e-ISSN: 2595-0967

Análise da produção de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, veiculada em cartazes, acerca da presença ou não de proporcionalidade em situações cotidianas de preços de produtos

Analysis of the production of 7th grade students, in posters, about the presence or absence of proportionality in everyday product price situations

Análisis de la producción de estudiantes de 7 ° año de primaria, mostrada en carteles, sobre la presencia o no de proporcionalidad en situaciones cotidianas de precios de productos.

Paulo Jorge Magalhães Teixeira
Universidade Federal Fluminense – UFF, Departamento de Análise
Rio de Janeiro, Brasil
E-mail: paulojorge@id.uff.br
Orcid :0000-0001-8256-6486

Enviado:24/12/2019
Aceito:31/08/2020
DOI: 10.30612/tangram.v3i4.10869

Resumo: O objetivo geral deste artigo reside em apresentar e analisar dados das produções apresentadas por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de um colégio público, fruto de um trabalho de campo relacionado com o conteúdo proporcionalidade e os resultados sintetizados em cartazes afixados nas paredes de uma sala de aula. O trabalho está inserido em um estudo amplo, que objetiva responder questões pertinentes com os conhecimentos necessários para a docência de professores em serviço. Trata-se de uma pesquisa qualitativa modalidade pesquisa-ação estratégica, segundo Franco (2005), em que a análise dos dados colhidos ao acaso constituíram o mote para apontar indicações a respeito de como a proposição de atividades pelo professor, sem a devida correção dos resultados obtidos, pode afetar distorções em relação a inadequada apropriação de conhecimentos pelos alunos. Os resultados revelaram indícios de o conteúdo não ter sido desenvolvido de maneira adequada e em consonância com a efetiva compreensão acerca de um dos significados do conceito proporcionalidade, envolvido nas situações-problema apresentadas.
Palavras-chave: Grandezas Proporcionais. Proporcionalidade. Educação Matemática.

Abstract: The general objective of the work is inserted in the concerns of a large study that aims to answer pertinent questions to the knowledge for teaching teachers in service. Resides in presenting and analyzing the data present in productions presented by students of the 7th grade of elementary school, through posters posted on the walls of a public school classroom. It was considered a qualitative research, strategic action research modality, according to Franco (2005), in which the

analysis of the data, collected at random, constituted the motto to indicate indications about how the proposition of activities and the Not correcting the respective results can affect distortions regarding the inappropriate appropriation of knowledge of the proportionality, content by the students. The results revealed evidence that the content was not adequately developed to effectively understand the concept of proportionality - involved in problem situations.
Keywords: Proportional Quantities. Proportionality. Mathematics Education.

Resumen: El objetivo general de este artículo es presentar y analizar datos de las producciones presentadas por alumnos de 7 ° año de primaria en una escuela pública, el resultado de un trabajo de campo relacionado con la proporcionalidad del contenido y los resultados sintetizados en carteles colgados en las paredes de una sala de clase. El trabajo es parte de un estudio amplio, que tiene como objetivo dar respuesta a preguntas pertinentes con los conocimientos necesarios para la enseñanza del profesorado en servicio. Se trata de una modalidad de investigación cualitativa de investigación-acción estratégica, según Franco (2005), en la que el análisis de datos recolectados al azar constituía el lema para señalar indicios sobre cómo la proposición de actividades por parte del docente, sin la debida corrección de la Los resultados obtenidos, pueden afectar distorsiones en relación a la apropiación inadecuada de conocimientos por parte de los estudiantes. Los resultados revelaron evidencia de que el contenido no se desarrolló adecuadamente y en consonancia con la comprensión efectiva de uno de los significados del concepto de proporcionalidad, involucrado en las situaciones problema presentadas.
Palabras-chave: Cantidades proporcionales. Proporcionalidad. Educación Matemática.

Motivação

Tanto um professor quanto um pesquisador, cada um a seu modo e tempo, está sempre à procura de conhecer acerca de algo que está em estreita conexão com a sua prática pedagógica ou com a sua área de pesquisa. Seja porque pode levar novidades para os seus alunos ao agir dessa maneira, seja porque um pesquisador sempre está em constante aprendizado ao longo de toda a sua carreira e a pesquisa traz luz a questões que talvez ainda não tenham sido pensadas por ele. Desse modo, tudo o que venha contribuir para melhorar e enriquecer a prática de um professor ou o trabalho de um pesquisador será sempre benvinda. Se pode dizer que a proposta deste trabalho está bem próxima dessas duas questões mas não exatamente ao encontro delas, visto que a coleta dos dados em análise neste artigo ocorreu ao acaso.

O autor estava em visita a um colégio público, conversando com colegas acerca da possibilidade de eles e seus alunos participarem como sujeitos de um amplo estudo que está encaminhando, quando ao final das tratativas um dos colegas indagou se não gostaria de conhecer os trabalhos que os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental haviam produzido no trimestre que acabara de terminar. Convite aceito, foi encaminhado até a sala de aula onde os alunos estudam de modo a conhecer os resultados dos trabalhos, afixados em cartazes.

Chegando à sala de aula o autor se portou como um expectador que observou com atenção o conteúdo e os resultados mostrados nos cartazes, os quais estavam afixados nas paredes laterais e na parede de fundo da sala de aula. Essa mesma postura é repetida pelo autor, todas as vezes que visita uma mostra pedagógica que ocorre ao final de um semestre letivo na maioria dos colégios e escolas de ensino básico, de modo habitual. Em seguida, o autor perguntou ao colega que o acompanhava se poderia fotografar o material, de modo a analisá-lo com mais atenção em casa, uma vez que tinha se interessado pelo conteúdo abordado, no que foi atendido pelo colega. Desse modo, as produções colhidas - as quais serão objeto de análise dos dados, neste artigo - são resultantes dos trabalhos de campo dos alunos da turma, cujo conteúdo constava dos referidos cartazes. Por questão de ética profissional, tanto o nome do colégio quanto os nomes dos alunos e dos professores serão omitidos. Cabe ressaltar, e desde já, que as análises dos dados ocorreram sobre os dados colhidos nos cartazes. Portanto, não cabe qualquer julgamento acerca de como o conteúdo da Matemática possivelmente possa ter sido apresentado e desenvolvido, pelo professor que propôs a atividade para os alunos que confeccionaram os referidos cartazes.

Além do mais, a motivação do autor ao escrever este trabalho também vai ao encontro do que Freire (2013) aponta com muita propriedade, quando salienta que o

> [...] meu papel no mundo não é só o de quem constata o que ocorre, mas também o de quem intervém como sujeito de ocorrências. Não sou apenas objeto de história, mas seu sujeito igualmente. No mundo da história, da cultura, da política, constato não para me adaptar, mas para mudar (Freire, 2013, p. 75).

Em estreita conexão com as motivações que levaram o autor a escrever este trabalho corroboramos com Freire (2013), mais uma vez, quando afirma que

> [...] Constatando, nos tornamos capazes de intervir na realidade, tarefa incomparavelmente mais complexa e geradora de novos saberes do que simplesmente a de nos adaptar a ela. É por isso também que não me parece possível nem aceitável a posição ingênua ou, pior, astutamente neutra de quem estuda, seja o físico, o biólogo, o sociólogo, o matemático, ou o pensador da educação. Ninguém pode estar no mundo, com o mundo e com os outros de forma neutra. Não posso estar no mundo de luvas nas mãos constatando apenas. A acomodação em mim é apenas caminho para a inserção, que implica decisão, escolha, intervenção na realidade. Há perguntas a serem feitas insistentemente por todos nós e que nos fazem ver a impossibilidade de estudar por estudar. De estudar des-comprometidamente como se misteriosamente, de repente, nada tivéssemos que ver com o mundo, um lá fora e distante mundo, alheado de nós e nós dele (Freire, 2013, p. 75).

