que foi introduzido no final da aula anterior, e enuncia a versão completa do teorema, discutindo o enunciado e fornecendo exemplos do uso do algoritmo. Ele então busca dar uma ideia da demonstração e discute o Princípio da Boa Ordenação (PBO), dividindo a demonstração da existência em três casos e, na sequência, prova o caso trivial.

A quarta aula é dedicada a uma revisão de todas as propriedades dos números inteiros que já foram abordadas na disciplina. Na quinta aula Benny retoma o TADE: inicia sua demonstração com o caso trivial e considera a seguir os demais casos e seus respectivos subcasos. Assim conclui a demonstração da existência do teorema. Como nosso interesse recaiu mais nos exemplos e nas explicações do que na demonstração em si, o nosso foco de análise e discussão aqui evidencia as discussões ocorridas na aula 3 e na aula 5. Todas as aulas foram gravadas em vídeo (imagens da lousa) e transcritas.

A transcrição de cada aula foi feita a partir do áudio e posteriormente complementada com a visualização do vídeo e dividida em episódios fenomenologicamente coerentes (Ribeiro, Carrillo, & Monteiro, 2012). Para a aula 3, em que a análise é mais focada nas explicações do formador, apresenta-se a transcrição com linhas numeradas. Cada linha representa a fala do formador (Benny), uma fala dos estudantes (Est) ou uma ação do formador (e.g. “escreve na lousa”). O emprego de “()” indica a descrição de uma ação de Benny, enquanto “[...]” indica a supressão de um trecho. Para a aula 5 focamos especificamente no recorte dos exemplos que Benny escreveu na lousa.

Para a análise do *Mathematical Knowledge* revelado por Benny, utilizamos as categorias propostas por Carrillo et al. (2018), e os indicadores receberam um acrônimo (por exemplo KoTd1) constituído pelas iniciais do subdomínio em questão, acrescido da(s)

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

letra(s) representativa(s) da categoria associada e seguido de um número sequencial, de acordo com a ordem em que aparece no texto (Tabela 1). Aqui, para simplificar a leitura, apenas referimos as categorias que aparecem na análise.

Tabela 1 – Subdomínios e categorias do *Mathematical Knowledge*

Subdomínios	Categorias	Indicadores
KoT	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd1
	Procedimentos	KoTp1
	Registros de representação	KoTr1
KPM	Formas de proceder	KPMwp1
	Formas de validar	KPMwv1

Fonte: Carrillo et al. (2018, pp. 243-245)

Para analisar o *Pedagogical Content Knowledge* revelado por Benny, consideramos duas perspectivas: por um lado, olhamos para o seu PCK como professor de Matemática, recorrendo às categorias propostas por Carrillo et al. (2018) – Tabela 2. Os códigos atribuídos aos indicadores seguem a mesma estrutura apresentada anteriormente.

Tabela 2 – Subdomínios e categorias do *Pedagogical Content Knowledge*

Subdomínios	Categorias	Indicadores
KMT	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos	KMTe1
KFLM	Potencialidades e dificuldades na aprendizagem da matemática	KFLMs1

Fonte: Adaptado de Carrillo et al. (2018, pp. 247-248)

Por outro lado, buscamos também evidências de PCK como formador e para isso recorremos às dimensões elencadas por Escudero-Ávila et al. (no prelo) – Tabela 3. Para cada subdomínio do conhecimento do PCK do formador, consideramos uma lista de conhecimentos (e não de categorias), pois essas dimensões estão ainda em sua fase de refinamento, com o qual pretendemos contribuir com este trabalho.

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

Tabela 3 – Subdomínios e conhecimentos do PCK do formador

Subdomínios	Conhecimentos	Indicadores
Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers	Conhecer sequências ou focos que podem ser mais apropriados para construir o conhecimento e a identidade, e para desenvolver as habilidades dos futuros professores	KFPDMT1

Fonte: Adaptado de Escudero-Ávila et al. (no prelo)

Para que o leitor possa acompanhar, do melhor modo, as discussões matemáticas efetuadas por Benny ao explorar a demonstração do TADE, optamos por incluir, na parte inicial da próxima epígrafe, uma breve descrição dos passos envolvidos na demonstração, a qual busca facilitar a compreensão da análise.

Análise e discussão

Por ser um teorema de existência e unicidade, a demonstração do TADE é feita em duas partes. Na primeira, é demonstrada a existência do quociente e do resto, considerando-se três casos: $0 \leq b < a, b \geq a$ e $b < 0$. Nesses três casos, usa-se o Princípio da Boa Ordem para provar que o resto procurado é o elemento minimal do conjunto $X := \{b - |a|x, x \in \mathcal{P}\} \cap \mathcal{P}_0$, o qual é um conjunto auxiliar formado por todos os "possíveis restos". A seguir, o quociente q é obtido como consequência direta da existência de r. Na segunda parte, a unicidade, supõe-se que existam dois pares de resto e quociente distintos que satisfazem as hipóteses do teorema, chegando-se a um absurdo, e demonstrando-se, assim, que o quociente e o resto são únicos.

Benny inicia a aula falando sobre a divisão de números inteiros: menciona que dois números são dados, o dividendo e o divisor, estabelece uma convenção [110-112] na representação deles [$b \div a$] e aponta os demais elementos que fazem parte da decomposição de um número inteiro – o quociente e o resto [117-119].

110 Benny: Então o que eu gostaria é dividir, eu gostaria de fazer b entre a
111 (Escreve na lousa "$b \div a$".)
112 Eu vou eleger fazer assim, b entre a.

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

113 Mas, o que isso vai significar?
117 [...] Dados dois números a, b inteiros, não é? [...]
118 Vai significar que eu vou ter dois números aqui tal que este
119 b vai ser possível escrever como qa mais r.

