

DOI: 10.30612/tangram.v5i3.12648

**Livro Aberto de Matemática em diferentes contextos
de ensino e aprendizagem: explorando questões
sobre projeções**

*Mathematics Open Book in different contexts of teaching
and learning: exploring questions about projections*

*Libro Abierto de Matemáticas en diferentes contextos de
enseñanza y aprendizaje: explorando cuestiones sobre
proyecciones*

Laura Tiemme de Castro

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade
Franciscana (UFN)
Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil
E-mail: laucaastro@outlook.com
Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-2718-0905>

Carmen Vieira Mathias

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)
Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil
E-mail: carmen@ufsm.br
Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-5667-159X>

José Carlos Pinto Leivas

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade
Franciscana (UFN)
Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil
E-mail: leivasjc@ufn.edu.br
Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-6876-1461>

Resumo: O Livro Aberto de Matemática (LAM) é um material didático digital, disponibilizado gratuitamente, no qual são propostas atividades referentes aos conteúdos de Matemática da Educação Básica. Neste artigo, teve-se por objetivo analisar o capítulo referente a projeções ortogonais envolvendo vistas em perspectiva, assim como possíveis contribuições das atividades previstas nesse apartado para o desenvolvimento de habilidades visuais de estudantes em diferentes contextos de ensino. Para coletar dados, foram propostas atividades sobre sólidos geométricos e suas propriedades em ações implementadas em um curso pré-universitário vinculado a uma universidade pública e em uma turma de terceiro ano de uma escola estadual do Rio Grande do Sul. Os dados coletados nas aplicações mostraram que as atividades despertaram o interesse dos alunos e aguçaram suas habilidades de visualização espacial, o que os auxiliou na compreensão das propostas do capítulo analisado, inclusive no que diz respeito à Geometria Espacial.

Palavras-chave: Livro Aberto de Matemática. Projeções. Visualização.

Abstract: The Mathematics Open Book (LAM) is a digital teaching material, available for free, which are proposed activities related to mathematics content of basic education. In this article the aim was to analyze the chapter on orthogonal projections involving perspective views, as well as possible contributions of the activities listed development of visual skills of students in different educational contexts. To collect data, we proposed activities on geometric solids and their properties, in actions implemented in a pre-university course linked to a public university and a high school class in a public school in Rio Grande do Sul. The data collected showed that the activities aroused the interest of students and sharpened their spatial visualization skills, which helped them to understanding the proposed chapter analyzed, including with regard to the spatial geometry.

Keywords: Mathematics Open Book. Projections. Visualization.

Resumen: El Libro Abierto de Matemáticas (LAM) es un material didáctico digital, disponible de forma gratuita, en el que se proponen actividades relacionadas con los contenidos Matemáticos de la Educación Básica. En este artículo, el objetivo fue analizar el capítulo referente a las proyecciones ortogonales que involucran vistas en perspectiva, así como las posibles contribuciones de las actividades previstas en esta sección para el desarrollo de las habilidades visuales de los estudiantes en diferentes contextos de enseñanza. Para recolectar datos, se propusieron actividades sobre sólidos geométricos y sus propiedades en acciones implementadas en un curso preuniversitario vinculado a una universidad pública y en una clase de tercer año de una escuela estatal en Rio Grande do Sul. Los datos recolectados en las aplicaciones mostraron que las actividades despertaron el interés de los estudiantes y agudizaron sus habilidades de visualización espacial, lo que les ayudó a comprender las propuestas del capítulo analizado, incluso en lo que respecta a la Geometría Espacial.

Palabras clave: Libro abierto de matemáticas. proyecciones. visualización.

Recebido em
24/08/2020
Aceito em
30/03/2022

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O Livro Aberto de Matemática (LAM) foi criado com o intuito de “produzir uma coleção de livros didáticos de Matemática, voltada para o Ensino Médio, pensada para a formação continuada do professor, de maneira colaborativa e fortemente baseada em trabalhos de pesquisa em Educação e Ensino de Matemática” (LAM, 2019). O projeto foi idealizado e, atualmente, ainda é coordenado, por professores da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO) e do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

Em 2016, o projeto foi aprovado pela direção do IMPA e, atualmente, conta com o apoio financeiro de uma fundação. Para iniciar o projeto, foi criado um site¹ e um aplicativo que permite ao usuário do livro participar de fóruns e discussões de seu interesse, além de sugerir edições no material.

A criação de um livro aberto veio da necessidade de oferecer aos professores uma alternativa aos livros didáticos utilizados nas escolas de Educação Básica no Brasil, visto que, segundo Moreira (2012), a formação de professores ainda é muito deficitária, no sentido de que não prepara esses profissionais para uma reflexão acerca dos livros didáticos que utilizam em suas aulas. Essa formação ocorre por meio de cursos de licenciatura nos quais os conteúdos específicos são executados independentes das disciplinas de ensino, ou seja, disciplinas com foco no ensino geralmente ficam a cargo dos Centros de Educação da Instituição de Ensino Superior na qual o curso faz parte. Romanatto (2004) afirma que alguns desses cursos possuem qualidade questionável, visto que, em sua maioria, utilizam livros que apresentam exercícios monótonos e repetitivos, não existindo possibilidades do aluno construir seu próprio conhecimento. A partir disso, o principal objetivo do LAM é possibilitar a democratização do acesso a livros didáticos para alunos e professores.

¹ www.umlivroaberto.org

Os capítulos do LAM são produzidos por professores de diversas Instituições de Ensino Superior, juntamente com professores da Educação Básica. Estes são convidados a participar do projeto e, de forma colaborativa, discutem e elaboram as atividades e conteúdos presentes nos capítulos. Tais capítulos devem estar alinhados com as habilidades da Base Nacional Curricular (BNCC), bem como possuir atividades não convencionais e que possam auxiliar no desenvolvimento dos conteúdos dos três anos do Ensino Médio. Esse material é disponibilizado no site do LAM, onde professores podem realizar o *download* gratuitamente para a utilização no contexto escolar.