Introdução

O estudo ao qual o autor tem se debruçado, ultimamente, em responder, tem a seguinte pergunta principal: "*Que experiências um professor de matemática precisa vivenciar, e delas se apropriar, de modo a compreender, elaborar, resolver, aplicar e mediar situações de aprendizagem com o propósito de desenvolver o raciocínio proporcional financeiro de alunos da escola básica por meio da proposição de problemas da Educação Financeira de modo a compreender as dificuldades que eles enfrentam, e para ajudá-los a superar essas dificuldades*?"

Cabe acrescentar que embora não seja objeto de escrita neste artigo, o estudo tem desdobramentos e um dos focos se direciona na tentativa de responder perguntas específicas - algumas já em fase de coleta de dados -, acerca das quais se espera contribuições para fundamentar respostas à questão principal do estudo em questão. Inicialmente, o autor considerou a sua disposição para escrever este artigo pautada no objetivo de querer estudar em profundidade o conteúdo dos dados que foram coletados nos cartazes. E a partir dele, conhecer e compreender as razões que teria tido o professor da turma para propor o tal trabalho de campo para os seus alunos. Também norteava a ideia de tentar conhecer as razões que o professor teria tido para afixar os cartazes (ou pedir que os alunos o fizessem), com os resultados das produções dos alunos, para o conhecimento de todos que possivelmente se interessassem em "*dar uma rápida olhadinha*" no conteúdo presente nos referidos cartazes.

Imaginava este autor que, ao afixar os cartazes o professor talvez tivesse imaginado que todos os que fossem ver os trabalhos pudessem admirar-se e soltar para si, e, quem sabe, também para quem estivesse ao seu lado, uma exclamação de admiração ou de contentamento tipo "*interessante*", "*que legal*", "*que bacana*", ao final de uma rápida passagem de olhos pelos cartazes. Tudo isto porque, acreditamos, dificilmente um expectador teria/terá o/a interesse/preocupação/ em fazer uma ou outra reflexão mais aprofundada acerca do conteúdo contido nas resoluções, e nas respostas para os problemas apresentados nos cartazes, por conta de considerar-se estar ali como um expectador, um observador, e não como um avaliador. Para escrever este artigo prevaleceram os objetivos de estudar e avaliar o conteúdo dos dados e as produções dos alunos apresentadas nos cartazes, em profundidade, e à luz dos conhecimentos de conteúdo e pedagógicos de conteúdo presentes na carreira docente de um professor que ensina Matemática.

Os sujeitos do trabalho

Mesmo considerando que este trabalho não se configura como um trabalho de pesquisa propriamente dito - tal como entendemos devam ser tais trabalhos, pela não existência de uma questão de pesquisa - mas uma motivação para a análise dos dados, consideramos os estudantes que se debruçaram em resolver os problemas propostos os nossos sujeitos de estudo, pois eles comunicarem os resultados obtidos e as conclusões a que chegaram por meio da confecção dos cartazes e estes foram os dados que utilizamos em nossas análises. Assim, pelo cômputo dos nomes que constam na parte inferior dos referidos cartazes tem-se um total de 24 sujeitos de estudo. Como dito, considerou-se que o lócus de coleta dos dados foram os cartazes afixados nas paredes de uma sala de aula.

O tipo de trabalho

Tangram Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

O conteúdo que deu origem aos dados que serão objeto de análise neste artigo são os constantes da quarta parte de um dos 5(cinco) cartazes afixados nas paredes da sala de aula. O propósito é o de analisar as produções de conteúdo constantes desta particular parte de um dos cartazes desgarradas de análises de conhecimentos pedagógicos de conteúdo que nortearam a proposta do professor da turma ao propor a atividades para os seus alunos. O conteúdo completo dos outros quatro cartazes e das outras três partes desse cartaz será objeto de análise em um outro artigo, por conta do limite de páginas aqui.

O autor entende que o ensino ofertado aos alunos da escola básica deve implicar em aprendizado capaz de permitir que eles aprendam, no dia a dia, a lidar com diversos desafios que são propostos pelos seus professores. O propósito de um ensino com vistas à construção de saberes - que se desenvolve na escola - deve recair na importância que os alunos precisam aprender a emprestar a partir das experiências que são vivenciadas por eles nas comunidades em que habitam. Também, não se pode desconsiderar que tais saberes se alinham aos que estão intimamente imbricados com a história pessoal de cada um no seio familiar. Por sua vez, tais saberes e experiências são partes constitutivas dos alicerces em que são edificados os saberes pessoais e profissionais que irão perdurar por todas as suas vidas. A proposição de trabalhos escolares como o que é objeto de análise de dados neste artigo vai ao encontro dessas questões, e reflete bem a importância do papel do professor e da escola na construção de saberes de conteúdo e atitudinais.

Metodologia do trabalho

O trabalho teve início com o firme propósito do autor em apenas analisar os dados constantes dos cartazes - a comunicação das respostas - por meio da produção dos alunos frente ao desafio lançado pelo professor. De início um planejamento foi elaborado para tal, tomando por base o objetivo do trabalho no sentido de conhecer como o conteúdo proporcionalidade é desenvolvido no livro didático adotado pelo professor, no 7º ano do ensino fundamental. Por conta desse objetivo se pode denominar tratar-se de uma "pesquisa-ação estratégica" em escala pequena, segundo Franco (2005), uma vez que vislumbramos configurar-se como uma possibilidade de trabalho que visa contribuir para a melhoria da realidade educacional do ensino da Matemática na Escola Básica. Ademais, o trabalho toma um dos propósitos presentes na cultura da colaboração "juntos podemos ser mais fortes", ao levar em conta que se pode considerar a possibilidade de outros professores também refletirem a respeito das questões levantadas e analisadas no trabalho no seio de grupos colaborativos ou nas escolas, com os seus pares.

Em síntese, a cultura da colaboração segundo Hargreaves (1998) consiste em: identificar os problemas do grupo; estudar, refletir, discutir e buscar ações coletivas, que visem solucionar os problemas; implementar as ações definidas no grupo para a solução dos problemas e, em seguida, validar ou não tais ações coletivas; refletir sobre as ações de implementação e validação apresentando os resultados alcançados de modo a serem analisados pelo coletivo; confrontar com os problemas levantados de início e, uma vez superados, partir para a identificação de novo problema. Embora não tenha sido em um coletivo que o problema chamou sua atenção, que foi objeto de reflexões pessoais a respeito e nos momentos em que analisou os dados para escrever este artigo, o autor identificou algo que não o deixou confortável: a maneira inadequada como os resultados dos problemas foram obtidos, e comunicados nos cartazes. Daí a necessidade que o autor sentiu de tentar encontrar subsídios que mostrem o que teria ocorrido na comunicação; mostrar como as respostas para esses tipos de problemas podem ser comunicadas, e lançar luz para os cuidados que o professor precisa ter quando propor situações parecidas a estas.

Referencial teórico

O foco do trabalho reside no conhecimento profissional docente, apoiado nas ideias de Shulman (1986), com viés nos conhecimentos: de conteúdo e pedagógico do conteúdo. Shulman (1986) chama a atenção para o conhecimento de conteúdo ao identificá-lo como "*paradigma perdido*", salientando que "*o domínio de um conteúdo é imprescindível para o* *ensino de qualquer disciplina*". Além do mais, o autor também busca discutir os conhecimentos dos professores que servem de base para a formação e a atuação docente, quais sejam: de conteúdo, pedagógicos de conteúdo e conhecimentos curriculares.