Benny opta por ilustrar os elementos da divisão por meio de um exemplo [121-124] e decompõe cinco de duas formas diferentes (KoTp1 – conhecer que, para decompor um número de diferentes formas, pode-se fixar o divisor e variar o quociente e o resto) e explica que é possível escrever cinco de diferentes maneiras, ao variar o quociente e o resto [127-130], fixando dois como o divisor (Figura 2). Tal discussão é importante para os futuros professores, principalmente considerando que muitos alunos apresentam dificuldades com a decomposição de números inteiros (Soares & Machado, 2017).

121 (Escreve na lousa)
122 Benny: Cinco entre dois, usando o conhecimento do
123 colégio, como poderia escrever cinco entre dois, por exemplo? [...]
124 Usando este b e este a. [...]
127 Cinco seria o quê? Seria dois, por dois, mais quanto? Mais um, não? Mas eu poderia
128 também escrever ele, vejam que a é este, não? Então aqui seria dois. Se aqui eu ponho
129 três, o que vai ocorrer aqui? Mais menos um. E assim eu posso testar um monte de
130 coisas, não é verdade?

$$5 \div 2$$
$$5 = 2(2) + 1$$
$$5 = 3(2) + (-1)$$

Figura 2 – Diferentes formas de escrever 5, considerando 2 como divisor escritas na lousa

O formador pontua que será necessário fazer com que o quociente e o resto sejam únicos, respeitando as condições do TADE. Para isso, Benny ressalta que não é possível controlar q, mas é possível controlar r, estabelecendo a condição $0 \leq r < |a|$ [132-136] (KoTd1 – conhecer que o valor do resto é limitado na divisão euclidiana). Ao estabelecer essa condição, o formador retoma o significado do símbolo $\leq$ e a definição de valor absoluto [137-141] (KoTd2 – conhecer a definição de módulo ou valor absoluto, isto é, o módulo de um número positivo é o próprio número, e o módulo de um número negativo é o seu simétrico), tendo por base uma construção dos números inteiros que considera $\mathbb{Z} = \mathcal{P} \cup$

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

$-\mathcal{P} \cup \{0\}$[2]. Ao referir que não há outra possibilidade senão a estar em $\mathcal{P}$, $-\mathcal{P}$ ou $\{0\}$, Benny retoma o princípio da tricotomia [145-147] (KoTd3 – conhecer que vale a propriedade da tricotomia para os números inteiros, isto é, cada número inteiro é positivo, negativo ou zero).

132 Benny: Mas eu quero forçar [...] esta expressão [...] para esses terem que ser únicos
133 (Aponta para q e r.)
134 Eu vou querer que sejam únicos. Este q não vou ter forma de controlar, mas
135 [...] este r eu vou querer que seja assim
136 (Escreve a expressão $0 \leq r$.)
137 que seja, o que significa isso? Zero menor ou igual que r, o que significa? r é zero ou...
138 o zero é menor que r. Se lembram disso? Ou que este seja menor... lembrem que aqui
139 estou assumindo esse valor absoluto de a. Esse é o que eu quero, não?
140 (Escreve a expressão $0 \leq r < |a|$.)
141 Isso a gente já conhece o que significa, não? [...]
145 Est: Igual a a...
146 Benny: Igual a a se a estava em $\mathcal{P}$, era zero, se a era zero, e a era $-a$, se a estava em $-\mathcal{P}$. Se
147 lembram que não tinha outra possibilidade?

Benny então justifica por que o divisor não pode ser zero [150-154] (KoTd4 – conhecer que o divisor deve ser diferente de zero), retomando uma propriedade da relação $<$ entre números positivos [154] (KoTd5 – conhecer que um número não se relaciona com ele mesmo através da relação $<$) e como demonstrá-la , chegando a uma contradição com a definição de $\mathcal{P}$[3] [154-160] (KPMwv1 – conhecer como demonstrar por contradição que um número inteiro não pode ser menor do que ele mesmo).

150 Benny: [...] se este for zero
151 (Aponta o módulo de a.)
154 nós já vimos que um cara não pode ser menor que ele mesmo. Se lembram? a não pode
155 ser menor que a. Por quê? Porque se for assim, $a - a$, que é zero, estaria em $\mathcal{P}$. Mas
156 nós já havíamos visto que o zero não pode estar em $\mathcal{P}$. Por decreto. Entendem? E,
157 portanto, aqui o zero automaticamente não vai satisfazer, não vai poder fazer isso com
158 zero, não é? Então, se eu quero fazer isso, automaticamente tenho que tirar o zero, não?
159 Diria, dados a, b em $\mathbb{Z}$, com a diferente, o professor dizia, vamos dividir com a
160 diferente de zero, não?

O formador então enuncia o TADE, pontuando que o divisor precisa ser diferente de zero e que existem q e r, tal que $b = qa + r$, com $0 \leq r < |a|$ [168-172]. A seguir Benny

[2] Para maiores detalhes, ver Almeida e Ribeiro (2019).
[3] Para o conjunto $\mathcal{P}$ são consideradas três propriedades: zero não pertence a $\mathcal{P}$, 1 pertence a $\mathcal{P}$ e, se existem dois elementos em $\mathcal{P}$, a soma dos dois estará em $\mathcal{P}$.

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

evidencia saber que a demonstração do teorema deve ser feita em duas partes, existência e unicidade [173-176] (KPMwp1 – conhecer como demonstrar teoremas de existência e unicidade, separando a demonstração em duas partes).