Após utilizar o livro ou capítulo na escola básica, o professor, caso queira, poderá relatar, no próprio site, sua experiência, por meio de sugestões, críticas ou elogios às atividades que constam no material. Essas sugestões são passadas aos organizadores do projeto, analisadas e, se forem pertinentes, poderão ser incorporadas ao material. Com essa concepção, o LAM (2019) criou um ambiente para a discussão das atividades e dos currículos vigentes nas escolas onde os professores atuam e, com isso, expande-se a ideia de Educação Aberta.

Esse movimento emergente de educação combina a tradição de partilha de boas ideias com colegas educadores e da cultura da Internet, marcada pela colaboração e interatividade. Esta metodologia de educação é construída sobre a crença de que todos devem ter a liberdade de usar, personalizar, melhorar e redistribuir os recursos educacionais, sem restrições (Cabo, 2007, p. 1).

Os coordenadores do projeto acreditam que, com a colaboração de professores da Educação Básica e do Ensino Superior, poderá haver uma melhora na qualidade dos livros didáticos, visto que qualquer pessoa poderá não apenas imprimir o LAM e utilizá-lo em suas aulas, mas também sugerir mudanças ou alterações no material. Esse fácil acesso e uso pode ter como consequência a readequação nos preços dos livros didáticos, sendo esta uma das contribuições que a Educação Aberta pretende trazer para o ensino.

Para alcançar os objetivos da proposta, os coordenadores destacam a importância de se popularizar o projeto, por meio de Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC) de

Graduação e de Dissertações de Mestrado. Com a possibilidade de auxiliar na construção do LAM para o Ensino Médio, os autores do artigo produziram um trabalho baseado na aplicação de algumas das atividades do quarto capítulo do LAM para o Ensino Médio, no contexto de um Pré-Universitário Popular e de uma escola de Ensino Básico no interior do Rio Grande do Sul. Este artigo é um recorte do que foi feito durante a pesquisa.

Para a aplicação das atividades nos dois espaços escolhidos, selecionou-se o conteúdo supramencionado, uma vez que ele é cobrado regularmente no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), mas, geralmente, não é abordado durante o Ensino Médio e em cursos preparatórios para provas de ingresso ao Ensino Superior. Essa lacuna foi identificada a partir da experiência da primeira autora como professora desses dois contextos de pesquisa.

A GEOMETRIA NOS DOCUMENTOS CURRICULARES: UMA BREVE EXPLANAÇÃO

Nesta seção, será feita uma concisa descrição sobre como a Geometria é abordada em diferentes documentos curriculares referentes ao Ensino Médio, visto que os conteúdos presentes nas provas de ingresso ao Ensino Superior, em sua maioria, são embasados nesses documentos, sendo a Geometria um conteúdo recorrente em tais exames.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais PCN+ (Brasil, 2002), existem duas maneiras de se pensar a Geometria: a) com enfoque nas propriedades referentes à paralelismo, perpendicularismo, interseção e composição de diferentes formas; b) com ênfase nas medidas. Ainda segundo o documento, uma das unidades temáticas da Geometria é "interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos"(Brasil, 2002, p. 125).

Mais de uma década depois da publicação dos PCN, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi discutida em todo o país e aprovada pelo governo federal, com

intuito de estabelecer diretrizes para a educação nacional. A BNCC referente ao Ensino Médio, no que diz respeito à Geometria que deverá ser trabalhada, indica que o estudo do “movimento e posição” é necessário para o desenvolvimento do pensamento matemático, pois essas ideias têm influência direta na movimentação do aluno no seu dia a dia. Na quarta competência da área de Matemática e suas Tecnologias, tem-se a habilidade "interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas" (Brasil, 2018, p. 531).

Observa-se que as atividades propostas e constantes do TCC foram aplicadas em um curso pré-universitário, no qual a forma como os conteúdos são trabalhados é voltada à preparação para o ENEM. Desenvolve-se um trabalho nessa direção, também, com a turma de terceiro ano de uma escola pública. Nesse sentido, os alunos desses dois contextos estavam interessados na preparação para o exame em questão, sendo que, por tais razões, justifica-se a importância de a Geometria Espacial ser apresentada dessa maneira.

No contexto do curso pré-universitário, alguns alunos relatam que o conteúdo de Geometria Espacial foi apresentado a eles com enfoque nas fórmulas das áreas e volume de um sólido, o que também foi observado durante o período de reconhecimento da turma da escola. Ou seja, o tópico em questão foi introduzido para eles a partir da segunda maneira de se pensar Geometria, a qual, conforme Brasil (2002), não permite uma exploração da habilidade de visualização na construção de conceitos e propriedades.

Corroborando com esse pensamento, Araya e Alfaro (2010) afirmam que, no sistema de educação formal, geralmente os conteúdos de Geometria são apresentados aos alunos como um produto acabado da atividade matemática. Segundo os autores, o ensino tradicional dessa disciplina tem focado na parte algébrica da resolução dos exercícios, bem como nas definições geométricas. Em outras palavras, trata-se de um ensino apoiado por construções mecanicistas e descontextualizadas.

VISUALIZAÇÃO E GEOMETRIA

O trabalho focado principalmente em fórmulas e sem visualizar os objetos pode agravar a dificuldade na interpretação da passagem de uma figura representada de forma bidimensional para a tridimensional. Isso pode acarretar a falta de compreensão de conteúdos presentes nos livros didáticos, uma vez que, nem sempre, todas as vistas do objeto estão devidamente representadas no plano.

Leivas (2012) ilustra dificuldades que os alunos tiveram ao esboçar arestas invisíveis na representação de sólidos fornecidos pelo professor (Figura 1).

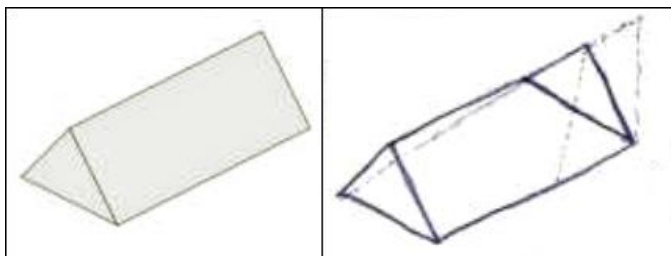


Figura 1. Representação do prisma de base triangular.