Para a análise das respostas para os problemas apresentados nos cartazes reportamo-nos à Tall e Vinner (1981). Tais autores definem *imagem conceitual* como a estrutura cognitiva total que é construída na mente de uma pessoa a respeito de determinado conceito matemático, abrangendo todas as ideias, imagens mentais, impressões, representações visuais e descrições verbais relativas a propriedades e processos que envolvem aquele conceito. Segundo Tall e Vinner (1981):

> (...) como resultado e por meio de experiência de todos os tipos que uma pessoa se vê envolvida ao longo do tempo a imagem de um conceito vai se constituindo e se transformando continuamente quando ela passa pelo enfrentamento de novos estímulos (Tall e Vinner, 1981, p. 2).

Também reportamo-nos à perspectiva de Fischbein (1994) segundo aspectos presentes na atividade matemática, a saber: Aspecto intuitivo - associado à compreensão que uma pessoa considera como auto evidente, que intuitivamente ela seja capaz de compreender e quer que os outros também a aceitem sem que disponha de argumentos convincentes para provar sua validade -; Aspecto algorítmico - associado à aplicação e o funcionamento de técnicas, habilidades e procedimentos padronizados de resolução, cuja apropriação não dispensa uma formação meticulosa requerida para o seu desenvolvimento – e Aspecto formal - diz respeito aos conhecimentos que estão relacionados com definições, axiomas, teoremas e provas de resultados que devem ser aprendidos, organizados e aplicados pelos alunos com o propósito de justificar e provar que as técnicas funcionam. Segundo Fischbein (1994), o componente intuitivo (ou, simplesmente, compreensão intuitiva, cognição intuitiva, solução intuitiva) "*diz respeito a uma compreensão que uma pessoa considera auto evidente*". Essa compreensão é de tal maneira aceita pela pessoa que ela é capaz de aceitar uma ideia ou um conhecimento sem sequer questionar de que é preciso que haja necessidade de encontrar um tipo de justificativa que venha a legitimá-la. Além do mais, ainda segundo Fischbein (1994),

> (...) é indispensável que se ofereça aos alunos um processo educativo que valorize a apropriação do componente formal, considerando que compreender o que seja rigor e coerência em Matemática não é uma tarefa que o aluno adquira de maneira espontânea sem prescindir do professor (Fischbein, 1994, p. 232).

Fischbein (1994), apud Teixeira (2012), quando refere aos aspectos formal e algorítmico, pontua que conhecer e explorar a íntima relação que há entre os 2(dois) aspectos constituem-se em condições básicas para o desenvolvimento de um raciocínio matemático eficiente, não prescindindo, porém, do aspecto intuitivo. Ademais, (Fischbein, 1994, p. 232) também argumenta que o conhecimento acerca dos componentes formais não garante o necessário para o enfrentamento de quaisquer problemas, pois "o domínio de técnicas e procedimentos isento do conhecimento de argumentos que justificam a utilização dessas técnicas pode não ser suficiente para a resolução de problemas que fogem ao padrão".

Conhecimento do conteúdo grandezas proporcionais

Dizemos que y é função de x, e escreve-se $y = f(x)$, quando se sabe que as grandezas x e y estão relacionadas de tal modo que a cada valor de x especificado corresponde um valor y bem determinado. Costuma-se, pois, dizer, que o par ordenado (x, y) está bem definido, no sentido da relação de dependência entre as grandezas x e y (grandeza livre y em relação à grandeza dependente x). Uma vez que y é função de x, se diz que "*y é uma função crescente de x*" quando a cada 2(dois) valores distintos x_1 e x_2 (correspondentemente, $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$) se a desigualdade $x_1 < x_2$ implica sempre que $y_1 < y_2$.

Se diz, também, que "*a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x*" quando as 2(duas) primeiras condições especificadas a seguir, são satisfeitas: (i) y (ou f) é uma função crescente de x; (ii) se multiplicarmos x por um número racional positivo m o valor correspondente de y também fica multiplicado por m. Em linguagem matemática escreve-se assim: $f(m.x) = m.f(x)$, para todo valor de x e todo número racional positivo m. Por conta dessa condição existe um número k, chamado de "*constante de proporcionalidade*" entre x e y, tal que f(x) = k.x, para todo valor de x. Mas, atenção: na definição de grandezas diretamente proporcionais será preciso que as 2(duas) condições acima sejam atendidas. Um só condição não garante proporcionalidade.

Por conta das considerações anteriores, é possível levar em conta a seguinte definição: y é diretamente proporcional a x quando existe uma constante k tal que y = k.x.

A partir do conhecimento teórico acerca do conceito função, como descrito acima, os livros didáticos da Educação Básica procuram explorar o conceito de proporcionalidade direta entre 2(duas) grandezas x e y relativamente à função por meio de outra maneira (talvez, mais apropriada de se definir o conceito de proporcionalidade para os estudantes do Ensino Fundamental - estudantes que ainda não conhecem aspectos próprios das funções lineares e das hipérboles), como descrito a seguir. Considere valores distintos x_1, x_2 e x_3 assumidos pela grandeza x e, correspondentemente, valores distintos y_1, y_2 e y_3 assumidos pela grandeza y. De modo que y seja diretamente proporcional a x (proporcionalidade direta) é necessário e suficiente que $y_1 = f(x_1) = k.\ x_1$, $y_2 = f(x_2) = k.\ x_2$ e $y_3 = f(x_3) = k.\ x_3$. Tais igualdades implicam que $k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots$.. Podemos fazer um resumo de tudo o que foi dito acima por meio da seguinte definição: “Se diz que 2(duas) grandezas y e x são diretamente proporcionais (que a proporcionalidade entre elas é direta) quando entre elas há uma correspondência, de tal modo que ao se multiplicar a grandeza x por um número racional positivo a quantidade correspondente de y também fica multiplicada por esse mesmo número”, tal qual Lima (1991) defende.

É importante salientar que as ideias associadas aos conceitos afetos à proporcionalidade e os correlatos procedimentos presentes na composição e nas estimativas de grandezas são fontes naturais e potenciais de inter-relação entre si e, por essa razão, se prestam a uma abordagem do conteúdo em que relações podem ser estabelecidas a partir daí. O conceito de proporcionalidade é rico em significados. Está presente, por exemplo, nas seguintes situações, algumas delas do universo cotidiano: Na resolução de problemas multiplicativos: Considere que Bia possui 4(quatro) blusas, nas cores branco, lilás, verde e azul e 3(três) saias, nas cores: preta, cinza e amarelo. De quantos modos Bia pode se vestir, fazendo uso de uma saia e de uma blusa? Se a quantidade blusas dobrar o número de modos de Bia se vestir dobra? Se a quantidade saias triplicar o número de modos de Bia se vestir triplica? Se a quantidade blusas dobrar e a quantidade saias quadruplicar, o número de modos de Bia se vestir fica multiplicado por 8(oito)? Consideramos que tais tipos de problemas podem ser propostos a alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental; Nas análises de tabelas ou gráficos; na semelhança de figuras; nos estudos de porcentagem: Qual o percentual de aumento de um produto cujo preço, hoje, é de R$50,00 e um mês depois passará a custar R$51,75? ; o Teorema de Talles: Toda paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros 2(dois) lados em segmentos proporcionais. Tais tipos de problemas podem ser propostos a alunos dos anos finais do Ensino Fundamental; Na aplicação de funções lineares; a Lei de Hooke; a Lei de Gravitação Universal de Newton, bem como na Matemática Financeira: Considere juros compostos, M(t) o montante, C_o o capital inicial, taxa de i% ao ano, t o tempo em anos, $M(t) = C_o.(1 + i)^t$, j = juros rendidos pela aplicação de C_o à taxa i durante t anos. Assim, tem-se que $j = f(C_o, i, t)$. Claramente, a função f é crescente de cada uma das 3(três) variáveis envolvidas. Ademais, j é diretamente proporcional a C_o mas não é diretamente proporcional a quaisquer potências de i ou de t, uma variável de cada vez, pois se caracteriza um crescimento exponencial. Tais tipos de problemas podem ser propostos a alunos do Ensino Médio.