168 Benny: [...] essa vai ser minha divisão de Euclides. Dados dois números, onde
169 esse é diferente de zero,
170 (Aponta o a no enunciado do teorema.)
171 então eu quero achar q e r tal que se cumpra tudo isso, e
172 com esta condição, está bem? [...] Isso significaria dividir.
173 Então vejam que aqui temos duas coisas, não? Temos existência,
174 existência e o que mais?
175 Est: Únicos.
176 Benny: Isso. Unicidade. Ou seja, temos que provar que existem, e que de fato, são únicos. Está bem?

Benny então retoma o exemplo $5 \div 2$ (Figura 2), assinalando que na primeira decomposição $(5 = 2(2) + 1)$ o quociente e o resto cumprem as condições do teorema, enquanto na segunda decomposição $(5 = 3(2) + (-1))$ isso não acontece. Dessa forma, Benny está chamando a atenção dos estudantes para a existência de diversas possibilidades de decomposição para um mesmo número, sem que essas decomposições atendam a condição $0 \leq r < |a|$, por meio de um exemplo [178-188] (KMTe1 – conhecer exemplos de decomposição que não cumprem a condição $0 \leq r < |a|$ do TADE).

178 Benny: Aqui o que está furando?
179 (Aponta para $3(2) + (-1)$ escrito na lousa.)
180 Por exemplo, aqui, este está bonitinho.
181 (Aponta para $2(2) + 1$ escrito na lousa.)
182 Um maior ou igual que zero, menor que quanto? Que dois, não é verdade? Aqui está
183 bem, não é? Se cumpre. Aqui que está furando.
184 (Aponta a expressão $3(2) + (-1)$.)
185 Est A divisão não é euclidiana por causa do...
186 Benny Aqui o que está furando, a respeito disso, o que está furando?
187 Est Que o resto é -1.
188 Benny Claro, que o resto é -1.

Aqui, o formador pode estar retomando o exemplo e frisando a necessidade de que o quociente e o resto precisam estar nas condições do teorema, por saber que isso nem sempre é evidente para os estudantes (KFLMs1 – conhecer a dificuldade comum dos estudantes em perceber que a decomposição nas condições do TADE é única). Benny estimula os

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

estudantes a pensarem em outras decomposições possíveis [191-193], escolhendo um novo valor para o quociente na decomposição de cinco, considerando dois como divisor [194-195], e novamente ressalta que tal decomposição não está de acordo com as condições do TADE [205-210].

191 Benny: Bom, e aqui você pode gerar
192 outro exemplo, não? Se eu quero... tenta outro exemplo aqui, vejam, tenta, imagina
193 qualquer coisa, aqui, o dois está fixo, não? Aqui bota, este q, não falo nada de q.
194 Então, se por exemplo, aqui boto -1 (na posição de q), quanto tenho que botar
195 aqui (na posição de r)? Se aqui boto -1, quanto tenho que botar aqui?
200 Est: Sete. Sete.
205 Benny: O que está furando aqui? Que sete não é menor que dois. Entendem?
206 Ou seja, eu posso escrever essa expressão de muitas maneiras seguramente.
207 De muitas maneiras. As que eu quiser. Isso vai ficar evidente na prova. Mas vai se
208 única, se eu coloco essa expressão, entende?
209 (Aponta para $0 \leq r < |a|$.)
210 Essa é a ideia do teorema.

A seguir Benny afirma que o TADE não apenas garante a existência e a unicidade do quociente e do resto, mas também indica uma forma de encontrá-los [219-221] (KPMwp2 - conhecer que a demonstração do TADE permite exibir o quociente e o resto).

219 Benny: O teorema diz que existem, não é? O teorema é (sobre) existência e unicidade.
220 Mas o objetivo é achar eles, não? Qual é o q e qual é o r. Eu já sei que existem,
221 não é? E o teorema diz mais: vão ser únicos.

Benny então fornece um novo exemplo de divisão, evidenciando o quociente e o resto [224-229]. Ele faz os cálculos com os estudantes e busca ilustrar a decomposição de 153 geometricamente.

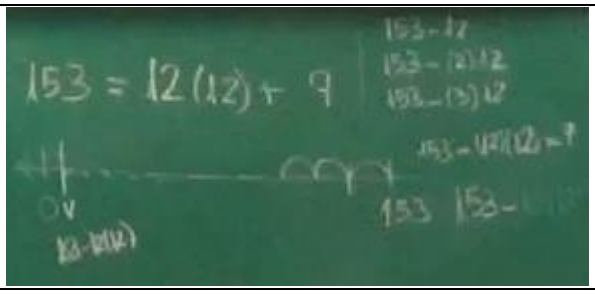
224 Benny: Então, por exemplo, dados estes números
225 (Escreve $b = 153$ e $a = 12$ na lousa.) [...]
227 Quanto seria o q e quanto seria r? Como eu faço?
228 Est: q é 12.
229 Benny: 12, multiplicado por a, que seria... 12 neste caso, igual, mais quanto? r, que seria quanto? 9, não?

Benny busca representar o algoritmo da divisão geometricamente (Figura 3), mostrando conhecer diferentes representações para o algoritmo [244-252] (KoTr1 – conhecer uma forma de representar a decomposição do TADE geometricamente, marcando

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

o dividendo 153 na reta numérica, considerando 12 saltos (quociente) de tamanho 12 (divisor) e obtendo resto 9).



Benny representa o algoritmo da divisão euclidiana geometricamente, tomando 153 em uma reta numérica, considerando 12 saltos de mesmo tamanho e destacando o resto 9.

Figura 3 – Decomposição de 153, considerando 12 como divisor, escrita na lousa

244 Benny: Agora seria bom dar uma ilustração da forma ou do método da prova.
245 Aqui, por exemplo
246 (Desenha uma reta.)
247 Aqui está meu zero.
248 (Marca o zero na reta.)
249 O que está dizendo isso daqui?
250 (Aponta para $153 = 12(12) + 9$ escrito na lousa.)
251 Eu tenho o 153 por aqui.
252 (Marca 153 na reta.)