Fonte: Leivas (2012, p.10).

Além disso, o autor concluiu que, quando os sujeitos da pesquisa foram solicitados a fazer as vistas de um sólido, alguns deles apresentaram dificuldades para a realização dessa tarefa, o que pode indicar que não compreenderam como devem ser feitas as representações das faces invisíveis.

A Figura 2 ilustra a tarefa realizada por um participante que não soube representar corretamente a vista frontal do objeto disponibilizado, considerando a indicação da posição do observador. Como é possível observar, esse participante visualizou apenas três regiões quadradas, e não quatro.

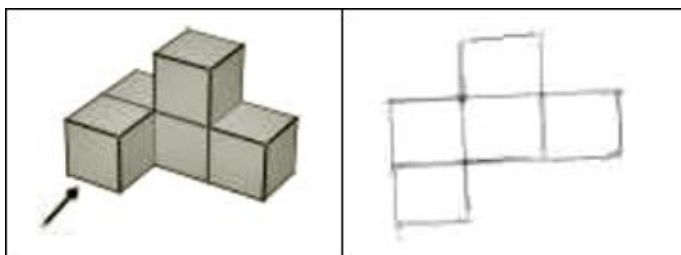


Figura 2. Vista desenhada por um dos participantes.

Fonte: Leivas (2012, p.10).

Ainda, Leivas (2014) afirma que o aluno deve passar pela fase de experimentação para compreender certas representações. Como exemplo desse fato, o autor utiliza o reconhecimento de um ângulo reto em um cubo e em um triângulo retângulo (Figura 3). De acordo com ele, o aluno apresentou dificuldades de reconhecer o ângulo reto no cubo, enquanto reconheceu com facilidade no triângulo retângulo.

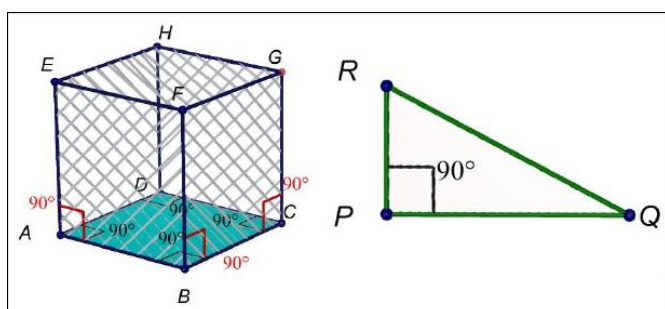


Figura 3. Representação do cubo e do triângulo retângulo.

Fonte: Leivas (2014, p.1187).

Segundo o mesmo autor, um fato que dificulta a aprendizagem da Geometria Espacial é que, de maneira geral, ela é estudada após a Geometria Plana. Via de regra, o conteúdo em questão é disposto, no livro didático, na ordem convencional, visto que as fórmulas de áreas totais e de volumes dos sólidos, na Geometria Espacial, originam-se das fórmulas da Geometria Plana. Tendo em vista que as formas espaciais estão presentes no dia a dia dos indivíduos, entende-se que a distribuição

das geometrias (plana e espacial) poderia ser alterada, de modo a contribuir para uma melhor compreensão quanto à identificação de figuras planas a partir das planificações dos sólidos.

Provavelmente, os alunos não confundiriam mais um quadrado com um cubo, por exemplo, percebendo, assim, as relações entre as formas geométricas planas e espaciais com mais facilidade. Também, deixariam de confundir um quadrado com uma região quadrada ou um cubo com uma superfície cúbica, pois a face de uma superfície cúbica é uma região plana quadrada, e não um polígono. Esse ente geométrico corresponde ao contorno de uma face, ou seja, a reunião das quatro arestas de uma mesma face do cubo.

Como resultado de sua pesquisa, Leivas (2014, p. 1186) indica a necessidade de desenvolver a habilidade de visualização, a qual, para ele, é concebida como o "processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos".

Entende-se, aqui, a visualização como uma ferramenta (habilidade) para compreender Matemática e auxiliar na abstração dos conceitos, que é algo que os alunos sentem grande dificuldade. Tal habilidade tem sido objeto de pesquisa de autores como Zimmermann & Cunningham (1991, p. 1), como observa-se a seguir: "Adotamos o termo visualização para descrever o processo de produção ou utilização de representações geométricas ou gráficas de conceitos, princípios ou problemas matemáticos, sejam eles desenhados à mão ou gerados por computador".

Para Lorenzato (1995), existe uma "Omissão Geométrica" dada por dois fatores. O primeiro é a falta de conhecimento geométrico que os professores apresentam, e o segundo, que pode estar atrelado ao primeiro, é a dependência que o professor tem do livro didático, o qual, por vezes, apresenta a Geometria "como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica" (Lorenzato, 1995, p. 4). Segundo o autor, a importância do estudo da Geometria se dá pelo fato de que sem a Geometria:

[..] as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. (Lorenzato, 1995, p. 5)

Essa dependência do professor pelo livro didático tradicional, assim como a falta de ensino da Geometria, são aspectos que podem ser mudados com o auxílio do LAM, visto que a Matemática, em especial a Geometria, está sendo trabalhada sem focalizar unicamente nas fórmulas, nomenclaturas e propriedades. Apresenta, também, atividades diferenciadas, fáceis de serem aplicadas e que deixam os alunos mais interessados no conteúdo, e a aprendizagem torna-se mais fácil. Como observado em Castro & Mathias (2019) e em Ferreira, Schmidt & Castro (2019) atividades estruturadas para o desenvolvimento de habilidades específicas, geralmente despertam mais o interesse dos alunos para o conteúdo. Tais atividades possuem mais relevância do que aquelas que usualmente são realizadas em aulas que seguem estritamente o livro didático. Nesse sentido, tais atividades indicam favorecer a aprendizagem.