Além do mais, são muitos os aspectos presentes no cotidiano dos cidadãos que podem ser modelados segundo considerações pertinentes às ideias de proporcionalidade entre grandezas. Por conta disso, salientamos a importância de o raciocínio proporcional ser amplamente explorado na escola básica, uma vez que ele se mostra oportuno para fazer a interpretação de fenômenos que ocorrem no mundo real em diferentes situações.

O raciocínio proporcional também está associado à inferência e à predição, além de envolver métodos qualitativos: Tal resultado faz sentido, à luz da situação envolvida? e no tocante a métodos quantitativos: O resultado esperado supera o resultado obtido ou não?

Tangram Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

Quanto falta? ou Quanto está a mais? O raciocínio proporcional, exercitado em problemas com proporções, por exemplo, requer do sujeito que está encaminhando a resolução do problema um diferenciado olhar por conta de a abordagem exigir a avaliação sob vários pontos de vista, mormente para identificar situações em que o que está em questão é a presença da não-proporcionalidade entre 2(duas) grandezas.

O ensino de proporcionalidade, no sentido mais amplo da sua abrangência, em problemas escolares, não é uma tarefa de fácil compreensão e de apropriação simples - a menos que se pense em propor problemas nos quais se afirme de antemão haver a presença da proporcionalidade e se peça aos alunos que exercitem procedimentos mecanizados de cálculo, para obter uma ou outra grandeza. Mais difícil é identificar se no problema está presente o conceito da proporcionalidade em relação às grandezas envolvidas. Tanto é um conteúdo difícil para o professor que vai ensinar quanto para o aluno, que precisa aprender.

Para ambos, professor e aluno, é preciso ter clareza quanto à identificação do conceito ao estabelecer um modelo matemático que retrate com fidelidade o que está ocorrendo em relação às informações veiculadas, e as informações que podem ser obtidas a partir daí, mesmo que com restrições em relação às grandezas envolvidas. Também, e não menos importante, é preciso considerar os procedimentos a serem aplicáveis ao modelo estabelecido. Ademais, uma vez tendo concebido um modelo matemático que atenda ao problema em uma situação concreta, e analisá-lo, é preciso compreender que um modelo atende à situação sob certas condições e que há limites das grandezas envolvidas. Ou seja, uma vez que o modelo obtido atenda à condição de uma grandeza ser proporcional (direta ou inversamente) a outra grandeza, por exemplo, será preciso considerar que tal validez se dá dentro de certos limites de variação, para as 2(duas) grandezas envolvidas.

Uma das aplicações da noção de proporcionalidade é a conhecida "Regra de Três". Na "Regra de Três" se tem uma grandeza y (direta ou inversamente) proporcional a x, isto é: $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. O problema consiste em encontrar um dos 4 valores x_1, x_2, y_1 ou y_2, conhecendo-se os outros 3 valores. Portanto: "Se y é diretamente proporcional a x então a

e-ISSN: 2595-0967

“Regra de Três” é dita direta”, e “Se y é inversamente proporcional a x então a “Regra de Três” é dita inversa”. Ressalte-se que primeiramente é preciso que se garanta ser y diretamente proporcional a x para que a “Regra de Três” seja resolvida, pois a partir daí se tem que: $y_1 = f(x_1) = k.\, x_1 \longrightarrow k = \frac{y1}{x1}$; $y_2 = f(x_2) = k.\, x_2 \longrightarrow k = \frac{y2}{x2} \longrightarrow \frac{y1}{x1} = \frac{y2}{x2} \longrightarrow y_2 = \frac{y1.x2}{x1}$.

Também é preciso que se garanta ser y inversamente proporcional a x para que a “Regra de Três” seja resolvida, pois a partir daí se tem que: $y_1 = f(x_1) = \frac{k}{x1} \longrightarrow k = x_1.\, y_1$; $y_2 = f(x_2) = \frac{k}{x2} \longrightarrow k = x_2 .y_2 \longrightarrow x_1.\, y_1 = x_2 .y_2 \longrightarrow y_2 = \frac{y1.x1}{x2}$. É importante notar que é possível encontrar o valor de y_2, nos dois casos, sem que o valor de k seja preciso ser conhecido.

Além do mais, cabe também esclarecer que quaisquer conclusões obtidas a partir da noção de proporcionalidade pressupõe admitir como hipótese adjacente a de que o modelo matemático adotado se aplica à situação que está sendo considerada uma vez que nem sempre o modelo de proporcionalidade é o mais adequado. Até aqui foram feitas considerações entre uma grandeza e outra, mas tal pode ocorrer entre mais que 2(duas) grandezas. Assim, considere uma função f de várias grandezas: f (x, y, u, v, w) = z. Se diz que z é diretamente proporcional a x, y e inversamente proporcional a u, v, w se existe uma constante k tal que $z = k.\, \frac{x.y}{u.v.w}$. As afirmações são equivalentes, no sentido de que a primeira implica na segunda e a segunda implica na primeira. Então: Uma grandeza é diretamente proporcional a várias outras se e somente se é diretamente proporcional ao produto dessas outras; Uma grandeza é inversamente proporcional a várias outras se e somente se é inversamente proporcional ao produto dessas outras. Vamos exemplificar essa questão com um exemplo, como a seguir:Seja um retângulo, como o que está desenhado na Figura 1, a seguir, com medida da base igual a x e medida da altura igual a y.

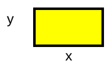

Figura 1 – Retângulo de medidas x e y

Fonte: autor (2020)

Tangram Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

É preciso mostrar que a área A = A (x, y) do retângulo, de dimensões x e y, é diretamente proporcional a x e a y. De fato: Se $x_1 < x_2$ então A (x_1, y) < A (x_2 , y), porque o retângulo de medida de base igual a x_1 e altura de medida y está contido no retângulo de medida de base x_2 e mesma medida y de altura, como mostrado na Figura 2, a seguir.

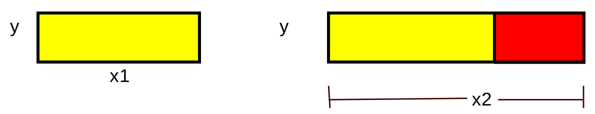

Figura 2 – Retângulos de medidas x_1 e y, e medidas x_2 e y
Fonte: autor (2020)

Também se pode constatar que o retângulo de medida de base **m**.x e medida de altura igual a y se decompõe como reunião de **m** retângulos justapostos, todos eles com medida de base igual a x e medida de altura igual a y, como mostra a Figura 3, a seguir.