Ao representar geometricamente, além de estabelecer conexão entre a divisão e a subtração [253-255] (KoTd6 – conhecer uma conexão intraconceitual entre divisão e subtração, resolvendo a divisão por meio de um processo de subtrações sucessivas), Benny também está trabalhando com o sentido de medida na divisão [255-266] (KoTd7 – conhecer que a divisão pode ser entendida como medida e que isso se encontra associado a ver quantas vezes necessito considerar a minha unidade, ou partes dela, para efetuar a medição), considerando quantas vezes 12 cabe em 153 e destacando o significado geométrico do resto.

253 Benny: O que estou dizendo é que você tem que fazer $153 - 12$. Seria uma
254 primeira operação, não é? Depois, $153 - 2(12)$, está bem? Aqui seria 1, aqui seria 2.
255 Então tiro, digamos assim, um pedacinho, do ponto de vista geométrico. 153, vou para
256 cá, não é? Um
257 (Mostra um salto na reta.)
258 não é verdade? Este cont... a pergunta vai ser, continua positivo ou não? Sim. Já
259 sabemos que é positivo, não? [...] 153 menos este número, vejam, 12 multiplicado por
260 12. Quanto me dá isso?
261 Est: 9.
262 Benny: Ou seja, quer dizer que... uma, duas vezes, três vezes... até por aqui, não é? Aqui seria
263 $153 - 12(12)$, entendem? Sim? Que vai me dar 9. E o seguinte, o que acontece com o

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

264 seguinte? O que acontece com $153 - 13(12)$?
265 Ele... ele cruza o zero, não? Esse é o momento em que paro, não?
266 E esse é o r que escolho, entendem? Este é o r.

Ao ilustrar o algoritmo geometricamente, Benny evidencia conhecer o aspecto exaustivo da decomposição do TADE, no sentido de que o processo de ir medindo 12 dentro de 153, em algum momento, termina [253-266] (KoTp2 – conhecer como decompor o dividendo encarando a divisão como medida), obtendo uma expressão cujos quociente e resto se encaixam nas condições do teorema. Isso pode ser ainda entendido como uma espécie de tentativa e erro, até obter a decomposição desejada de 153.

O exemplo utilizado por Benny permite aos estudantes visualizarem o processo de divisão como medida, evidenciando a tentativa de promover esse conhecimento nos futuros professores (*Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* - Conhecer o foco da divisão como medida, que pode ser mais apropriado para a construção do conhecimento dos futuros professores, ao abordar o TADE).

Ao iniciar a demonstração da existência do TADE, Benny divide a demonstração em três casos (KPMwp3 – conhecer formas de proceder em matemática, empregando a estratégia heurística da demonstração de casos), incluindo um caso trivial. O formador menciona a necessidade de considerar um conjunto X que admita menor elemento [299-300] (KPMwp4 – conhecer uma forma de construir um conjunto X que satisfaça a relação $a = bq + r$), tentando mostrar aos estudantes que esse menor elemento será o resto na divisão.

Aqui, o formador pode estar ciente de que o conjunto gerado na demonstração do TADE geralmente é apresentado, pelos livros e por parte dos professores das disciplinas de Teoria dos Números, como algo abstrato e, por isso, Benny se utiliza novamente do exemplo da decomposição de 153, considerando o divisor 12, com objetivo de facilitar o entendimento dos estudantes [299-312] (KFLMs2 – conhece a dificuldade comum dos estudantes em explicitar os elementos do conjunto gerado na demonstração do TADE).

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

299 Benny: Lembrem-se que a regra de ouro significa definir um X grandão
300 que seja não-vazio e aí pegar seu elemento mínimo. Segundo o que nós fizemos aqui
301 (Aponta o exemplo $153 \div 12$ escrito na lousa.)
302 e dava, qual era o último? Era o r, não? Esse é o mínimo.
303 O b é esse (153) e o a é esse (12).
304 Pergunto, para seguir trabalhando, que X vocês consideram?
305 Vejam, $153 - 12$, $153 - 2(12)$, quem está variando aqui? O b está fixo e o a está fixo.
306 Quem está variando?
307 Est: q. q.
308 Benny: Este está variando. Este coeficiente. Este é um, este é dois, este é três, não é?
309 E então onde está variando? Um está em $\mathcal{P}$, o dois está em $\mathcal{P}$, etc., etc. Então, que tal
310 se eu considero o X, mais ou menos seria b [...] menos o a, sempre posto à direita, eu
311 diria x por a,assim, onde estou definindo o conjunto, entendem? Onde X vai estar? Está
312 onde? Em $\mathcal{P}$. Entendem?

Podemos observar que Benny tem o cuidado de explicitar o conjunto X para o exemplo dado anteriormente (Figura 4); o conjunto, nesse caso, é $X = \{153 - x12,\ x \in \mathcal{P}_0\}$. Assim, o formador não constrói apenas um conjunto abstrato, ele exemplifica como seria esse conjunto, utilizando um dividendo e um divisor específicos, o que torna o conjunto mais fácil de visualizar (KMTe2 – conhecer o exemplo concreto $(153 \div 12)$ para a visualização do conjunto X= $\{153 - x12,\ x \in \mathcal{P}_0\}$).

$$X = \{153 - x12\}$$
$$\min X = 153 - q12 = 9$$

Figura 4 – O conjunto X para a divisão de 153 por 12

Ainda mais, o formador desenvolve, no canto direito da lousa, uma série de cálculos auxiliares (Figura 5), variando os valores de x em $\mathcal{P}_0$. Dessa forma, é possível observar que, após algumas linhas, se chega a um valor que satisfaz a condição do resto r do TADE: esse valor é o mínimo do conjunto $X = \{153 - x12,\ x \in \mathcal{P}_0\}$. Ademais, Benny ainda calcula a próxima linha para deixar claro aos estudantes que mais um passo gera um valor que não se encaixa no TADE. É possível perceber também a escrita $\min X = 153 - q12 = 9$, a qual evidencia que esse q é aquele do TADE, o que sugere antecipadamente que é necessário primeiro encontrar o valor de r para, *a posteriori*, obter o valor de q.