METODOLOGIA

Borba, Almeida e Gracias (2019) apontam que, nos anos 1900, houve um modelo de pesquisa educacional denominado *top-down*, no qual a pesquisa era elaborada pela universidade e ia para a escola básica, isto é, “de cima para baixo”. Nesse caso, afirmam que as pesquisas eram pensadas na academia, a partir da “crença de que, como cientistas e educadores, poderíamos gerar um caminho para os professores da educação básica seguirem” (Borba, Almeida & Gracias, 2019, p. 47). Os autores afirmam que esse tipo de pesquisa foi alvo de muitas críticas e que, no final dos anos 1990, “surgia a pesquisa sobre os professores, que, com o passar do tempo, passou a ser pesquisa com os professores” (Idem, p. 47).

Esse tipo de pesquisa denomina-se pesquisa colaborativa, a qual, conforme Bortoni-Ricardo (2011), tem por objetivo a intersecção entre academia e a escola, no sentido de promover conhecimento, construção de novas práticas e auto avaliação através da ação e da reflexão.

Em vez de o pesquisador inserir-se no ambiente escolar apenas para observar, dizer o que está ou não adequado, objetiva-se discutir junto ao professor a realidade de seu trabalho, as dificuldades encontradas e oferecer subsídios teórico-metodológicos para a implementação de novas práticas que ressignifiquem seu trabalho. Trata-se, portanto, de uma proposta de pesquisa em que todo o processo é conduzido em coparticipação entre professor e pesquisador, visando sempre à reestruturação e reconstrução do trabalho (...) (Gasparotto & Menegassi, 2016, p. 949)

Assim, entende-se a presente investigação como uma pesquisa colaborativa, visto que a primeira autora, sob a supervisão dos demais, utiliza o LAM para o estudo de visualização e vistas ortogonais com os estudantes de dois espaços distintos, isto é, um curso pré-universitário e uma escola estadual. Em outras palavras, observa-se que esta pesquisa partiu do anseio da primeira autora, a qual atua como professora nesses dois contextos, de realizar uma investigação sobre os aspectos elencados anteriormente. Para isso, contou com a colaboração de dois pesquisadores mais experientes, a fim de construir conhecimento sobre o tema investigado.

O instrumento utilizado para a coleta de dados foi constituído de questões, disponíveis no capítulo “Projeções ortogonais e representações em perspectivas” do LAM. Primeiramente, os autores analisaram as questões e selecionaram as atividades 1 a 6 para aplicação. Além da adaptação das questões para aplicação, outro instrumento usado foi um questionário destinado aos participantes da pesquisa, para que fizessem uma breve avaliação das atividades.

O primeiro espaço de implementação da pesquisa foi o pré-universitário, que é um projeto de extensão de uma universidade federal localizada na região. Nesse projeto, 150 estudantes têm acesso a aulas ministradas por professores voluntários, os quais são acadêmicos de Instituições de Ensino Superior da cidade. Nesse espaço, as atividades foram aplicadas em um sábado à tarde, que é o horário disponibilizado

para atividades extraclasse. Essa primeira etapa de implementação contou com a participação de oito alunos.

O segundo espaço de implementação foi a escola Estadual, onde as atividades foram aplicadas em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio, na qual a primeira autora era regente de classe. Nesse caso, as atividades foram realizadas durante as aulas de Matemática e contaram com a participação de 18 alunos.

Em ambos os locais, foi possível aplicar duas atividades. A primeira selecionada foi denominada “Atelier geométrico”. Nela, o professor deveria dispor sobre a mesa um conjunto de objetos e o aluno precisaria representar, da forma mais fidedigna possível, tais elementos. A segunda, foi chamada “Luzes e sombras” e, para realizá-la, foi entregue, para cada grupo organizado de livre escolha, um lápis, um cubo vazado ou uma região triangular. Em seguida, o grupo deveria responder algumas perguntas referentes às sombras desses objetos, produzidas a partir da luz da lanterna do celular, por exemplo.

Já a terceira atividade, denominada de “Dois modelos de projeção”, foi aplicada somente no segundo espaço (a escola), visto que o tempo disponível nesse ambiente era maior do que no pré-universitário. Nessa ocasião, os alunos representaram com ilustrações e, em algumas situações, com as posições da luz no objeto, observando o resultado da sombra no anteparo, conforme proposto no capítulo do LAM.

RESULTADOS

Para aplicação no pré-universitário, foram disponibilizadas duas horas e, portanto, não foi possível aplicar todas as atividades selecionadas, como previsto no planejamento inicial. Na escola, as atividades seguiram como o planejado.

Sobre a atividade “Atelier geométrico”

No primeiro espaço de pesquisa, isto é, o curso pré-universitário, seguiu-se as recomendações disponíveis na unidade do LAM. Assim, os alunos foram divididos em

três grupos e, com o auxílio de projetor multimídia e de materiais impressos, as atividades foram discutidas e implementadas.

Distribuiu-se, para os grupos, três sólidos geométricos: pirâmide, cubo e cilindro. Solicitou-se, então, que os alunos os representassem. Alguns apresentaram facilidade para a realização da tarefa, ao passo que outros tiveram dificuldades para representar as faces quadradas do cubo e a curvatura da base do cilindro, como ilustra a Figura 4.

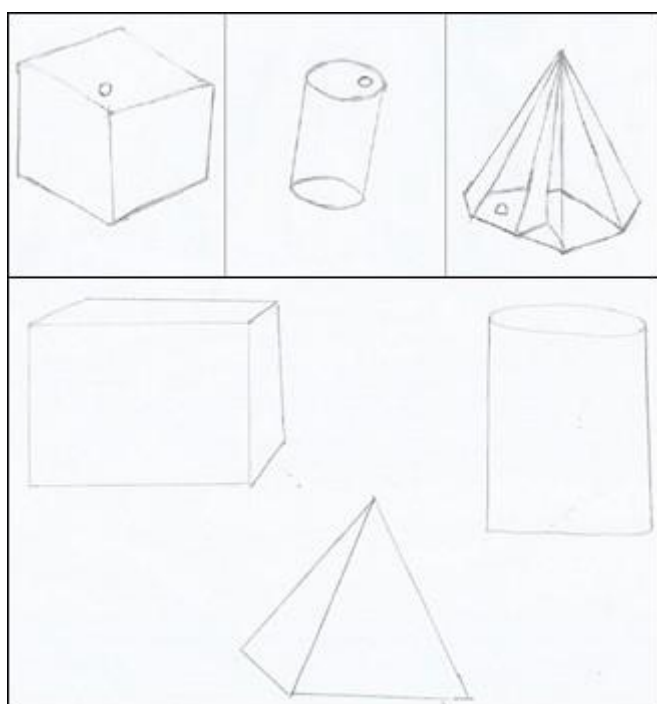


Figura 4. Representações corretas e parcialmente corretas.