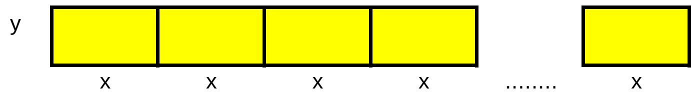

Figura 3 – **m** retângulos justapostos, todos eles de medidas x e y
Fonte: autor (2020)

Logo: A (**m**.x, y) = **m**. A (x, y). Da afirmação bem acima, uma vez que z = A (x, y) é diretamente proporcional a xy, então, existe uma constante **k** tal que A (x, y) = **k**. (xy) (1). Mas, A (1, 1) = **k**. A (1, 1) = **k** é a área de um retângulo de medida de base e medida de altura iguais a 1 (portanto, um quadrado de lado igual a 1). Tal quadrado é tomado então como unidade de área. Logo: A (1, 1) = A (1) = 1^2 = 1. Então: A (1, 1) = **k**. A (1, 1) = **k** .1 = **k** (2) e A (1, 1) = A (1) = 1^2 = 1 (3). Logo, de (2) e (3), tem-se que k = 1 (4). Daí, de (1) e (4): A (x, y) = **k**. (xy) = 1.(xy) = xy. Portanto, A = A (x, y) é diretamente proporcional a x e a y e, também, A = A (x, y) é diretamente proporcional ao produto xy. Então, A (x, y) = xy. Assim, tal implicação acarreta o conhecimento da fórmula que determina a área de um retângulo. Isto é, pelo fato de A = A (x, y) ser diretamente proporcional a x e a y é que a fórmula para determinar a área de um retângulo é estabelecida tal qual a conhecemos e usamos no dia a dia. Logo, provamos que se A = A (x, y) é diretamente proporcional a x e a y, então A (x, y) = xy (fórmula que determina a área de um retângulo de medidas x e y).

Como em Matemática Financeira, nas aplicações a juros compostos, temos o exemplo de uma grandeza que é função crescente de cada uma das variáveis de que depende, sendo diretamente proporcional a alguma delas e não sendo sequer diretamente proporcional a alguma potência de cada uma das outras. É o caso de grandezas que são direta ou inversamente proporcionais a 2(duas) ou mais outras e que dão origem ao tipo de problema conhecido como "Regra de três composta", a saber: z é diretamente proporcional a x e y; z é inversamente proporcional a u. Assim, uma vez que $z_1 = f(x_1, y_1, u_1)$ seja conhecido se procura determinar o valor $z_2 = f(x_2, y_2, u_2)$. Daí: $z_1 = f(x_1, y_1, u_1) = k.\frac{x1\,.\,y1}{u1}$ e $z_2 = f(x_2, y_2, u_2) = k.\frac{x2\,.\,y2}{u2}$. Então: $\frac{z2}{z1} = \frac{x2\,.\,y2}{u2} . \frac{u1}{x1\,.\,y1}$. Logo: $z_2 = \frac{z1\,.x2\,.\,u1.\,y2}{x1\,.\,y1\,.u2}$.

Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Como visto antes, uma vez que o conceito de proporcionalidade está presente em diversas aplicações - algumas aplicáveis para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, outras aplicáveis para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e outras para alunos do Ensino Médio -, o professor que ensina Matemática precisa ter domínio amplo acerca deste conceito e de seus diferentes significados. Também é preciso que o professor esteja preparado no tocante aos conhecimento de conteúdo e pedagógico de conteúdo e em condições de fazer a transposição didática para cada um dos significados da proporcionalidade, conforme o conceito se aplique à temática desenvolvida e para o correspondente universo de alunos a qual o conceito esteja sendo ensinado.

Desde já, adiantamos não ser uma tarefa simples, pois é preciso que se tenha compreensão plena acerca das ferramentas que devem ser mobilizadas para caracterizar as varáveis envolvidas, de modo a estabelecer o modelo matemático que atende às situações que serão exploradas em seguida e as hipóteses prévias e básicas que precisam ser testadas.

Tangram
Revista de Educação Matemática
e-ISSN: 2595-0967

O conhecimento pedagógico de conteúdo, segundo Shulman (1986), precisa ser mobilizado pelo professor de modo que tenha plena compreensão acerca dos significados de proporcionalidade que precisam ser apropriados pelos alunos durante a apresentação e o desenvolvimento da temática, independentemente do conteúdo que precise ser explorado e para qual universo de alunos da escola básica se destine.

Análise dos resultados obtidos nas resoluções das atividades presentes nos cartazes

A Figura 4, mostrada a seguir, apresenta o primeiro problema (a 1ª dentre as 4 partes em que o 1º cartaz foi repartido) cuja análise dos dados se dará em prosseguimento.

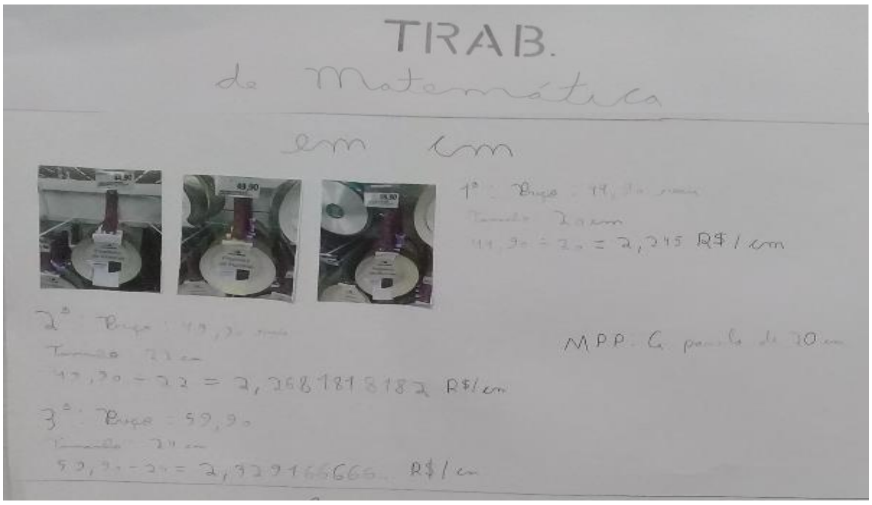

Figura 4 – Preços de 3(três) tipos de panelas, e a solução do problema pelos alunos
Fonte: autor (2020)

A situação mostrada acima é a 4ª parte de um dos cartazes que o autor coletou. As demais partes deste mesmo cartaz, e os outros 4 cartazes, serão analisadas em um outro artigo, por conta da limitação de espaço para publicação. Na ocasião, faremos referência a este artigo.

As fotos desta parte do cartaz mostram 3(três) diferentes tipos de panelas e os respectivos preços, os quais foram coletados pelos alunos na loja que as vendiam. As panelas diferenciam-se pelas medidas dos "diâmetros da circunferência da borda de cada uma das panelas escolhidas", e os respectivos preços. O cartaz indica que as medidas dos diâmetros são 20, 22 e 24 centímetros e os preços, respectivamente, de R$44,90, R$49,90 e R$59,90.

Os alunos consideraram os resultados das divisões dos preços afixados nos produtos pelos respectivos valores das medidas dos diâmetros, em centímetros, e concluíram que o MPP – menor preço proporcional (indicação feita no referido cartaz) é o correspondente ao da panela de diâmetro igual a 20 cm. Por conta dos registros mostrados no cartaz entende-se que, para cada uma das 3 panelas, uma vez os alunos tenham calculado o valor do quociente entre o preço de cada panela e a respectiva medida do diâmetro eles podem ter admitido, intuitivamente, que “cada um dos valores encontrados para os quocientes seja proporcional à medida do respectivo diâmetro”. E, por conta disso, eles escolheram o menor dentre os quocientes e o elegeram como o MPP (por orientação ou não do professor, não sabemos). Ao assinalarem o MPP (menor preço proporcional) como a resposta que procuravam, parece-nos estar implícito que eles tomaram o valor do quociente, para cada uma das panelas, como sendo proporcional e que a escolha recaiu sobre o menor desses preços.

Constata-se certa confusão com os termos utilizados: nos são os preços que são objeto de comparação mas sim os valores correspondentes aos respectivos quocientes entre o valor afixado para cada panela e a medida do diâmetro. E porque razão eles seriam proporcionais? Que conceitos podem ter sido apropriados pelos alunos a ponto de fazerem tal julgamento sem a exposição de motivos? Seria um conhecimento tácito? E, finalmente, o que a escolha do menor preço proporcional indica em termos de considerar ser esta a melhor compra que pode ser feita, por exemplo? Ou, se este não é o caso, que relação há entre o MPP e o fato de não haver proporcionalidade entre as grandezas?