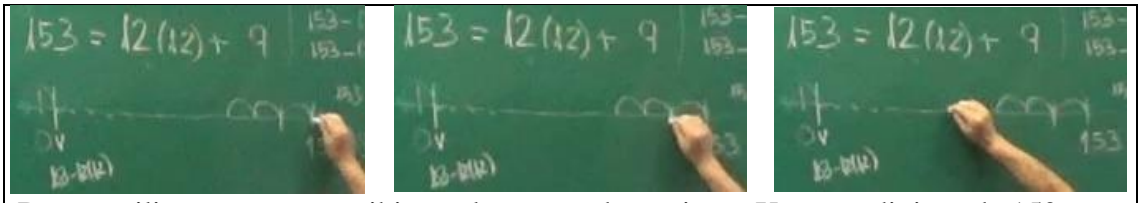
Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

$$153 - 12$$
$$153 - (2)12$$
$$153 - (3)12$$
$$153 - (12)12 = 9$$
$$153 - (13)12 = -3$$

Figura 5 – Cálculos auxiliares na obtenção do resto

A figura 6 ilustra o processo descrito nos dois parágrafos anteriores, no qual Benny posiciona todos os elementos de X na reta, da direita para a esquerda, até exibir o elemento minimal. Em conjunto com os cálculos na figura 5, isso deixa claro que o conjunto X em questão é finito (KoTp3 - conhecer as características do conjunto $X = \{153 - x12\}$, criado para a divisão de 153 por 12).



Benny utiliza a reta para exibir os elementos do conjunto X para a divisão de 153 por 12, posicionando seus elementos na reta, da direita para a esquerda.

Figura 6 – O conjunto X para a divisão de 153 por 12

No início da aula 5, Benny retoma o TADE, escrevendo-o na lousa, e relembra os estudantes sobre a necessidade de separar a demonstração da existência do quociente e do resto em três casos. Os três casos considerados são $0 \leq b < |a|$, $b < 0$ e $b \geq |a|$. Como exemplo para o caso trivial, Benny toma a decomposição de 3, considerando -7 como divisor (Figura 7), o que resulta em um quociente igual a zero e resto igual ao dividendo (KMTe3 – conhecer um exemplo de divisão $(3 \div -7)$ que se encaixa no caso trivial $(0 \leq b < |a|)$ da demonstração da existência do quociente e do resto no TADE).

Ex: $b = 3 \quad a = -7 \quad 0 \leq b < |a|$

$$3 < |-7| = 7$$
$$3 = (-7)0 + 3$$

Figura 7 - Benny exemplifica na lousa o caso trivial $0 \leq b < |a|$

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

Para exemplificar o caso em que $b \geq |a|$, Benny toma o dividendo 19 e o divisor -3 (KMTe4 – conhecer um exemplo de divisão $(19 \div -3)$ que se encaixa no caso $b \geq |a|$ da demonstração da existência do quociente e do resto no TADE), e escreve o conjunto associado $X = \{19 - 3x,\ x \in \mathcal{P}_0\}$ (KMTe5 - conhecer um exemplo concreto para a visualização do conjunto X= $\{19 - 3x,\ x \in \mathcal{P}_0\}$). Ele questiona os estudantes sobre o quociente e o resto, e solicita que verifiquem que a divisão está nas condições do caso. Na sequência, Benny pede que os estudantes escrevam os elementos do conjunto X (Figura 8) a partir do exemplo particular (KFLMs2 – conhecer a dificuldade comum dos estudantes em explicitar os elementos do conjunto gerado na demonstração do TADE).

Ex: $b = 19 \quad a = -3 \quad b \geq |a|$
$19 = |-3|6 + 1$
$X = \{19 - 3x : x \in \mathcal{P}\}$

Figura 8 - Exemplo $(19 \div -3)$ escrito na lousa

O formador ilustra geometricamente (figura 9) tal conjunto (KoTr2 – conhece uma forma de representar o conjunto $X = \{19 - 3x : x \in \mathcal{P}\}$ geometricamente, destacando os elementos desse conjunto), de maneira a obter $X = \{16, 13, 10, 7, 4, 1\}$, o que resulta em $r = 1$ e $q = 6$. É importante observar que, nesse caso, se obtêm um quociente positivo e a decomposição $b = |a|q + r$. Isso é feito para que se possa adaptar a ideia de medir quantas vezes o (módulo do) divisor cabe dentro do dividendo.

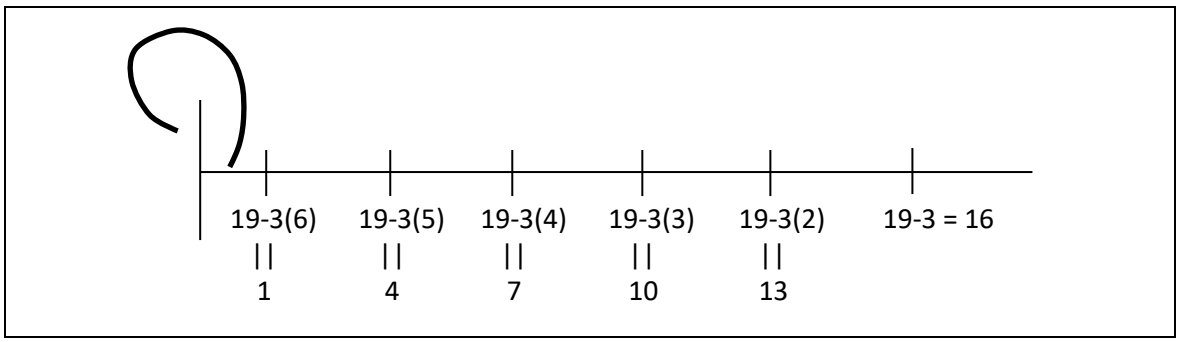


Figura 9 - Representação geométrica do conjunto X para $(19 \div -3)$, escrita na lousa