Fonte: Dados da pesquisa.

A maioria apresentou dificuldades na representação dos sólidos, esboçando somente a vista frontal dos objetos, como ilustra a Figura 5. No registro em questão, observa-se, da esquerda para a direita, a representação do cilindro, da pirâmide e do cubo, respectivamente.

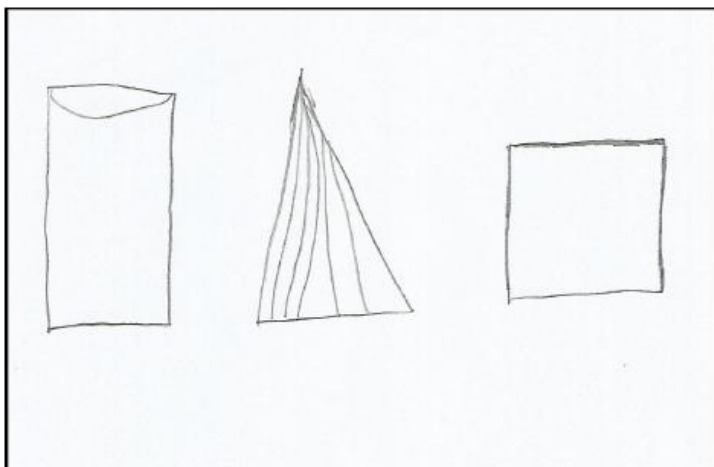


Figura 5. Representações incorretas.

Fonte: Dados da pesquisa.

Cumprе destacar que essas dificuldades eram esperadas, visto que alguns alunos que frequentam o curso pré-vestibular não tinham contato prévio com esse assunto. Tal afirmação é ancorada nas ideias de Semmer, da Silva e Neves (2013, p. 36), ao sugerirem que “o reconhecimento de uma representação gráfica e as propriedades das figuras envolvidas e suas interpretações, emergem do conhecimento que se tem sobre elas”.

No segundo espaço de implementação da pesquisa, a primeira atividade, cujo título era “Atelier geométrico”, foi adaptada, haja vista a proposta da professora de aproveitar o momento para reforçar o conteúdo de pirâmides. Nesse caso, não foram disponibilizados os sólidos, mas quatro planificações de pirâmides com diferentes bases, sendo que os alunos deveriam montá-las e representá-las na folha disponível. A Figura 6 ilustra duas representações das planificações disponíveis, uma frontal, à esquerda), e outra vista de cima, à direita).

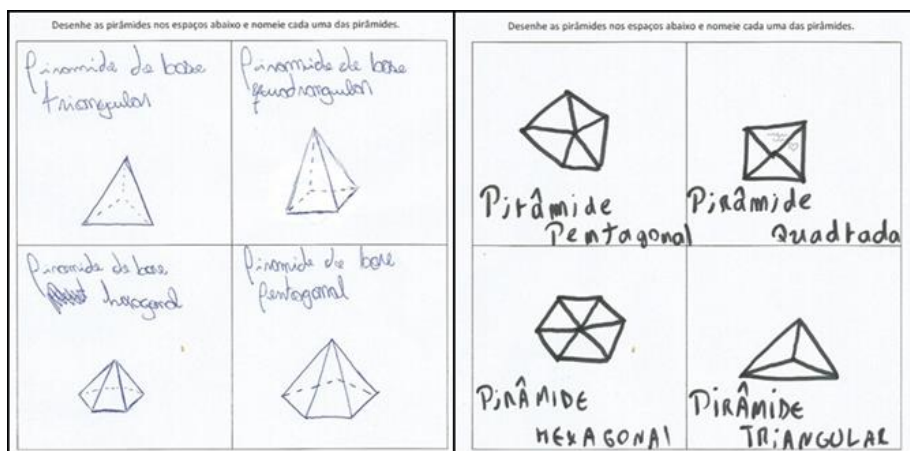


Figura 6. Representações feitas pelos alunos.

Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se que as representações não foram consideradas “corretas” ou “incorretas”, uma vez que a instrução da atividade indicava apenas uma representação, não especificando a vista que o aluno deveria tomar. Porém, a solução apresentada à direita (Figura 6) motivou uma discussão sobre como os alunos visualizavam determinados objetos e os representavam por meio de desenhos. Percebe-se que a visualização se apresentou de maneira distinta para diferentes alunos, o que é referendado nas pesquisas de Presmeg (1986), uma referência clássica quando se pensa em Educação Matemática e visualização.

Sobre a atividade “Luzes e sombras”

No primeiro espaço, os alunos foram separados em três grupos, sendo que o primeiro ficou com as atividades relativas ao lápis, o segundo com as atividades a respeito do cubo vazado e o terceiro com as atividades sobre o triângulo. No final, foi realizada a socialização das respostas.

Quanto a esse tipo de atividade, Leivas (2009, p. 71) afirma que “a passagem para a visualização, por meio dos materiais concretos observáveis, permite a construção

de estruturas mentais, em direção ao conceito”. A Figura 7 ilustra as respostas para a atividade com o lápis.

<p>(a) O comprimento da sombra é sempre igual ao comprimento do lápis, independentemente da configuração? <i>Sim, muda dependendo de como o luz bate no lápis.</i></p>
<p>(b) Existe alguma configuração para a qual o comprimento da sombra seja igual ao comprimento do lápis? <i>Sim, mais próximo da parede.</i></p>
<p>(c) Segure o seu lápis no meio com as pontas de seus dedos, isto é, considerando o lápis como se fosse um segmento de reta, segure-o pelo seu ponto médio. A sombra das pontas de seus dedos sempre está no meio da sombra do lápis independentemente da configuração? <i>Sim</i></p>

Figura 7. Respostas para os itens (a), (b) e (c).

Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se que o grupo respondeu corretamente os itens (a) e (b), porém interpretou o item (c) de maneira equivocada. A questão solicitava que o aluno segurasse no centro do lápis com as pontas dos dedos e analisasse se a sombra dos dedos continuaria no meio do lápis, independentemente da posição do objeto. A resposta correta deveria ter sido “não”, porém os alunos interpretaram que os dedos continuavam no meio do lápis.

Nos itens (d) e (e) os alunos não responderam como esperado (Figura 8).

<p>(d) Em qual configuração a sombra do lápis tem a menor área possível? <i>Quanto mais longe mais pequeno o quanto mais perto mais grande a sombra.</i></p>
<p>(e) Existe alguma configuração onde a sombra não se altere ao mover o lápis em alguma direção? <i>Sim altera dependendo do movimento do lápis</i></p>

Figura 8. Respostas para os itens (d) e (e).

Fonte: Dados da pesquisa.

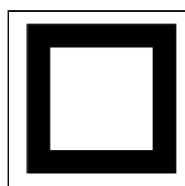
Com relação ao item (d), a resposta correta seria: quando o lápis estivesse na posição perpendicular ao feixe de luz, pois a sombra seria um círculo com raio pequeno. Quanto ao item (e), a resposta correta seria: um movimento da esquerda para a direita, paralelamente ao chão e à parede.

Conforme Costa (2002, p. 264), “as experiências de observação envolvem percepção e interpretação e são medições que dependem da experiência passada, de aspectos específicos da nossa cultura, portanto o que vemos, depende do que trazemos à situação”. Como se relatou em etapas anteriores deste estudo, os alunos do primeiro espaço da pesquisa não possuíam muita experiência nesse tipo de atividade, o que ajuda a explicar tal dificuldade.

O grupo que trabalhou com o cubo vazado apresentou menos dificuldade para a realização das questões. Recorda-se que todas as questões são baseadas na unidade Projeções Ortogonais e Representações em Perspectivas do LAM. Os itens dessa questão (denominada “cubo vazado”) continham os seguintes enunciados:

a- As arestas do cubo vazado têm todas o mesmo tamanho. O mesmo acontece para as sombras destas arestas?

b- Existe alguma configuração para a qual a sombra do cubo vazado seja semelhante à imagem da figura a seguir? Em caso afirmativo, é possível manter esta sombra movendo o cubo vazado em alguma direção? Qual?



c- Arestas que são perpendiculares no cubo vazado têm sombras que são perpendiculares no anteparo de projeção?

d- Arestas que são paralelas no cubo vazado têm sombras que são paralelas no anteparo de projeção? (Bortolossi & Crisaff, 2017, p. 17-18)

Os alunos desse grupo responderam todos os itens corretamente. Porém, as respostas foram pouco desenvolvidas, visto que era possível responder as perguntas somente com “sim” ou “não”.

O grupo que mais apresentou dificuldade foi o que trabalhou com o triângulo, visto que, para responder às perguntas, seus integrantes deveriam saber o que é triângulo isósceles, equilátero e qualquer. Os alunos relataram que não recordavam desses conceitos. Percebe-se (Figura 9) que, para responder aos itens (a) e (b), analisaram a região triangular, e não a sua sombra. Nos itens (c) e (d), não houve problemas quanto às respostas, apesar da questão (d) estar incompleta.

<p>(a) Existe alguma configuração para a qual a sombra do triângulo é um triângulo isósceles?</p> <p><i>Não existe porque são diferentes. tem que ter 2 lados da mesma medida</i></p>
<p>(b) Existe alguma configuração para a qual a sombra do triângulo é um triângulo equilátero?</p> <p><i>Não, porque os três lados são diferentes</i></p>
<p>(c) Em qual configuração a sombra do triângulo tem a menor área possível?</p> <p><i>Em uma área reta</i></p>
<p>(d) Existe alguma configuração onde a sombra do triângulo não se altere ao movê-lo em alguma direção? Qual?</p> <p><i>Sim</i></p>

Figura 9. Respostas da questão da atividade triângulo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Embora todos os alunos tenham participado da resolução das questões, percebeu-se que nem todos prestaram atenção enquanto os outros grupos estavam socializando suas respostas, o que seria de suma importância para que a atividade fosse realmente aproveitada pela totalidade da turma.

Para a aplicação no segundo espaço de pesquisa, isto é, a escola, decidiu-se que todos os grupos fariam todas as atividades propostas. Nesse caso, quem manusearia o objeto frente ao feixe de luz seria a professora. Durante a socialização das respostas, a docente também foi a mediadora da discussão, e todos os alunos participaram com suas soluções e dúvidas.

A partir disso, selecionou-se algumas atividades referentes ao lápis e ao cubo. Optou-se por não fazer as atividades sobre a região triangular, visto que o tempo disponível acabou ficando aquém do que fora disponibilizado inicialmente. Além disso, levou-se em consideração a relevância das demais questões. Os dados coletados mostraram que todos os alunos resolveram todas as atividades, pois, como foi mencionado, quem movimentou os objetos foi a professora. Essa decisão foi muito importante no desenvolvimento das atividades, pois possibilitou a discussão das questões e de suas respectivas respostas, sendo a professora somente a mediadora desse momento da investigação.

Para as atividades do lápis, foram realizadas as mesmas perguntas. Os alunos apresentaram facilidade para realizar as tarefas propostas. Como ocorrera no primeiro espaço, aqui também foi possível observar certa dificuldade quanto à interpretação do item (c). Na sequência, apresenta-se o enunciado do item em questão.

c) Segure o seu lápis no meio com as pontas de seus dedos, isto é, considerando o lápis como se fosse um segmento de reta, segure-o pelo seu ponto médio. A sombra das pontas de seus dedos sempre está no meio da sombra do lápis independentemente da configuração? (Bortolossi & Crisaff, 2017, p. 16)

A Figura 10 ilustra a resposta de um dos alunos, na qual é possível perceber, no item (c), o mesmo equívoco da resposta apresentada em momentos anteriores da pesquisa, durante a implementação com um dos grupos do pré-universitário. Com o grupo em questão, foi observado os dedos segurando o objeto lápis, ao invés de sua sombra na parede.

- a) Não, dependendo do ângulo e da profundidade o comprimento será diferente
- b) Sim, quando ele estiver mais próximo da projeção feita pela sombra do lápis
- c) Sim, os dedos criam um "ponto fixo" no lápis
- d) Quando ele estiver perpendicular à superfície, mostrando apenas o topo do lápis
- e) Sim, ao movê-lo horizontalmente e verticalmente de um lado ao outro com o lápis no mesmo sentido.

Figura 10. Respostas dadas para atividade.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa aplicação, a atividade do cubo vazado teve a inclusão de um item (e), como apresentado em Bortolossi & Crisaff (2017, p.16). Houve essa inclusão por acreditar-se que essa nova questão geraria uma discussão em sala de aula, o que não ocorreu na primeira aplicação.

Os itens (a), (b) e (c) da atividade com o cubo vazado foram respondidos corretamente pelos alunos desse espaço de aplicação (a escola). Todos eles tiveram respostas corretas (Figura 11), incluindo o item (d), a respeito do paralelismo das arestas, e o item (e), sobre a face representada na figura.

- d) Não e sim. Depende do ângulo. As arestas da face continuam paralelas e as arestas opostas não continuam paralelas.
- e) D C H G → com experimento.
A B E F → sem experimento.

Figura 11. Respostas para os itens (d) e (e) da atividade cubo vazado.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na escola, ainda foi aplicada uma última questão retirada do LAM, na qual os alunos deveriam representar a sombra de uma região triangular, a partir da lanterna de um celular apontando para o objeto triangular. Os alunos gostaram dessa atividade e acharam interessante o fato de que a sombra do lápis era menor do que ele, mesmo

quando em posição perpendicular ao anteparo. Uma aluna apresentou essa situação com a região triangular (Figura 12).

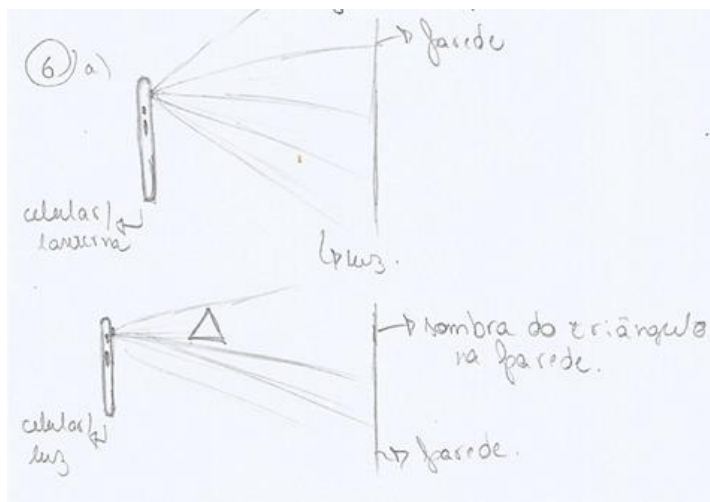


Figura 12. Representação feita por uma das alunas.

Fonte: Dados da pesquisa.

A maior dificuldade dos alunos foi fazer a representação em perspectiva, porém as ideias nas respostas estavam corretas.

No geral, percebeu-se que outra dificuldade dos estudantes foi a interpretação das questões. Alguns deles reclamaram da forma como as atividades estavam escritas, relatando que não conseguiram compreender o que era solicitado. Acredita-se que isso ocorreu por dois motivos: (a) nunca haviam trabalhado com atividades como as apresentadas no livro aberto; (b) nunca tinham explorado visualização com as sombras de um objeto.

Os alunos relataram, além disso, que o tipo de enunciado dava brecha para que respondessem somente com “sim” ou “não”, impossibilitando uma análise, por parte do professor, se o aluno realmente entendera o que foi solicitado. Sugere-se que o professor trabalhe conforme o que foi realizado na segunda aplicação, isto é, sendo um moderador da discussão dos alunos. Dessa forma, acredita-se ser possível obter

respostas mais completas, bem como realizar adaptações nas questões, a fim de que os estudantes explicitem melhor sua compreensão a respeito do tema.

Durante a aplicação do questionário em ambos os locais, quando indagados sobre as atividades, os participantes foram unânimes em afirmar que essas propostas, além de interessantes, possuíam grande importância para o aprimoramento da visualização espacial. Foi destinado um espaço no questionário a críticas e sugestões, no qual todos os alunos elogiaram as atividades, porém, alguns pediram mais cálculos. Observou-se que essa solicitação de adicionar exercícios com mais algebrismo/cálculos mostra que, provavelmente, esses alunos são não-visualizadores, visto que, conforme Presmeg (1986), visualizadores são aquelas pessoas que preferem utilizar a visualização para a resolução de problemas matemáticos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentou-se, neste artigo, uma pesquisa realizada em dois espaços de pesquisa: um curso pré-universitário e um terceiro ano do Ensino Médio de uma escola. A pesquisa teve por objetivo analisar o capítulo referente a projeções ortogonais envolvendo vistas em perspectiva, bem como possibilidades de contribuição destas para o desenvolvimento de habilidades visuais de estudantes em contextos de ensino diferentes.

Ao analisar as soluções apresentadas para questões selecionadas do projeto LAM, que exigiam habilidades de visualização de propriedades de sólidos geométricos, acredita-se que tal propósito foi cumprido. Os dados mostraram que os alunos conseguiram compreender os conceitos que foram apresentados por meio das atividades aplicadas, as quais exploraram visualização.

Para Santos (2014, p. 59), “a geometrização serve como alicerce para o desenvolvimento do pensamento matemático”. Os exercícios propostos neste trabalho auxiliaram no processo de visualização dos alunos. Com isso, percebe-se

que, ao desenvolver tal habilidade, propostas dessa natureza podem ser utilizadas para a compreensão da álgebra envolvida na obtenção de fórmulas, bem como para o reconhecimento de propriedades no ensino de Geometria. Durante as aulas em que se realizou a pesquisa, ao posicionarem as figuras planas de diversas maneiras, realizarem a passagem de representações de figuras bidimensionais para tridimensionais (e vice-versa) e trabalharem as fórmulas dos sólidos a partir de manipulações e planificações destes, os alunos apresentaram uma melhora na compreensão das fórmulas e das relações presentes no estudo dos sólidos, além de visualizá-los e representá-los com mais facilidade

Aplicando essas atividades, contudo, percebeu-se que algumas mudanças teriam de ser realizadas para o melhor aproveitamento dos tópicos estudados. Por exemplo, em um segundo momento de implementação, não separar os alunos em grupos. Além disso, destacou-se que as atividades não chamaram tanto a atenção dos alunos no curso preparatório. Talvez seja mais interessante, logo no início da atividade, motivar os alunos com questões que aparecem no ENEM, com o intuito de mostrar que habilidade visual é recorrente nas questões desse exame. Porém, as mesmas atividades, quando aplicadas de outra maneira, chamaram atenção dos alunos da escola, onde se pôde concluir que aguçaram suas habilidades de visualização espacial. Em outras palavras, essa atividade auxiliou na compreensão de conteúdos relativos à Geometria Espacial.

Algo importante de ser ressaltado é que o LAM disponibiliza as respostas das questões para os professores afim de que mais profissionais tenham a iniciativa de se envolver com tais atividades. Para Lorenzato (1995), os professores não se sentem capacitados para lecionar conteúdos de Geometria, e a pesquisa, nesse sentido, pode estimulá-los. Acredita-se que essa seja a maior contribuição desse trabalho: apresentar o capítulo como uma possibilidade real que pode ser aplicada em sala de aula. Isto se justifica, pois as tarefas propostas pelo LAM ao longo de seus capítulos, em especial no apartado investigado neste trabalho, cujas atividades foram implementadas e analisadas, estimulam o aluno a ser ativo do início ao fim. O

professor é somente o mediador das discussões que surgirem sobre elas, o que vai ao encontro do que Lorenzato (1995) afirma sobre a Geometria valorizar o descobrir, o conjecturar e o experimentar.

REFERÊNCIAS



Araya, R. G. & Alfaro, E. B. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista electrónica educare*, 14(2), 125–142. DOI: <https://doi.org/10.15359/ree.14-2.9>

Brasil (2002). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília, DF: Ministério da Educação. Recuperado em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da Educação. Recuperado em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192>

Borba, M. de C. & Almeida, H. R. F. L. & Gracias, T. A. de S. (2019). *Pesquisa em ensino e sala de aula: Diferentes vozes em uma investigação* (numero da edição). Local da edição: Autêntica. (Trabalho original postado em 2016)

Bortoni-Ricardo, S. M. (2011). *O professor pesquisador: introdução à pesquisa qualitativa* (2a ed.d) São Paulo: Parábola.

Bortolossi H. & Crisaff L. (2017) Projeções Ortogonais e Representações em Perspectivas. In Simas, F. & Teixeira, A. (Orgs). *Livro Aberto de*

Matemática. Rio de Janeiro: IMPA. Disponível em:

<https://www.umlivroaberto.org>

Cabo, D. da cidade do (2007). *Declaração da cidade do cabo para a Educação*

Aberta: abrindo a promessa de Recursos Educacionais Abertos. Cape

Town. Disponível em:

<http://www2.abed.org.br/documentos/ArquivoDocumento539.pdf>

Castro, L. T. de & Mathias, C. V. (2019). Estudando sólidos geométricos a partir de suas vistas ortogonais com auxílio do GeoGebra. In Ritter, D & Soares, G. de O. (Orgs.), *Ensino de matemática em foco: pesquisas, relatos e propostas* (1 ed., 364 p.). Rio de Janeiro: Dictio Brasil.

Costa, C. (2002). Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. *Anais do Encontro da Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação* (p. 257)

Ferreira, R. S., Schmidt, L. F. T. & Castro, L. T de. (2019). Construções com Régua e Compasso: um relato de experiência. In Ritter, D & Soares, G. de O. (Orgs.), *Ensino de matemática em foco: pesquisas, relatos e propostas* (1 ed., 364 p.). Rio de Janeiro: Dictio Brasil.

Gasparotto, D. M. & Menegassi, R. J. (2016). Aspectos da pesquisa colaborativa na formação docente. *Perspectiva*, 34(3), 948-973. DOI:

<https://doi.org/10.5007/2175-795X.2016v34n3p948>

Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática*. Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, Brasil.

Leivas, J. C. P. (2012). Habilidade de visualização com alunos da licenciatura em matemática em geometria espacial [Grupos de trabalho]. In Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Eds.). *Comunicações*, V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Petrópolis, Brasil: SBEM.

Leivas, J. C. P. (2014). Ensino de geometria: uma experiência investigativa em uma aula de mestrado profissionalizante. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 16(4), 1181–1199.

LAM- Livro Aberto da Matemática. (2019). *Projeto*. Rio de Janeiro: IMPA Disponível em:<https://www.umlivroaberto.org/BookCloud/Metodologia/master/view/apresentacao-e-objetivos.html#elaboracao>

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria?. *A educação matemática em revista*. 4, 3-13.

Moreira, P. C. (2012). 3+ 1 e suas (in) variantes: reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na licenciatura em matemática. *Bolema*, 26(44), 1137-1150. DOI: <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000400003>.

Presmeg, N C. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 297-311.

Romanatto, M. C. (2004). O livro didático: alcances e limites. *Encontro paulista de matemática* (p. 1).

Santos, A. H. (2014). *Um estudo epistemológico da visualização matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização*. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, Brasil.

Semmer, S.; Silva, S. de C. R. da. & Neves, M. C. D. (2013) Anamorfose no ensino de geometria. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 6(3), 61-86.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics: a project sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of The Mathematical Association of America*. Washington: MAA, 1991.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.