Avaliemos pois a decisão implícita de os alunos terem considerado haver uma proporcionalidade presente no problema em questão, por meio de 2(duas) distintas situações:

1ª) Verificar se há proporcionalidade direta em relação aos valores dos quocientes (grandeza y) e os valores das medidas do diâmetro (grandeza x), considerando como referência o valor do quociente entre o preço da panela estipulado pela loja e a medida de diâmetro igual a 20 cm. Assim: $f(x) = y = 2, 245.x$, pois para $d = 20$ cm, o quociente R$44,90 por 20 cm é igual a R$2,245/cm. Assim, para $d = 22 \text{ cm} = 1,1 \times 20$ cm, o quociente R$ 49,90 por 22 = 1,1 x 20 cm é igual a R$2,268/cm (como indicado no cartaz), mas f(22) = 2,245 x 22 = R$49,39 e não o valor R$49,90 que foi estipulado. Para d = 24 cm = 1,2 x 20 cm, o quociente R$ 59,90 por 24 cm é igual a R$2,4958/cm (como indicado no cartaz), mas f(24) = 2,245 x 24 = R$53,88, e não o valor R$59,90 que foi estipulado. Assim, não há proporcionalidade entre cada um dos valores (quociente entre o preço de venda estipulado para um tipo de panela e a respectiva medida do diâmetro) (grandeza y) e a medida do respectivo diâmetro) (grandeza x), considerando como referência o valor do quociente obtido pelo preço da panela de preço igual a R$44,90 e a medida do diâmetro igual a 20cm. Salientamos que a ideia de tomar a grandeza x (medida do diâmetro) como uma das grandezas para verificar a presença ou não de proporcionalidade é inadequada, como será visto mais adiante.

2ª) Verificar se o preço final da panela (grandeza y) é ou não diretamente proporcional à medida do diâmetro (grandeza x): Tal poderia ser feito assim: Para d = 20 cm, o preço estipulado para essa panela foi R$44,90. Para d = 22 cm = 1,1 x 20 cm, o proporcional preço deveria ser R$44,90 x 1,1 = R$49,39 e não o preço que foi estipulado para essa panela: de R$49,90. Para d = 24 cm = 1,2 x 20 cm, o proporcional preço deveria ser R$44,90 x 1,2 = R$53,88 e não o preço que foi estipulado para essa panela: de R$59,90. Assim, não há proporcionalidade entre os preços de venda estipulados para as panelas e as respectivas medidas do diâmetro, considerando como referência o preço da panela de medida de diâmetro igual a 20cm.

A partir daí, levantam-se as seguintes questões: No conteúdo do cartaz não foram apontadas por parte dos alunos as grandezas que mereceram análise de possível proporcionalidade direta. Ora, proporcionalidade entre que e quem? Mas, considerando o que está escrito no cartaz: “preços proporcionais”, tudo leva a crer ter sido considerado haver proporcionalidade entre 2(dois) preços entre si, por exemplo. Será? Quais seriam os preços? Entre os preços finais estipulados para cada uma das panelas, não nos parece haver sido considerado proporcionalidade mas, talvez, entre os “valores obtidos nos 3 quocientes”. Qualquer que tenha sido a motivação, tal fato não é verdade pois não há proporcionalidade.

Fato é que não é correto levantar questão acerca da existência ou não de proporcionalidade entre 2(duas) grandezas, quando estas forem o valor do quociente entre o preço da panela e a medida do diâmetro (grandeza y), e a medida do diâmetro (grandeza x).

Para o autor, fica um misto de perplexidade e preocupação. Perplexidade sobre as motivações quanto à proposta de realização de trabalhos tais como o que está sendo analisado, e preocupação em relação ao que esses alunos conhecem de fato acerca do conceito proporcionalidade e de seus diferentes significados - considerando que alguns significados ainda serão ensinados a esses alunos nos anos seguintes do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Analisemos pois o caso geral, em relação às áreas de círculos, como a seguir: Considere um círculo cuja medida do raio é igual a r. Claramente, a área de um círculo de medida r de raio é dada pela função $A(r) = \pi.r^2$. Além do mais, essa função é função crescente da medida do raio do círculo no sentido de que se a medida do raio aumenta a medida da área do círculo também aumenta. Mas, será que esse aumento da área do círculo é diretamente proporcional ao aumento da medida do raio r?

A resposta é, não! Pois, por exemplo, se a medida do raio do círculo é igual a r (a área do círculo é igual a $A(r) = \pi.r^2$ e essa função é crescente, vez que os valores de r são positivos (medidas)), e essa medida do raio passar para 2r (a área do novo círculo é igual a $A(2r) = \pi.(2r)^{2} = \pi.4r^2 = 4\pi.r^2 = 4.A(r)$), a área do novo círculo quadruplica em relação à medida da área anterior. Portanto, ao dobrar a medida do raio a medida da área do círculo quadruplica, apontando que a função $y = A(r)$ não é diretamente proporcional a $x = r$.

Assim, para a verificação da não-proporcionalidade entre as grandezas *volume da panela* (grandeza y) em relação à *medida do raio* (grandeza x) tem-se que considerar a medida r do raio e o volume da panela. Para efeito de análises, vamos considerar que uma panela se aproxime de um cilindro, o que, sabe-se, não é verdade. De modo intuitivo, se pode considerar que um cilindro é resultante da justaposição de círculos iguais, de espessura

e-ISSN: 2595-0967

unitária, tantos quanto necessários para atingir a altura h do cilindro. Assim, seja r a medida do raio do círculo da base da panela e seja h a medida da profundidade da panela, em centímetros. Como visto, a grandeza y (área do círculo: $A(r) = \pi.r^2$) não é diretamente proporcional à medida de r (grandeza x). Considerando $V(r) = \pi.r^2h$ o volume de um cilindro - o "*volume da panela*" de altura h e raio da base igual a r -, claramente se vê que a grandeza volume (grandeza y) não é diretamente proporcional à grandeza medida r do raio (grandeza x). Por outro lado, a grandeza volume (grandeza y) é diretamente proporcional à grandeza "*medida h da altura do cilindro*" (grandeza x), a medida da "*profundidade da panela*". Mas há uma grandeza presente na situação que não foi considerada mas que é necessário levar em conta: o preço da panela. Na verdade tudo se passa em relação à verificação da existência ou não de proporcionalidade direta entre o preço de venda estabelecida para cada panela e o "*diferencial entre uma panela e outra*", qual seja, "o que cada uma pode conter a mais que a outra que justifique a variação de preços".

Portanto, uma vez que a grandeza preço (y) não é diretamente proporcional à grandeza raio (x) mas é diretamente proporcional à grandeza (x) profundidade da panela (h) - mantendo constante o valor do raio r em $V(h) = (\pi.r^2).h$ -, se pode estabelecer preços, se fosse o caso, que estariam diretamente proporcionais à medida da profundidade da panela.

Para efeito de exemplo acerca do que está em questão aqui, consideremos a panela cujo preço é R$44,90, e suponha que a sua profundidade é igual a h = 1,5 cm, como padrão de referência. Assim, para h = 1,8 cm de profundidade o preço de $44{,}90 \times \frac{1{,}8}{1{,}5}$ = R$53,88 seria o preço a ser cobrado de modo a haver proporcionalidade entre preço e profundidade. Para h = 2 cm de profundidade o preço de $44{,}90 \times \frac{2}{1{,}5}$ = R$59,87 seria o preço a ser cobrado de modo a haver proporcionalidade entre preço e profundidade.

A Tabela 1, a seguir, mostra os resultados em relação ao exemplo apresentado acima:

Tabela 1: Preço unitário de cada panela, diretamente proporcional à profundidade

Tipo de panela	Profundidade panela (h) (em cm)	Volume $V(h) = \pi r^2 h$ (em cm^3)	Preço unitário
A	1,5	$1{,}5\ \pi r^2$	R$44,90
B	1,8	$1{,}8\ \pi r^2$	R$53,88
C	2,0	$2{,}0\ \pi r^2$	R$59,87

Fonte: o autor (2020)

Finalizando esta análise, salientamos que na resolução que foi apresentada no cartaz se identifica certa confusão quanto ao conceito de proporcionalidade - o que pode apontar não ter sido apresentado e desenvolvido o conceito de maneira adequada em sala de aula, ou então, que se trata de uma particular situação de não apropriação correta do conceito por parte dos alunos desse particular grupo. Corroborando com o que afirma Fischbein (1994, p.232), é preciso considerar que

> (...) é indispensável que se ofereça aos alunos um processo educativo que valorize a apropriação do componente formal, considerando que compreender o que seja rigor e coerência em Matemática não é uma tarefa que o aluno adquira de maneira espontânea sem prescindir do professor (Fischbein, 1994, p. 232).

E por essa razão consideramos que a resolução apresentada carece de conhecimentos de conteúdo que a legitimem. A situação ilustra que os componentes desse particular grupo não se apropriaram de conhecimentos de conteúdo da maneira correta havendo, pois, necessidade de que reestudem os conceitos, e que o professor promova uma ampliação conceitual acerca da temática. Segundo Tall e Vinner (1981, p.2) salientam,

> (...) como resultado e por meio de experiência de todos os tipos que uma pessoa se vê envolvida ao longo do tempo a imagem de um conceito vai se constituindo e se transformando continuamente quando ela passa pelo enfrentamento de novos estímulos (Tall e Vinner, 1981, p. 2).

Além do mais, também corroboramos com o que apontam Tall e Vinner (1981, p. 2) aceca de que “a imagem de um conceito vai se constituindo e se transformando continuamente quando uma pessoa passa pelo enfrentamento de novos estímulos”, e portanto, será preciso que esses alunos se confrontem com novos situações em que um outro significado da proporcionalidade esteja presente (e isso terá lugar, felizmente) para que o conceito seja apropriado de modo correto e se consolide. Segundo o entendimento deste autor, o conceito de proporcionalidade é um conceito matemático por demais importante para todos os cidadãos - independentemente da atividade profissional que o sujeito desenvolva -, e precisa ser corretamente compreendido, sim, não importando quando e onde. Preocupa-nos enormemente o fato de o senso comum volta e meia estar se valendo, erradamente, e em muitas situações, da ideia da proporcionalidade, de tudo o que lhes parece "*estar em proporção*". Parece que é algo natural, habitual falar ou escrever sobre proporcionalidade, e que isso esteja com frequência presente no senso comum para justificar certas conclusões errôneas, ou quando a proporcionalidade se presta a querer dar um sentido que não é o adequado e correto. Tal ocorre, também, em relação a ideia acerca de '*números que crescem'* e que, segundo o senso comum, tudo parece acontecer segundo um "*crescimento exponencial*". Interessante é que pouco ou nada é atribuído a "*números que decrescem*" segundo um "*decrescimento exponencial*", mesmo que erradamente.

Acreditamos que a dificuldade em compreender o conceito de proporcionalidade direta é decorrente da pouca ou nenhuma experiência com problemas deste tipo, vez que não raramente estão presentes nos livros didáticos - como é o caso do livro didático que foi utilizado pelos alunos que confeccionaram os cartazes. Também, por conta das fontes de pesquisa deste conteúdo, por parte dos professores - normalmente restrita ao universo dos livros didáticos e consultas a vídeos na internet, que pouca ênfase fazem em relação à apropriação e o entendimento do conceito e no que diz respeito aos seus diferentes significados, preferindo exemplos de cálculos e a aceitação prévia da existência, tácita ou não, da proporcionalidade. Também é preciso considerar que todas as considerações feitas aqui vão ao encontro do que Fischbein (1994, p. 232) afirma, ao lembrar-nos que

> [...] o conhecimento acerca dos componentes formais não garante o necessário para o enfrentamento de quaisquer problemas, pois o domínio de técnicas e procedimentos isento do conhecimento de argumentos que

> justificam a utilização dessas técnicas pode não ser suficiente para a resolução de problemas que fogem ao padrão (Fischbein, 1994, p.232).

As considerações que foram feitas neste artigo, pelo autor, a começar pelas motivações que o levaram a escrever este artigo, coadunam-se com tudo o que Fischbein (1994, p.232) sintetiza em sua afirmação acima. Tanto no tocante ao aspecto algorítmico: “[...] cuja apropriação não dispensa uma formação meticulosa requerida para o seu desenvolvimento”, quanto ao aspecto formal: “[...] que devem ser aprendidos, organizados e aplicados pelos alunos com o propósito de justificar e provar que as técnicas funcionam”. É um alerta para todos nós, professores, que por vezes insistimos em ensinar procedimentos e técnicas operatórias em demasia, e cujas justificativas passam ao largo, quanto em relação à pouca ênfase que o ensino da Matemática na Educação Básica tem dispensado ao aspecto formal.

Considerações finais

É fato que a maneira como um professor concebe a aprendizagem; a interpretação que faz acerca da importância do ensino e os consequentes desdobramentos do aprendizado, bem como em relação às diversas maneiras que podem ser mobilizadas para fazer a abordagem de determinado conteúdo com os seus alunos, inclui uma variedade de situações de aprendizagem como a proposição de problemas e de jogos, por exemplo. O autor entende que qualquer que tenha sido a motivação do professor que propôs o trabalho cujos dados foram aqui analisados, esta situação acende uma luz de cor amarela, seja no tocante à definição do(s) objetivo(s) que norteou(aram) a proposta indicada aos alunos, para que resolvessem os problemas decorrentes das informações colhidas por eles próprios, no comércio ou que os enunciados dos problemas possivelmente não tenham sido elaborados pelo professor, mas pelos alunos. A situação discutida implica na necessidade de refletirmos e repensarmos acerca das finalidades que norteiam as ações próprias relacionadas a uma avaliação caso este autor esteja certo ao admitir que o trabalho teria sido proposto com o propósito de ser avaliado, ou que ele teria sido proposto com o objetivo de familiarizar os alunos com coleta de dados e posterior análises. Qualquer que tenha sido a motivação para propor a atividade, é fato que nos cartazes não havia "atribuição de nota"; não havia um "visto do professor"; não havia um elogio, tipo "parabéns", "muito bom" e tampouco uma rubrica do professor que indicasse ter ele feito, ao menos, uma breve "passada de olhos" nos trabalhos. Assim, é possível que se considere os questionamentos: Avaliar para quê? Avaliar por quê? Como se avalia? Sobre o que se avalia? Avaliar não inclui corrigir, se necessário?

Sendo assim, consideramos que os resultados oriundos de uma avaliação - expressos pelo instrumento de avaliação utilizado: prova, trabalho, atividade, jogo, etc. - constituem indícios de recolha, correção e análises das competências que foram mobilizadas pelos alunos para comunicar os resultados obtidos. Portanto, entendemos que todas as competências precisam/devem ser consideradas por quem propõe uma avaliação. Mas, não com o propósito de necessariamente ter de avaliar para atribuir uma nota, grau ou pontuação.

Por essas razões entendemos que a ação de quem avalia constitui um exercício seu em relação aos indícios(sinais) que vêm do avaliado, a partir dos quais constitui-se tarefa precípua à formação docente manifestar juízo de valor àquilo que lhe é apresentado (entregue) por seus alunos, ou por seus pares. Se quem está avaliando é um professor em serviço e o material entregue refere-se ao trabalho docente que realiza cabe refletir acerca da necessidade ou não de reorganizar sua prática pedagógica, não sem antes corrigir a tarefa que propôs aos alunos, esforçando-se para compreender as dificuldades que eles tiveram/têm para encaminhar as resoluções.

Além do mais, entendemos que cabe ao professor ter clareza acerca do que pretendia/pretende obter quando da proposição de uma atividade/tarefa, e como pensou/pensa acerca do que faria/fará com os resultados colhidos (o desempenho dos alunos) no tocante ao uso que destinará a eles por conta dos indícios que neles estejam presentes.

Sendo assim, é preciso considerar que as análises dos erros cometidos pelos alunos podem fornecer pistas interessantes e eficazes em relação à prática pedagógica que o professor está ofertando a seus alunos, e como estes a têm vivenciado e dela se aproveitado para se apropriarem dos conceitos e dos procedimentos que têm sido desenvolvidos por ele. É sabido que durante os momentos de aprendizagem o erro é inevitável ocorrer. E ocorre, não porque o professor assim o queira ou o aluno o faça de propósito. Talvez ocorra por conta da quantidade de alunos em sala de aula; as dificuldades de os alunos estarem concentrados enquanto o professor encaminha a aprendizagem, e das tarefas as quais os alunos estão sujeitos realizar todos os dias, em um ano letivo. Portanto, os erros ocorrem muitas vezes, e de variadas formas, independentemente do trabalho do professor.

Mas, é claro que a identificação de um erro cometido por um aluno pode significar um caminho promissor na busca do acerto uma vez que quando ele pensa de muitas maneiras, e realiza suas intenções por meio de tentativas para obter a solução - algumas à sua maneira de raciocinar, por meio de uma lógica de raciocínio pessoal, acerca daquilo que está fazendo - e não obtém a resposta correta, ele está descartando o que não se adequa à correta resolução. O erro ocorre, porque ele ainda não sabe/encontrou um caminho que o leve a acertar. E, desta forma, cabe ao professor incentivá-lo a prosseguir na busca do caminho que o leve ao acerto.

Por outro lado, quando o professor se esforça em procurar identificar como o erro foi cometido pelo aluno, por meio de cuidadosa observação sobre a resolução apresentada, e num processo dialógico procura compreender como o aluno pensa, ele obtém pistas acerca da não compreensão disto ou daquilo pelo aluno e se capacita para interferir no processo com o propósito de ajudá-lo a superar a(s) dificuldade(s). E quando o professor identifica a causa do erro que o seu aluno cometeu ele pode planejar a adequada intervenção que vise auxiliá-lo quanto à constatação e a identificação acerca do erro cometido, e o caminho que ele teria percorrido para chegar àquela situação. Por outro lado, se o professor tratar todos os erros cometidos pelos alunos em igualdade de condições e à mesma maneira - ao assinalar o erro de cada aluno, e voltar a explicar como seria uma possível resolução que o levaria à resposta correta, de uma única maneira -, tal ação poderá ser útil para alguns alunos que encaminharam as suas resoluções tal qual a resolução que o professor está apresentando (esclarecimento acerca de alguma particular e específica dúvida). Mas é bem provável que tal resolução única não tenha alcance para todos os alunos mormente para esclarecer particulares erros cometidos por algum deles - e sobre os quais ainda irão perdurar dúvidas quanto à não compreensão acerca do que os levou ao erro e em relação ao que fazer para reverter a situação em que se encontram. Por conta disso, cabe a seguinte pergunta para reflexão: Por que os alunos que cometeram erro teriam de fazer tal qual a resolução apresentada pelo professor como correção (gabarito) (no quadro branco, ou por meio de gabarito afixado no quadro de avisos da sala de aula) considerando-o como o encaminhamento correto da resolução? Pois apenas isso é o que resta ao aluno, caso seu professor assim proceda. A resolução "é assim".

Por conta de todas as considerações relatadas reforçamos a ideia que motivou o autor a escrever este trabalho, qual seja: atividades propostas aos alunos, sejam de quais tipos, devem ser acompanhadas de avaliação direta ou indireta de modo que seja possível identificar algum erro cometido. Também se prestam ao propósito de oportunizar ampliação conceitual acerca da temática e/ou para avaliar a prática pedagógica que está sendo ofertada pelo professor a todos a quem está sendo considerado, por ele, como um participante da proposta e que, portanto, precisa também ser avaliado. Ao se propor a analisar os resultados das questões abordadas nos cartazes, o autor teve o propósito, como já foi dito, de tão somente contribuir para a melhoria do ensino da Matemática na Escola Básica. O trabalho oportuniza que os professores reflitam a respeito da importância de propor atividades. Sim, tantas atividades quanto o professor considere serem pertinentes e adequadas, mas não pode, igualmente, esquecer-se da tarefa de avaliar os resultados com os seus alunos, sob pena de ser considerado negligente. Ensinar e corrigir tarefas são próprias do ofício de educar!

Concluímos as considerações salientando a necessidade de um trabalho docente que privilegie a apropriação dos conceitos e significados de proporcionalidade: direta e inversa, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental (devendo ocorrer em um crescente, e em consonância com os diferentes significados matemáticos específicos do conteúdo escolar), como consequência da construção, apropriação e o exercício do raciocínio proporcional, tal como apontado na Base Nacional Curricular Comum - BNCC. Tal terá reflexos em outras relações significativas concernentes ao desenvolvimento cognitivo do aluno em Matemática e em outras áreas da aprendizagem escolar básica, como no ensino da Física, no Ensino Médio, quando do estudo da Lei da Gravitação Universal (de Newton) e da Lei de Hooke.

Referências

Fischbein, Efrain. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In: Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Franco, Maria Amélia Santoro (2005). Pedagogia da Pesquisa-ação. Revista Educação e Pesquisa. V.31.n.3. set/dez. 483-502. São Paulo. SP.

Disponível em <http:// www.sciwlo.br/pdf/ep/v31/n3/a11v31n3.pdf>. Acesso em 19 dez. 2019.

Freire, Paulo (1996). Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. Coleção Leitura. São Paulo: Paz e Terra.

Hargreaves, Andy (1998) Os professores em tempos de mudança: o trabalho e a cultura dos professores na Idade Pós-Moderna. Lisboa: Editora Mc Graw-Hill.

Lima, Elon Lages (1991) *Grandezas Proporcionais*. In: Meu Professor de Matemática e outras histórias. Rio de Janeiro. RJ: IMPA Instituto de Matemática Pura e Aplicada. VITAE Apoio à cultura, Educação e Promoção Social.

Teixeira, Paulo Jorge Magalhães (2012) *Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de problemas de contagem no Ensino Fundamental*. (Tese) Doutorado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo.

Shulman, Lee S. (1986). *Those who understand: knowledge growth in teaching*. Educational Researcher. v.15, n.2, p.4-14.

Tall, David; Vinner, Shlomo. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

e-ISSN: 2595-0967

Skovsmose, Ole (2000). *Cenários para investigação*. Boletim de Educação Matemática. Rio Claro: UNESP.

Cobb, Paul; Confrey, Jere; diSessa, Andrea; Lehrer, Richard; Schauble, Leona (2003). Design Experiments in Educational Research. American Educational Research Association. vol. 32. No. 1. pp. 9-13. jan/fev.

Fishbein, Efrain. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: Reidel.

Contribuições do Autor

Conceitualização; curadoria de dados; análise formal; investigação; metodologia; administração do projeto; supervisão; visualização; redação – rascunho original; redação – revisão e edição.