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

Na sequência, Benny apresenta um corolário a partir do caso em que $b \geq |a|$, observando que a decomposição $b = |a|q + r$ não é exatamente a mesma do TADE; porém, se o divisor for positivo, tem-se que as decomposições coincidem; se o divisor for negativo, então basta trocar o sinal do quociente obtido anteriormente. Como exemplo, o formador toma o dividendo 23 e o divisor -5 (figura 10) e escreve as respectivas decomposições no que diz respeito ao corolário supracitado: a decomposição do TADE $23 = (-5)(-4) + 3$ e a decomposição considerando o módulo do divisor $23 = |-5|4 + 3 = 5(4) + 3$ (KoTp4 – conhecer as duas formas de decompor 23, considerando o divisor positivo ou negativo).

Ex: $23 \div -5$
$b = aq + r, \quad 0 \leq r < |a|$
$|a| = 5$
$23 = 5(4) + 3$
$= (-5)(-4) + 3$

Figura 10 - Decomposições de 23, considerando o divisor para -5, escritas na lousa

Ao iniciar o caso b negativo, Benny exemplifica o subcaso do divisor positivo (figura 11), considerando o dividendo -47 e o divisor 13 (KMTe5 – conhece um exemplo de divisão $(-47 \div 13)$ que se encaixa no caso $b < 0$ da demonstração da existência do quociente e do resto no TADE). Primeiro, ele considera a decomposição do oposto de -47, que é $47 = 3(13) + 8$, e multiplica por -1, obtendo $-47 = -3(13) - 8$; e então soma e diminui nessa expressão o divisor 13, resultando na decomposição $-47 = -3(13) - 13 + 13 - 8 = (-3 - 1)(13) - 8 + 13 = (-4)13 + 5$. Isto implica que o resto e o quociente procurados são, respectivamente, -4 e 5.

Ex: $b = -47 \quad a = 13$ $\qquad b = qa + r$
$0 \leq r < |a|$
$-47 = (-3)13 - 8$
$= (-3)13 - 13 + 13 - 8$
$= (-4)13 + 5$

Figura 11 - Decomposições de -47, considerando o divisor positivo 13, escritas na lousa

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

A Tabela 4 a seguir apresenta o *Mathematical Knowledge* de Benny, revelado durante a apresentação e a prova do TADE.

Tabela 4 – O *Mathematical Knowledge* revelado por Benny

Subdomínios	Categorias	Indicadores
KoT	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd1 – conhecer que o valor do resto é limitado na divisão euclidiana KoTd2 – conhecer a definição de módulo ou valor absoluto, isto é, o módulo de um número positivo é o próprio número, e o módulo de um número negativo é o seu simétrico KoTd3 – conhecer que vale a propriedade da tricotomia para os números inteiros, isto é, cada número inteiro é positivo, negativo ou zero KoTd4 – conhecer que o divisor deve ser diferente de zero KoTd5 – conhecer que um número não se relaciona com ele mesmo através da relação $<$ KoTd6 – conhecer uma conexão intraconceitual entre divisão e subtração, resolvendo a divisão por meio de um processo de subtrações sucessivas KoTd7 – conhecer que a divisão pode ser entendida como medida e que isso se encontra associado a ver quantas vezes necessito considerar a minha unidade, ou partes dela, para efetuar a medição
	Procedimentos	KoTp1 – conhecer que, para decompor um número de diferentes formas, pode-se fixar o divisor e variar o quociente e o resto KoTp2 – conhecer como decompor o dividendo, encarando a divisão como medida KoTp3 - conhecer as características do conjunto $X = \{153 - x12\}$, criado para a divisão de 153 por 12 KoTp4 – conhecer as duas formas de decompor 23, considerando o divisor positivo ou negativo
	Registros de representação	KoTr1 – conhecer uma forma de representar a decomposição do TADE geometricamente, marcando o dividendo 153 na reta numérica, considerando 12 saltos (quociente) de tamanho 12 (divisor) e obtendo resto 9 KoTr2 – conhecer uma forma de representar o conjunto $X = \{19 - 3x: x \in \mathcal{P}\}$ geometricamente, destacando os elementos desse conjunto
KPM	Formas de proceder	KPMwp1 – conhecer como demonstrar teoremas de existência e unicidade, separando a demonstração em duas partes KPMwp2 - conhecer que a demonstração do TADE permite exibir o quociente e o resto KPMwp3 – conhecer formas de proceder em matemática, empregando a estratégia heurística da demonstração de casos

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

		KPMwp4 – conhecer uma forma de construir um conjunto X que satisfaça a relação $a = bq + r$
	Formas de validar	KPMwv1 – conhecer como demonstrar, por contradição, que um número inteiro não pode ser menor do que ele mesmo

Observamos a predominância de conhecimentos relacionados ao KoT, nas categorias *definições, propriedades e fundamentos*, *procedimentos* e *registros de representação* e, com menos frequência, relacionados ao KPM, nas categorias *formas de proceder* e *formas de validar* em matemática. O conhecimento matemático de Benny, em especial no âmbito do KoT, molda as explicações fornecidas sobre o TADE, à medida que o formador inclui na discussão conceitos como tricotomia, conexões intraconceituais entre a divisão e a subtração, explora o sentido de divisão como medida, elabora uma discussão aprofundada dos elementos e das características do conjunto X gerado para a demonstração, e busca representações geométricas para explicar o algoritmo. Tais discussões não são inerentes à demonstração do TADE, mas certamente enriquecem a compreensão dos estudantes sobre o tópico divisibilidade.

Na Tabela 5 podemos observar o *Pedagogical Content Knowledge* revelado por Benny como professor de Matemática em nível universitário (Delgado-Rebolledo & Zakaryan, 2019; Vasco & Climent, 2018).

Tabela 5 – O *Pedagogical Content Knowledge* revelado por Benny na perspectiva do professor universitário

Subdomínios	Categorias	Indicadores
KMT	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos	KMTe1 – conhecer exemplos de decomposição que não cumprem a condição $0 \leq r < \|a\|$ do TADE KMTe2 – conhecer o exemplo concreto $(153 \div 12)$ para a visualização do conjunto X= $\{153 - x12,\ x \in \mathcal{P}_0\}$ KMTe3 – conhecer um exemplo de divisão $(3 \div -7)$ que se encaixa no caso trivial $(0 \leq b < \|a\|)$ da demonstração da existência do quociente e do resto no TADE KMTe4 – conhecer um exemplo de divisão $(19 \div -3)$ que se encaixa no caso $b \geq \|a\|$ da demonstração da existência do quociente e do resto no TADE

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

		KMTe5 - conhecer um exemplo concreto para a visualização do conjunto X= $\{19-3x,\ x \in \mathcal{P}_0\}$ KMTe5 – conhecer um exemplo de divisão $(-47 \div 13)$ que se encaixa no caso $b < 0$ da demonstração da existência do quociente e do resto no TADE
KFLM	Potencialidades e dificuldades na aprendizagem da matemática	KFLMs1 – conhecer a dificuldade comum dos estudantes em perceber que a decomposição nas condições do TADE é única KFLMs2 – conhecer a dificuldade comum dos estudantes em explicitar os elementos do conjunto gerado na demonstração do TADE

Fica evidenciado o foco de Benny na apresentação de exemplos que permitam compreender melhor a demonstração do TADE, incluindo aqueles que ilustram os casos em que a demonstração é dividida e aqueles ilustrativos do conjunto gerado para a demonstração, predominando a categoria *estratégias, técnicas, tarefas e exemplos* do KMT. Também observamos o conhecimento de Benny sobre as dificuldades dos estudantes, incluso no KFLM, e provavelmente oriundo de seus muitos anos de experiência docente – essas explicações, e a forma como ocorrem, influenciam os conhecimentos matemáticos dos alunos (Charalambous, 2009). O fato de Benny estar ciente das dificuldades frequentes dos estudantes na compreensão do TADE pode explicar a ênfase e a importância que o formador dá aos exemplos, de forma que seu KFLM e KMT estão profundamente relacionados.

Tabela 6 – O *Pedagogical Content Knowledge* do formador revelado por Benny

Subdomínios	Conhecimentos	Indicadores
Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers	Conhecer sequências ou focos que podem ser mais apropriados para construir o conhecimento e a identidade e para desenvolver as habilidades dos futuros professores	KFPDMT1 - Conhecer sequências ou focos (a divisão como medida) que podem ser mais apropriados para a construção do conhecimento dos futuros professores sobre divisibilidade, ao abordar o TADE

O conteúdo identificado como parte do *Pedagogical Content Knowledge* do formador (Tabela 6) faz parte do subdomínio *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* e está relacionado com o conhecimento de focos mais

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

apropriados para a construção do conhecimento dos futuros professores sobre divisibilidade. Ao focar na divisão como medida, Benny está dedicando tempo e decidindo que essa é uma boa forma de explicar as justificativas para o algoritmo da divisão euclidiana (Contreras et al., 2017).

Considerações finais

As explicações do professor esclarecem o conteúdo e influenciam os conhecimentos matemáticos desenvolvidos pelos estudantes (Charalambous, 2009). Buscando responder nossa questão de pesquisa "Quais elementos compõem e caracterizam o conhecimento especializado de um formador ao fornecer exemplos e explicações sobre o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana?", foi possível obter indicadores do conhecimento especializado de Benny, ao discutir o TADE, com destaque para seu KMT e KFLM.

Porque os domínios e subdomínios do MTSK estão diretamente relacionados, também é importante analisar o *Mathematical Knowledge* do formador. Dessa forma, encontramos evidências de KoT e KPM, conhecimentos que moldam e enriquecem a discussão e a demonstração do TADE.

Sendo esse um teorema que recebeu bastante destaque nas aulas de Benny, não podemos deixar de notar o cuidado do formador e o modo como ele buscou preparar os estudantes para discutir o TADE, desde a aula 2, debatendo relação de ordem e o Princípio da Boa Ordenação (Almeida & Ribeiro, 2019), conceitos necessários para a demonstração pretendida.

Quanto ao PCK de Benny como formador, seu *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* possibilitou a escolha de um foco talvez menos usual (divisão como medida) nas demonstrações apresentadas por matemáticos para estudantes de licenciatura e bacharelado em Matemática (Lai & Weber, 2014), mas certamente mais contributivo para a construção do conhecimento especializado dos futuros professores (olicastro, Ribeiro, & Fiorentini, 2019).

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

Os indicadores de conhecimento do formador aqui obtidos permitirão, em investigações posteriores, comparar o conhecimento mobilizado por Benny com aquele mobilizado por outros formadores com diferentes perfis, ao abordar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana, bem como elaborar um compilado de indicadores do conhecimento especializado desses formadores no tópico da Divisibilidade. Além disso, uma importante questão que permanece em aberto se refere a como o MK e o PCK do formador nesse tópico afetam o conhecimento dos futuros professores e como podem ser articulados para a melhoria da formação matemática oferecida na licenciatura.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

Almeida, M. V. R., & Ribeiro, M. (2019). Conhecimento especializado do formador de professores de Matemática ao discutir a relação de ordem no conjunto dos números inteiros. *Quadrante*, *28*(2), 125-148.

Almeida, M. V. R., Ribeiro, M., & Fiorentini, D. (2018). Conhecimento especializado do formador de professores de matemática. In M. C. C. T. Cyrino (Org.), *Temáticas emergentes de pesquisas sobre a formação de professores que ensinam matemática: desafios e perspectivas* (pp. 194-214). Brasília, DF: SBEM.

Appova, A., & Taylor, C. E. (2019). Expert mathematics teacher educators' purposes and practices for providing prospective teachers with opportunities to develop pedagogical content knowledge in content courses. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*, 179-204. DOI 10.1007/s10857-017-9385-z

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília-DF: Ministério da Educação.

Beswick, K., & Chapman, O. (2012). Mathematics teacher educators' knowledge for teaching. *Paper presented at the12th International Congress on Mathematics Education*, Coex, Seoul, Korea.

Brown, A., Thomas, K., & Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. In Campbell, S. R., & Zazkis, R. (Eds.) *Learning and teaching number*

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

theory: Research in cognition and instruction (pp. 41–82). Journal of Mathematical Behavior Monograph. Westport, CT: Ablex Publishing.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Series Ed.), *CERME 8 Proceedings* (pp. 2985–2994). Antalya, Turquia.: ERME.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., … Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20:3, 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Montes, M., Codes, M., Contreras, R. C., & Climent, N. (2019). El conocimiento didáctico del contenido del formador de profesores de matemáticas: su construcción a partir del análisis del conocimiento especializado pretendido en el futuro profesor. In F. Imbernón, A. Shigunov Neto, I. Fortunato (Eds.), *Formação permanente de professores: experiências ibero-americanas* (pp. 324-341). São Paulo: Edições Hipótese.

Chaparin, R. O. (2010). *Concepções de divisibilidade de alunos do 1º ano do Ensino Médio sob o ponto de vista da teoria APOS.* (Dissertação de mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Charalambous, C. Y. (2009). Mathematical knowledge for teaching and providing explanations: An exploratory study. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 305-312). Thessaloniki, Greece: PME.

Chicote, R. S., Deixa, G. V. (2020). Geometric Thinking of Future Mathematics Teachers in Mozambique: a case study from Rovuma University. *Tangram*, *3*(1), 62-73. DOI: https://doi.org/10.30612/tangram.v3i1.11195

Contreras, L.C., Montes, M., Muñoz-Catalán, M.C. y Joglar, N. (2017). Fundamentos teóricos para conformar un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. In: J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. *Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 11–25). Huelva: CGSE.

Delgado-Rebolledo, R., & Zakaryan, D. (2019). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(1), 567-587. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Doumbia, C. O., Carvalho, G. S., & Almouloud, S. A. (2020). Algumas técnicas de resolução das equações diofantinas do primeiro grau a duas incógnitas em Z. *Tangram*, *3*(2), 102-126. DOI: 10.30612/tangram.v3i2.11882

Escudero-Ávila, D., Montes, M., & Contreras, L.C. (In press). What do Mathematics Teacher Educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. In M. Goos, K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators: international perspectives and challenges*. Springer.

Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education* (Vol. 4, pp. 335–361). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kelchtermans, G., Smith, K., & Vanderlinde, R. (2017). Towards an 'international forum for teacher educator development': an agenda for research and action. *European Journal of Teacher Education*, *41*(1), 120-134.

Lai, Y., & Weber, K. (2014). Factors mathematicians profess to consider when presenting pedagogical proofs. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 93-108. doi: 10.1007/s10649-013-9497-z

Montes, M., Ribeiro, C., Carrillo, C., & Kilpatrick, J. (2016). Understanding mathematics from a higher standpoint as a teacher: an unpacked example. In *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 315-322). Szeged, Hungary.

Nye, B., Konstantopoulos, S., Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis, 26*(3), 237-257.

Pizysieznig, A. H. (2011). *Qual a concepção de divisibilidade explicitada por alunos do 6º ano ao poderem utilizar calculadora?* (Dissertação de mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Policastro, M. S., Ribeiro, M., & Fiorentini, D. (2019). Mathematics Teachers' Specialized Knowledge on division: a focus on knowledge of topics and structures of mathematics. Graven, M., Venkat, H., Essien, A. & Vale, P. (Eds). (2019). *Proceedings of the 43rd*

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 209-216). Pretoria, South Africa: PME.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(1), 277-310.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1–22.

Soares, N. C.; Machado, S. D. A. (2017). Resignificando as operações com números naturais com alunos "em dificuldade" do ensino fundamental. *Ensino da Matemática em Debate*, *3*(2), 24-36.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* (1st ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Vasco, D. y Climent N. (2018). El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal. *PNA*, *12*(3), 129-146.

Zazkis, R., & Campbell, S. R. (1996). Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teachers' Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 540–563.

Zazkis, R., Sinclair, N., & Liljedahl, P. (2013). *Lesson Play in Mathematics Education*. New York, NY: Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3549-5

Zopf, D. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education.* Unpublished doctoral dissertation. Retrieved from http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/77702/1/dzopf_1.pdf. September 5, 2018.

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

Contribuições dos Autores

1.ª autora: conceitualização; curadoria de dados; análise formal; investigação; metodologia; redação – rascunho original; redação – revisão e edição.

2.º autor: conceitualização; análise formal; investigação; metodologia; supervisão; redação – rascunho original; redação – revisão e edição.

Este obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil.