

APLICAÇÃO DO MODELO STARIMA PARA DADOS DE TEMPERATURAS MÍNIMAS MENSAIS

BIZ, Guilherme - gbiz@uel.br
Universidade Estadual de Londrina / UEL

MIQUELLUTI, Daniel Lima - danielmiq@usp.br
Universidade de São Paulo / USP

OLIVEIRA, Eli Carlos de - elioliveira.agro@gmail.com

OZAKI, Vitor Augusto - vitorozaki@usp.br
Universidade de São Paulo / USP

Submetido em: 04/03/2020

Aceito para publicação em: 02/09/2020

Publicado em: 21/09/2020

DOI: <http://dx.doi.org/10.5380/abclima.v27i0.72107>

RESUMO: Dentre as variáveis climáticas, a temperatura é uma das que mais afetam o desenvolvimento e produtividade final de culturas agrícolas. Deste modo, o presente trabalho utiliza a classe de modelos autorregressivos integrados e de médias móveis espaço-temporais (STARIMA) para um conjunto de dados de temperaturas mínimas diárias coletadas na mesorregião Oeste do estado do Paraná, um dos maiores produtores de grãos do país. Por meio do erro percentual médio absoluto mostrou-se que o modelo STARIMA foi superior a modelos ARIMA univariados. Adicionalmente verificou-se que o método do inverso da distância euclidiana foi superior na determinação da dependência, sendo que a matriz de variâncias e covariâncias dos resíduos, G , não apresentou esfericidade.

PALAVRAS-CHAVE: Séries Temporais; Espaço-temporal; Pesos espaciais; Temperatura; Previsão

IMPACTS OF CHANGES IN LAND USE AND COVERAGE ON THE VARIABILITY OF ALBEDO IN THE SOROCABUÇU RIVER BASIN (IBIÚNA - SP)

ABSTRACT: Among climatic variables, temperature is one that most affect the development of crops. Therefore, the present work uses the class of space-time autoregressive integrated moving average models (STARIMA) for a set of minimum temperature data that from the western region of the state of Paraná, one of the largest grain producers in the country. Through the mean absolute percentage error, it is shown that the STARIMA model was superior to the univariate ARIMA models. Additionally, it was found that the inverse of Euclidean distance method was superior in determining spatial dependency, and the matrix of variations and covariance of the residues, G , did not show sphericity.

KEYWORDS: Time-series; Space-time; Spatial weights; Temperature data; Forecasting.

IMPACTOS DE LOS CAMBIOS EN EL USO Y EN LA COBERTURA DE LA TIERRA SOBRE LA VARIABILIDAD DEL ALBEDO EN LA CUENCA HIDROGRÁFICA DEL RIO SOROCABUÇU (IBIÚNA - SP)

RESUMEN: Entre las variables climáticas, la temperatura es la que más afecta el desarrollo de los cultivos. Por lo tanto, el presente trabajo utiliza la clase de modelos de media móvil integrada autorregresiva espacio-temporal (STARIMA) para un conjunto de datos de temperatura mínima que proviene de la región occidental del estado de Paraná, uno de los mayores productores de granos del país. A través del error porcentual absoluto medio, se muestra que el modelo STARIMA fue superior a los modelos

univariados ARIMA. Además, se descubrió que el método inverso de distancia euclidiana era superior para determinar la dependencia espacial, y la matriz de variaciones y covarianza de los residuos, G , no mostraba esfericidad

PALABRAS CLAVE: Series de tiempo; Espacio-tiempo; Pesos espaciales; Temperatura; Previsión

INTRODUÇÃO

A modelagem de dados climatológicos se tornou frequente, visto que o clima intervém nas características biogeográficas, fenômenos geomorfológicos, hidrológicos, e resulta em uma influência sobre a economia mundial (AHRENS, 2015).

Segundo Chechie e Bayer (2012), a análise de séries temporais aplicada a dados climatológicos atrai interesse especial, haja vista a interferência direta do clima em muitas áreas, determinando o sucesso ou fracasso de vários empreendimentos.

Cargnelutti, Maluf e Matzenauer (2008) apontam que o estudo de variáveis climáticas traz informações essenciais para o zoneamento de culturas agrícolas, indicação de épocas de semeadura, irrigação, determinação de potencial de produtividade, zoneamento de risco climático, crédito e seguro agrícola.

A temperatura é, dentre os elementos climáticos, uma das que promove maiores efeitos diretos e significativos sobre muitos processos fisiológicos que ocorrem em plantas e animais (Medeiros et al 2005).

A classe de modelos espaço-temporais autorregressivos e de médias móveis (STARMA) têm mostrado maior utilidade para explicar a incerteza em sistemas que apresentam uma complexa variabilidade nas escalas temporal e espacial. O processo com representação STARMA é uma extensão multivariada dos modelos ARMA para séries temporais univariadas, sendo que, além de modelar a evolução de uma série simples através do tempo, considera-se a evolução temporal das séries em um contexto espacial.

Chechie e Bayer (2012) indicaram a análise de séries temporais para dados de temperaturas, já que esses processos apresentam dependência entre as observações, e a metodologia de análise exposta capta esta correlação. Porém, a temperatura também sofre influências de regiões vizinhas, e a classe de modelos STARMA também leva em conta esta dependência espacial, trazendo-lhes melhores resultados de previsões, como mostraram Rao e Antunes (2004).

O modelo espaço-temporal autorregressivo e de médias móveis foi formulado nos anos 70 nos artigos de Cliff et al. (1975), Cliff e Ord (1975) e Martin e Oeppen (1975), mas, foi no início dos anos 80, com uma série de artigos de Phillip E. Pfeifer e Stuart Jay Deutsch, que houve um aprimoramento de novos métodos para melhor ajustar o modelo, por exemplo, Pfeifer e Deutsch (1980a, 1980b, 1980c, 1980d, 1981a, 1981b), Deutsch e Pfeifer (1981).

Durante anos houve uma ausência de referências desse modelo, e uma aplicação com dados climatológicos foi realizada com Rao e Antunes (2004). Os respectivos autores utilizaram a classe de modelo STARMA para modelar a temperatura média mensal no Reino Unido, comparando-se com os modelos ARMA univariados, que levaram à conclusão de que o modelo STARMA

apresentou melhores resultados. Nesse artigo, os autores modificaram o método para determinar as matrizes de pesos espaciais, apresentado por Pfeifer e Deutsch (1980a), pois utilizaram o inverso da distância euclidiana, resultando em apenas uma matriz com os pesos espaciais.

Como forma de melhorar e expandir os processos passíveis desta modelagem, Giancinto (2006) apresentou os modelos STARMAG, autorregressivo e de médias móveis generalizado espaço-temporal, que podem ser ajustados à dados que apresentam heterogeneidade. Borovkova, Lopuhaä e Puchjana (2008) aprimoraram o modelo apresentado por Giancinto (2006) e o denominaram GSTAR.

Houve inúmeros trabalhos com aprimoramentos e aplicações do modelo STARMA ao decorrer dos anos, dentre eles destacam-se Kamarianakis e Prastacos (2005), Lin et al. (2009) e Ding et al. (2011), porém a aplicação para dados climatológicos só foi apresentada por Rao e Antunes (2004), Monroy (2013) e Martins, Biz e Ozaki (2014). No trabalho de Monroy (2013), foi utilizado o modelo espaço-temporal autorregressivo e de médias móveis com estrutura de longa dependência (modelo STARFIMA) e aplicado em dados de concentração diária de SO_2 e PM_{10} da região da Grande Vitória.

Diante do exposto, percebe-se a relevância do estudo de modelos estatísticos de previsão no setor agrícola, sendo assim, o objetivo deste trabalho é comparar o desempenho do método STARIMA em relação ao modelo ARIMA univariado, bem como avaliar os métodos da contiguidade espacial e potência negativa na determinação dos pesos do modelo STARIMA. A modelagem é aplicada às médias mensais de temperatura mínima diária numa mesorregião no Oeste do Estado do Paraná.

MATERIAL E MÉTODOS

O método proposto pelos artigos de Pfeifer e Deutsch (1980) para determinar o melhor modelo espaço-temporal segue a forma do método de Box e Jenkins (1970). Esse método é separado em três etapas, sendo que na primeira etapa, identificação, deve-se determinar qual a ordem espacial e temporal (p, q, λ, m) , recomendando-se qual forma dos modelos (STAR, STMA e STARMA) é mais apropriada. Para estabelecer os valores de (p, q, λ, m) , são utilizados a função de autocorrelação espaço-temporal (STACF) e a função de autocorrelação parcial espaço-temporal (STPACF).

Definição E Identificação

O modelo STARIMA sazonal de ordem $(p_\lambda, d, q_m) \times (P_\Lambda, D, Q_M)_S$ expressa $z(t)$, um vetor $N \times 1$ de observações até o tempo t , como uma combinação linear ponderada das observações passadas e erros, ambos defasados no espaço e tempo:

$$\Phi_{P,\Lambda}(B^S)\phi_{p,\lambda}(B)\nabla_S^D\nabla^d\mathbf{z}(t) = \theta_{Q,M}(B^S)\theta_{q,m}(B)\boldsymbol{\epsilon}(t), \quad (1)$$

em que,

$$\phi_{p,\lambda}(B) = \mathbf{I} - \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda} \phi_{kl} \mathbf{W}_l B^k,$$

$$\nabla^d = (I - B)^d,$$

$$\theta_{q,m}(B) = I - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} \mathbf{W}_l B^k,$$

$$\Phi_{p,\lambda}(B^S) = I - \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \Phi_{kl} \mathbf{W}_l B^{kS},$$

$$\nabla_S^D = (I - B^S)^D \text{ e}$$

$$\theta_{Q,M}(B^S) = I - \sum_{k=1}^Q \sum_{l=0}^{M_k} \theta_{kl} \mathbf{W}_l B^{kS}.$$

Para simplificar a apresentação do modelo, deixando-o de forma mais usual, e retirando as partes integrada e sazonal, o modelo STARMA($p_{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p}, q_{m_0, m_1, \dots, m_q}$) é definido como:

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{z}(t-k) - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} \mathbf{W}^{(l)} \epsilon(t-k) + \epsilon(t) \quad (2)$$

em que $z(t)$ são observações de uma única variável aleatória $Z_i(t)$ que estão disponíveis em N locais fixos no espaço ($i = 1, 2, \dots, N$), sobre T períodos ($t = 1, 2, \dots, T$), p é a ordem autorregressiva, q é a ordem de médias móveis, λ_k é a ordem espacial do k -ésimo termo autorregressivo, m_k é a ordem espacial do k -ésimo termo de médias móveis, ϕ_{kl} é o parâmetro autorregressivo na defasagem temporal k e defasagem espacial l , θ_{kl} é o parâmetros de médias móveis na defasagem temporal k e defasagem espacial l e o $\epsilon(t)$ são os erros aleatórios que seguem uma distribuição normal multivariada com $E[\epsilon(t)] = \mathbf{0}$ e

$$E[\epsilon(t)\epsilon(t+s)'] = \begin{cases} \mathbf{G} = \sigma^2 \mathbf{I}_N, & \text{se } s = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

É importante ressaltar que a classe de modelos STARMA representa processos estacionários, ou seja, a média e a estrutura de covariâncias de $z(t)$ não mudam com o tempo. Para que o processo seja estacionário, é necessário que todos possíveis valores de x_μ que satisfaçam a equação:

$$\det \left[x_\mu^p I - \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} \mathbf{W}^{(l)} x_\mu^{p-k} \right] = 0$$

estejam dentro do círculo unitário ($|x_\mu| < 1$), ou seja, determinará uma região de possíveis valores de ϕ_{kl} que irá resultar em um processo estacionário.

Para que o $z(t)$ seja expresso com combinação linear ponderada de observações passadas, com pesos que convergem para zero, é necessário que todos possíveis valores de x_μ que satisfaçam a equação:

$$\det \left[x_\mu^q I - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} \mathbf{W}^{(l)} x_\mu^{q-k} \right] = 0$$

estejam dentro do círculo unitário ($|x_\mu| < 1$), então o modelo é dito invertível. Todos os modelos STAR são invertíveis e todos os modelos STMA são

estacionários.

Antes de iniciar as etapas iterativas para o ajuste do modelo, deve-se determinar a forma da matriz de dependência espacial. A matriz é fixa durante o processo de modelagem, porém, há diferentes métodos para o cálculo. É apresentado no trabalho de Biz (2014) que a matriz de pesos influencia na qualidade do ajuste e é necessário utilizar o método que melhor represente a dependência espacial da região em estudo.

Neste trabalho são utilizados dois métodos para quantificar a matriz de pesos espaciais, apresentados por Smith (2013): contiguidade espacial e potência negativa das distâncias euclidianas.

Pelo método de contiguidade espacial, as ponderações são calculadas por:

$$w_{ij}^{(l)} = \begin{cases} \frac{1}{n_i^{(l)}}, & \text{para vizinhos } i \text{ e } j \text{ de } l\text{-ésima ordem} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases} \quad (3)$$

em que, $n_i^{(l)}$ é o número de vizinhos da l -ésima ordem do local i e este cálculo resulta em matrizes, em que, cada linha soma 1.

Para determinar os pesos espaciais, é utilizada a função de potência negativa das distâncias, dada por:

$$w_{ij}^{(1)} = \begin{cases} d_{ij}^{-\alpha}, & \text{para } i \neq j \\ 0, & \text{para } i = j' \end{cases} \quad (4)$$

e os elementos são dimensionados de tal modo que $\sum_{i=1}^N w_{ij}^{(1)} = 1$. Dessa forma, a máxima ordem espacial é um, em que $W^{(0)} = I_N$ e $W^{(1)}$ é determinado por (4). O valor de α é positivo e deve-se notar que quanto maior o valor de α , menor a dependência espacial, e quanto menor o valor de α , maior a dependência espacial.

Para determinar um modelo STARMA que melhor explique um conjunto de dados, devem-se seguir as três fases iterativas: identificação, estimação e diagnóstico, apresentadas por Deutsch e Pfeifer (1980a).

Para o processo de modelagem, deve-se ter auxílio de alguns recursos computacionais e, neste trabalho, é utilizado o programa R Core Team (2015). Na etapa de identificação do modelo, foi implementada a função de autocorrelação espaço-temporal (STACF) e a função de autocorrelação parcial espaço-temporal (STPACF). Na etapa de estimação, são ajustados diferentes modelos, e as estimativas dos parâmetros, de cada modelo, são estimadas pela função "optim", presente no programa R Core Team, que é um método iterativo de otimização.

Para o diagnóstico, são calculados os intervalos de confiança para a STACF, os testes de hipóteses para os parâmetros e o teste quanto à esfericidade de G .

Por fim, para a seleção de modelos, foi implementado o critério de informação bayesiano (SCHWARZ, 1978) e, com isso, concluiu-se qual matriz de pesos apresentou melhores resultados. Com o modelo ajustado, são implementados os cálculos de previsões de origem t e horizonte h . A análise de performance preditiva e comparação com o modelo ARIMA tradicional se deu

pelo erro percentual médio absoluto (MAPE).

O método de identificação envolve resumir e categorizar os dados para fornecer informações, e assim determinar uma classe de modelos que melhor corresponda ao processo observado, utilizando a função de autocorrelação espaço-temporal (FACST) e a função de autocorrelação parcial espaço-temporal (FACPST).

A definição de autocorrelação espaço-temporal é diferente da autocorrelação de séries temporais univariadas. Para a autocorrelação espaço-temporal existem várias combinações que podem ser usadas para o cálculo. (MARTIN & OEPPEN, 1975). Uma definição para a autocorrelação entre vizinhos da l -ésima e k -ésima ordem e s defasagens no tempo é

$$\rho_{lk}(s) = \frac{\gamma_{lk}(s)}{[\gamma_{ll}(0)\gamma_{kk}(0)]^{\frac{1}{2}}} \quad (5)$$

Fixando os vizinhos de k -ésima ordem ($k = 0$), obtendo a função de autocorrelação, variando os vizinhos de l -ésima ordem e escrevendo na forma matricial, tem-se:

$$\hat{\rho}_{l0}(s) = \frac{T}{(T-s)} \frac{\sum_{t=1}^{T-s} [\mathbf{W}_l \mathbf{z}(t)]' \mathbf{z}(t+s)}{(\sum_{t=1}^T [\mathbf{W}_l \mathbf{z}(t)]' [\mathbf{W}_l \mathbf{z}(t)] \sum_{t=1}^T \mathbf{z}'(t) \mathbf{z}(t))^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

Se $\mathbf{G} \neq \sigma^2 \mathbf{I}_N$, ou seja, os erros não satisfizerem a condição de esfericidade, as estimativas amostrais dos coeficientes de autocorrelação espaço-temporal são calculadas por:

$$\hat{\rho}_{l0}(s) = \frac{T}{(T-s)} \frac{\sum_{t=1}^{T-s} [\mathbf{W}_l \mathbf{z}(t)]' \hat{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{z}(t+s)}{\left(\sum_{t=1}^T [\mathbf{W}_l \mathbf{z}(t)]' \hat{\mathbf{G}}^{-1} [\mathbf{W}_l \mathbf{z}(t)] \sum_{t=1}^T \mathbf{z}'(t) \hat{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{z}(t) \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (7)$$

em que $\hat{\mathbf{G}} = \frac{\sum_{t=1}^T \boldsymbol{\epsilon}(t) \boldsymbol{\epsilon}'(t)}{T}$.

Por meio da função de autocorrelação amostral estimada, deve-se determinar um modelo candidato, porém não é fácil determinar qual ordem este modelo deve seguir. Para resolver este problema, utiliza-se a função de autocorrelação parcial espaço-temporal. O sistema para o cálculo da STPACF é análogo às equações de Yule-Walker para séries temporais univariadas. Multiplica-se ambos os lados do modelo geral $STAR(k, \lambda, \dots)$ por $[\mathbf{W}^{(h)} \mathbf{z}(t-s)]'$,

$$\mathbf{z}(t-s)' \mathbf{W}^{(h)} \mathbf{z}(t) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{\lambda} \phi_{jl} \mathbf{z}(t-s)' \mathbf{W}^{(h)} \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{z}(t-j) + \mathbf{z}(t-s)' \mathbf{W}^{(h)} \boldsymbol{\epsilon}(t).$$

Aplica-se a esperança e divide-se por N ambos os lados, tem-se que

$$\gamma_{h0}(s) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{\lambda} \phi_{jl} \gamma_{hl} \mathbf{z}(s-j), \quad (8)$$

pois $E[\mathbf{z}(t-s)' \boldsymbol{\epsilon}(t)] = 0$, para $s > 0$. Logo, para $s = 1, 2, \dots, k$ e $h = 0, 1, 2, \dots, \lambda$ obtém-se o sistema apresentado na Figura 1.

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l} s=1 \\ \vdots \\ s=2 \\ \vdots \\ s=k \end{array} \right\} \begin{array}{l} \gamma_{00}^{(1)} \\ \gamma_{10}^{(1)} \\ \vdots \\ \gamma_{\lambda 0}^{(1)} \\ \gamma_{00}^{(2)} \\ \gamma_{10}^{(2)} \\ \vdots \\ \gamma_{\lambda 0}^{(2)} \\ \vdots \\ \gamma_{00}^{(k)} \\ \gamma_{10}^{(k)} \\ \vdots \\ \gamma_{\lambda 0}^{(k)} \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \begin{array}{l} \gamma_{00}^{(0)} \quad \gamma_{01}^{(0)} \quad \dots \quad \gamma_{0\lambda}^{(0)} \\ \gamma_{10}^{(0)} \quad \gamma_{11}^{(0)} \quad \dots \quad \gamma_{1\lambda}^{(0)} \\ \vdots \\ \gamma_{\lambda 0}^{(0)} \quad \gamma_{\lambda 1}^{(0)} \quad \dots \quad \gamma_{\lambda\lambda}^{(0)} \end{array} & \begin{array}{l} \gamma_{00}^{(-1)} \quad \gamma_{01}^{(-1)} \quad \dots \quad \gamma_{0\lambda}^{(-1)} \\ \gamma_{10}^{(-1)} \quad \gamma_{11}^{(-1)} \quad \dots \quad \gamma_{1\lambda}^{(-1)} \\ \vdots \\ \gamma_{\lambda 0}^{(-1)} \quad \gamma_{\lambda 1}^{(-1)} \quad \dots \quad \gamma_{\lambda\lambda}^{(-1)} \end{array} & \dots & (1-k) \\ \hline & (1) & (0) & (2-k) \\ \hline & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline & (k-1) & (k-2) & \dots \quad (0) \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \phi_{10} \\ \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{1\lambda} \\ \phi_{20} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{2\lambda} \\ \vdots \\ \phi_{k0} \\ \phi_{k1} \\ \vdots \\ \phi_{k\lambda} \end{array}
 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{j=1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{j=2} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{j=k}$

Figura 1 - Sistema para o cálculo das STPACF

Cada um dos processos STARMA é caracterizado por distintos STACF e STPACF, análogo a séries temporais univariadas. Nos modelos autorregressivos univariados, a função de autocorrelação decai exponencialmente e a função de autocorrelação parcial corta após o lag p , já os processos STAR($p_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}$) exibem uma função de autocorrelação espaço-temporal que diminuem gradativamente tanto para espaço quanto para o tempo, e a função de autocorrelação parcial espaço-temporal que corta após o lag p no tempo e lag λ_p no espaço. Para modelos de médias móveis univariadas, a função de autocorrelação parcial corta após o lag q e a função de autocorrelação parcial decai exponencialmente ao longo do tempo, já o modelo STMA(q_{m_1, \dots, m_k}) tem uma função de autocorrelação espaço-temporal que corta após o lag temporal q e o lag espacial m_q , e a função de autocorrelação parcial espaço-temporal que decai gradativamente, espacialmente e temporalmente. Para o modelo STARMA, tanto a STACF quanto STPACF apresentam um decaimento gradativo no tempo e no espaço.

Para fins de exibição, são apresentados na Tabela 1 os comportamentos teóricos das STACF e STPACF para os modelos STAR, STMA e STARMA.

Tabela 1 - Características teóricas das STACF e STPACF para os possíveis modelos da classe STARMA

Modelos	FACST	FACPST
STAR	Decai gradativamente	$\phi_{sl} = 0$ para $s > p$, e $l > \lambda_q$
STMA	$\rho_{l_0}(s) = 0$ para $s > q$, e $l > m_q$	Decai gradativamente
STARMA	Decai gradativamente	Decai gradativamente

Com um modelo candidato escolhido na fase de identificação, parte-se para a estimação dos parâmetros do modelo STARMA. Os vetores de parâmetros

a serem estimados são $\Phi = [\phi_{10}, \phi_{11}, \dots, \phi_{1\lambda}, \dots, \phi_{p0}, \phi_{p1}, \dots, \phi_{p\lambda_p}]$ e $\theta = [\theta_{10}, \theta_{11}, \dots, \theta_{1m}, \dots, \theta_{q0}, \theta_{q1}, \dots, \theta_{qm_q}]$, sendo as estimativas obtidas pelo método de máxima verossimilhança.

Por definição os erros $\epsilon' = [\epsilon_1(1), \dots, \epsilon_1(T), \dots, \epsilon_N(1), \dots, \epsilon_N(T)]$ são ruídos branco, isto é, seguem uma distribuição normal multivariada com média zero e matriz de variâncias e covariâncias igual a $\sigma^2 I_{NT}$. Portanto a função densidade de probabilidade conjuntada é escrita como

$$f(\epsilon|\Phi, \theta, \sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{TN}{2}} |\sigma^2 I_{NT}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \epsilon' I \epsilon\right) \\ = (2\pi)^{-\frac{TN}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{TN}{2}} \exp\left\{-\frac{S(\Phi, \theta)}{2\sigma^2}\right\},$$

em que, $S(\Phi, \theta) = \epsilon' I \epsilon = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \epsilon_i^2(t)$.

Encontrar os valores dos parâmetros que maximizam a função de verossimilhança equivale a obter os valores de Φ e θ que minimizam $S(\Phi, \theta)$ e o problema se reduz a estimativas de mínimos quadrados de Φ e θ .

Portanto, os estimadores de máxima verossimilhança condicional de (Φ, θ, σ^2) são os valores $(\hat{\Phi}, \hat{\theta})$ que minimizam $S_*(\hat{\Phi}, \hat{\theta})$ e a estimativa de σ^2 é $\hat{\sigma}^2 = \frac{S_*(\hat{\Phi}, \hat{\theta})}{TN}$.

Esse procedimento é também equivalente a achar os valores $(\hat{\Phi}, \hat{\theta})$ que minimizam $tr(M)$, em que $M = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}(t)\hat{\epsilon}'(t)}{T}$.

Se o pressuposto de esfericidade de G , $G = \sigma^2 I_N$, não for atendido, na parte de diagnóstico e $G \neq \sigma^2 I_N$, deve-se obter os valores dos parâmetros que minimizam $|M|$. Para maiores detalhes, ver Deutsch e Pfeifer (1981).

Todo o processo de estimação se realiza quando considerar conhecida a ordem (p, q, λ_p, m_q) do modelo a ser estimado e ainda assumindo o modelo STARMA ser estacionário e invertível. Para determinar a melhor ordem do modelo, utiliza-se o critério de informação bayesiano, e para modelos multivariados tem a forma $\ln(|\hat{G}|) + m \frac{\ln(T)}{T}$, em que, m é o número de parâmetros e \hat{G} é a estimativa da matriz de covariância residual. Para o modelo STARMA, Rao e Antunes (2004) mostraram que a ideia é escolher as ordens p e q que minimizam $NT \ln(\hat{\sigma}^2) + 2(p+q) \ln(T)$, sendo $\hat{\sigma}^2$ a estimativa da variância residual.

DIAGNÓSTICO

O objetivo da fase de diagnóstico é determinar se os resíduos estão de acordo com os pressupostos do modelo. Se o modelo ajustado for adequado, os resíduos devem ser ruído branco, isto é, devem ser independentes com distribuição normal multivariada com média zero e matriz de variância e covariância igual a $\sigma^2 I$.

Para testar se os resíduos são independentes, basta calcular a função de autocorrelação espaço-temporal amostral e testar se alguns dos valores

estimados são diferentes de zero. Para isto, calcula-se o intervalo de confiança para a STACF e Pfeifer e Deutsch (1981a) indicam utilizar

$$var(\hat{\rho}_{10}(s)) \approx \frac{1}{N(T-s)},$$

em que $\hat{\rho}_{10}(s)$ é a função de autocorrelação espaço-temporal do resíduo do modelo ajustado. Se os resíduos não são independentes, o termo dependente é identificado e o modelo é atualizado. Se o teste sobre a esfericidade de G for significativo e, $G \neq \sigma^2 I_N$, a variância da função de autocorrelação espaço-temporal também é recalculada, e é dada por:

$$var(\hat{\rho}_{10}(s)) \approx \frac{1}{(T-s)} \frac{tr[W'_1 G W_1 G]}{tr[G] tr[W'_1 W_1 G]}.$$

Para saber se $G = \sigma^2 I_N$, os resíduos também devem seguir as pressuposições

$$E[\epsilon(t)\epsilon(t+s)'] = \begin{cases} \sigma^2 I_N & s = 0 \\ 0 & s \neq 0 \end{cases}$$

Este pressuposto deve ser testado e, Pfeifer e Deutsch (1980d) indicam como fazer este teste. Caso não seja cumprido, um modelo diferente deve ser usado, considerando uma forma mais geral da matriz, apresentado por Deutsch e Pfeifer (1981). Se, durante o diagnóstico, G , é considerado apropriado, então o modelo ajustado é considerado apropriado. Se for inapropriado a condição sobre a esfericidade de G , o procedimento de modelagem requer uma re-identificação do modelo candidato STARMA e que sejam seguidos os procedimentos dos três estágios, com $G \neq \sigma^2 I_N$, para o ajuste do modelo.

O procedimento do teste quanto a $G = \sigma^2 I$ foi mostrado por Pfeifer e Deutsch (1980c) e, para realizá-lo, define-se que:

$$M = \frac{\hat{\epsilon}(t)\hat{\epsilon}'(t)}{T}$$

e é testado se $M = G$ é uma matriz diagonal. Define-se também $v = \frac{|M|}{\prod_{i=1}^N M_{ii}}$ e tem-se uma aproximação da estatística $H = -m \ln(v)$ que segue uma distribuição χ^2 com $f = \frac{N(N-1)}{2}$ graus de liberdade, em que, $m = T - \frac{(2N+11)}{6}$. Rejeitando-se a hipótese nula de $G = \sigma^2 I$, o procedimento de ajuste de um modelo STARMA volta para a parte inicial de identificação, agora com $G \neq \sigma^2 I$.

Os vetores de parâmetros estimados devem ser testados se $\Phi = \theta = 0$, e são utilizados os intervalos de confiança de cada parâmetro. Pode-se também testar se um particular ϕ_{kl} ou θ_{kl} é igual a zero e, para isso, deve-se fixar os outros parâmetros sem interesse de teste. Para este, tem-se que $\hat{\delta}$ é a estimativa de mínimos quadrados do vetor de parâmetros completo, e $\hat{\delta}^*$ a estimativa de mínimos quadrados do vetor de parâmetros com δ_k igual a zero. Portanto, a hipótese a ser testada é se $\delta_k = 0$, utilizando-se a estatística

$$\frac{(TN - K)[S_*(\hat{\delta}^*) - S_*(\hat{\delta})]}{S_*(\hat{\delta})} \sim F_{1, TN-K} \quad (9)$$

Caso algum parâmetro estimado seja estatisticamente igual a zero, deve-se removê-lo do modelo, e um modelo mais simples será considerado como um novo modelo candidato, voltando à fase de estimação.

O ciclo iterativo é feito nos três estágios de modelagem, identificação, estimação e diagnóstico, até determinar um modelo que seja aprovado na fase de diagnóstico, isto é, até que os resíduos sejam considerados ruído branco e todos os parâmetros sejam significativos.

PREVISÕES

Até o momento, foi vista a metodologia de construção de um particular modelo sazonal STARIMA(p_λ, d, q_m) \times (P_A, D, Q_M) $_S$, que segue o ciclo iterativo de identificação, estimação e diagnóstico. Porém, há alguns casos em que se deseja utilizar o modelo identificado e estimado para fazer previsões, ou seja, prever valores $z(t+h)$, $h \geq 1$, utilizando-se as observações ..., $z(t-2), z(t-1), z(t)$, até o instante t , que é chamado origem das previsões, conforme apresentado por Morettin e Toloi (2006) para os modelos de séries temporais ARIMA.

Para realizar previsões, serão denotadas as previsões de origem t e horizonte h por $\hat{z}_t(h)$ e assumir que $z(t)$ é estacionário e invertível, logo, deseja-se obter:

$$\hat{z}_t(h) = E[z(t+h)|z(t), z(t-1), \dots].$$

Para um modelo STARMA(p_{λ_p}, q_{m_q}), utilizando-se a Equação (2), as previsões de origem t e horizonte h são dadas por:

$$\hat{z}_t(h) = E \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \hat{\phi}_{kl} \mathbf{W}^{(l)} z(t+h-k) - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \hat{\theta}_{kl} \mathbf{W}^{(l)} \epsilon(t+h-k) + \epsilon(t+h) \right] \quad (11)$$

e deve-se levar em conta que:

$$E[z(t+k)] = \hat{z}_t(k), k > 0,$$

$$E[z(t+k)] = z(t+k), k \leq 0,$$

$$E[\epsilon(t+k)] = 0, k > 0,$$

$$E[\epsilon(t+k)] = \epsilon(t+k), k \leq 0,$$

em que $\epsilon(t+k) = z(t+k) - \hat{z}_t(t+k)$.

DESCRIÇÃO DOS DADOS

O conjunto de dados utilizado neste trabalho foi fornecido pelo grupo GESER - Gestão de Seguros e Riscos, da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz". Esses dados são séries temporais de médias mensais de temperaturas mínimas diárias, coletadas em 17 estações de uma mesorregião localizada no Oeste do Estado do Paraná. Cada estação é composta por 147 médias mensais de temperaturas mínimas diárias, nas quais foram computadas desde fevereiro de 2000 até abril de 2012.

Como as estações estão distribuídas de forma aleatória, os locais das amostras formam uma grade irregular. Nesse caso, no método de contiguidade espacial, fica a cargo do pesquisador como determinar as ordens dos vizinhos, e, então, utiliza-se a Equação (3) para o cálculo da matriz de pesos. Deve-se também utilizar outros métodos para o cálculo da dependência espacial, e, então, optar pelo método que apresentar melhores resultados (BIZ, 2014). Neste trabalho é utilizado também o método da potência negativa da distância, como apresentado na Equação (4), com $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ e $\alpha = 5$. Para utilizar o método da contiguidade espacial, Equação (3), devem-se determinar as ordens de vizinhança para cada estação, como apresentado na Tabela 2.

Tabela 2 - Estações meteorológicas e suas respectivas ordens de vizinhanças

Estações	Ordem espacial		
	1	2	3
1	4 e 9	11 e 12	10
2	3 e 15	-	16 e 17
3	2	15, 16 e 17	-
4	1 e 9	-	10, 11 e 12
5	7	-	6, 8 e 14
6	8	7	5, 10, 13, 16 e 17
7	5	6 e 8	-
8	6	7	5, 10 e 13
9	1 e 4	-	10, 11 e 12
10	-	-	1, 4, 6, 8 e 9
11	12	1	4 e 9
12	11	1	4 e 9
13	-	16 e 17	6 e 8
14	-	-	5
15	2	3	16 e 17
16	17	3 e 13	2, 6, 8 e 15
17	16	3 e 13	2, 6, 8 e 15

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Inicialmente, é apresentada a análise exploratória dos dados, mostrando a área de estudo para determinar a ordem dos vizinhos espaciais. É mostrada na Figura 2, a localização das estações meteorológicas, e observa-se uma grade irregular, que dificulta a determinação da ordem dos vizinhos espaciais.

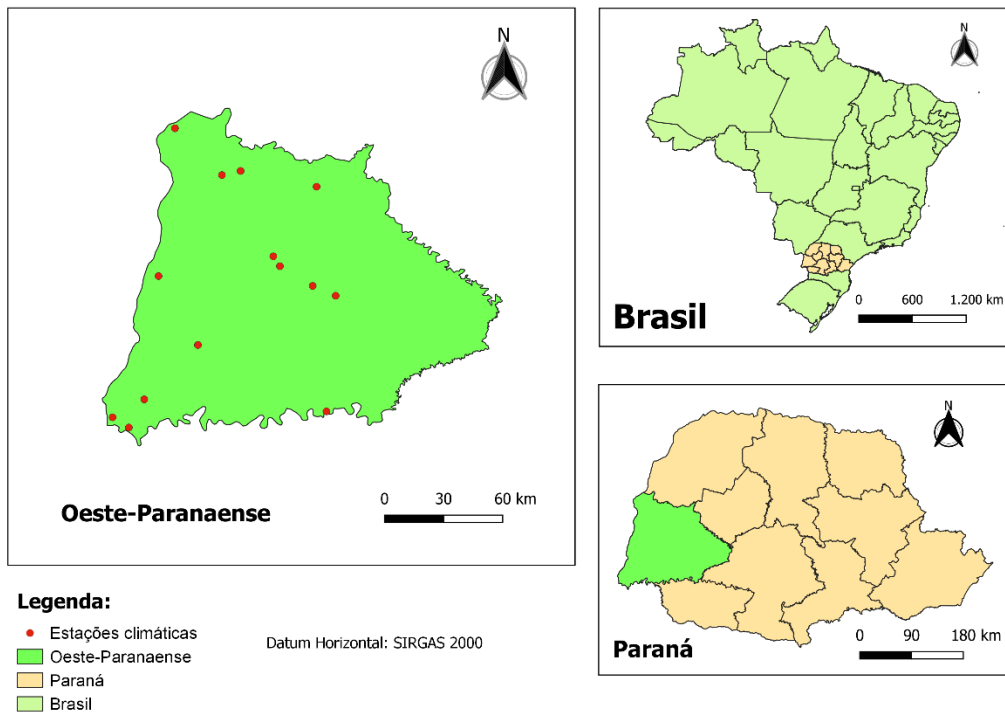


Figura 2 - Localização geográfica das estações meteorológicas na mesorregião Oeste Paranaense

Para o método da potência negativa da distância, deve-se determinar a distância de cada estação, e, então, utilizar a Equação (4) para determinar a matriz de pesos espaciais.

Como o método do inverso da distância representou melhor a dependência espacial, verificada após as análises na etapa de seleção de modelos que utilizou o critério de informação bayesiano (BIC), serão apresentados os resultados apenas deste método.

A característica senoidal apresentada pela função de autocorrelação espaço-temporal (STACF), na Figura 3, comprova que os dados apresentam sazonalidade. Nota-se que os lags sazonais são de ordem 12, e, para eliminar esta sazonalidade, deve-se fazer uma diferença sazonal. Considerando-se $z_i(t)$ como os dados originais em cada local i , as séries com as diferenças sazonais serão determinadas como $x_i(t) = z_i(t) - z_i(t - 12)$. Ao realizar essa diferença, cada local terá uma nova série temporal com 12 observações a menos, totalizando 135 observações.

Ao inspecionar a função de autocorrelação espaço-temporal (STACF) e a função de autocorrelação parcial espaço-temporal (STPACF), apresentadas nas Figuras 4 e 5, das séries com uma diferença sazonal, é visto que um modelo STARIMA sazonal poderá ser apropriado. Pelas STACF, nota-se que os lags 1 e 12 apresentam valores significativos, ou seja, θ_{10} , θ_{11} e θ_{10} . Pela STPACF, nota-se que os lags 1 e 12 apresentam valores significativos, ou seja, ϕ_{10} , ϕ_{11} e Φ_{10} .

Com base nessa visualização, escolhe-se um modelo candidato, ou seja,

$$x(t) = \phi_{10}x(t-1) + \phi_{11}W^{(1)}x(t-1) + \Phi_{10}x(t-12) - \theta_{10}\epsilon(t-1) - \theta_{11}W^{(1)}\epsilon(t-1) - \theta_{10}\epsilon(t-12) + \epsilon(t),$$

o modelo candidato é o STARIMA (1, 0, 1) × (1, 1, 1)₁₂ Sazonal. Nota-se que, mesmo apresentando alguns termos significativos em ambos STACF e STPACF, esses não são adicionados no modelo candidato, pois parte-se de um modelo mais simples, acreditando-se que este possa controlar os outros termos significativos apresentados nas Figuras 4 e 5 que não estão no modelo candidato.

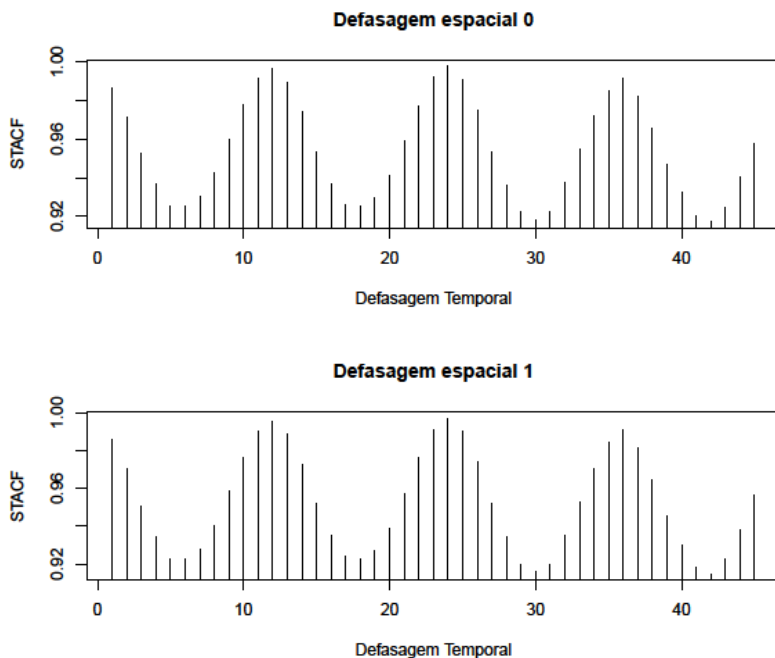


Figura 3 - Função de autocorrelação espaço-temporal para diferentes ordens espaciais

O procedimento para as estimativas dos parâmetros é aplicado quando se assume que os erros ϵ são normalmente distribuídos com média zero e matriz de variâncias e covariâncias igual a σ^2I , obtendo-se as estimativas dos parâmetros do modelo candidato: $\phi_{10} = 0,5770$, $\phi_{11} = -0,4080$, $\theta_{10} = 0,1404$, $\theta_{11} = -0,0818$, $\Phi_{10} = -0,0852$ e $\theta_{10} = 0,7126$.

Ao verificar se os parâmetros são significativos, pelo teste de hipótese descrito em (9), conclui-se que o termo θ_{11} é não significativo, com o valor do teste igual a 1,036 e o valor tabelado igual a $F_{0,95;1;2289} = 3,8455$. Portanto, retira-se o parâmetro θ_{11} do modelo. Tem-se, então, um novo modelo STARIMA(1, 0, 1) × (1, 1, 1)₁₂ sazonal, e as estimativas dos parâmetros são iguais a: $\phi_{10} = 0,5221$, $\phi_{11} = -0,3514$, $\theta_{10} = 0,0599$, $\Phi_{10} = -0,0870$ e $\theta_{10} = 0,7121$.

Pelo critério de informação bayesiano, esse foi o modelo que melhor se ajustou aos dados, com o valor 2153,778. Todos os parâmetros desse modelo são significativos diante dos testes realizados. Para o mesmo modelo, porém utilizando os pesos espaciais determinado pela equação (3), o valor do BIC é 2167,948, o que confirma que utilizar o inverso da distância euclidiana apresenta melhores resultados para este conjunto de dados.

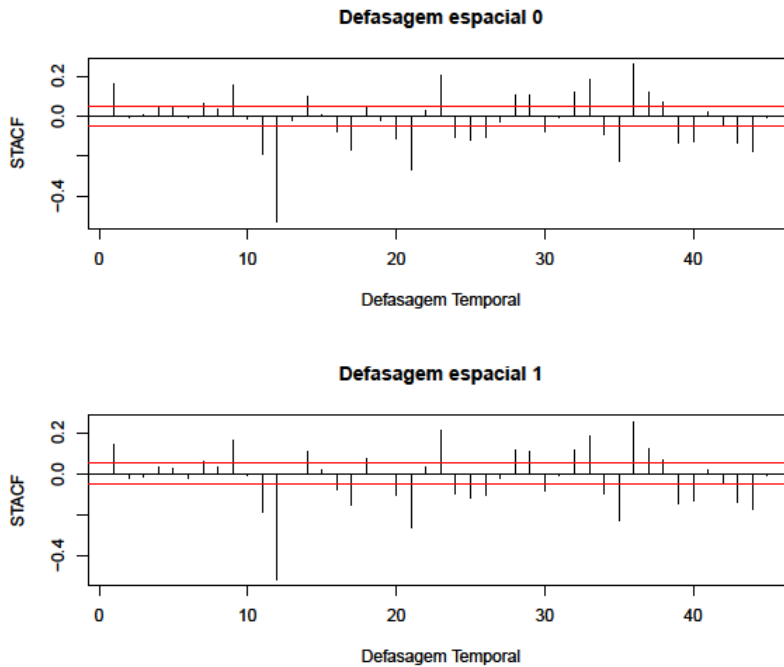


Figura 4 - Função de autocorrelação espaço-temporal para diferentes ordens espaciais das séries com uma diferença sazonal

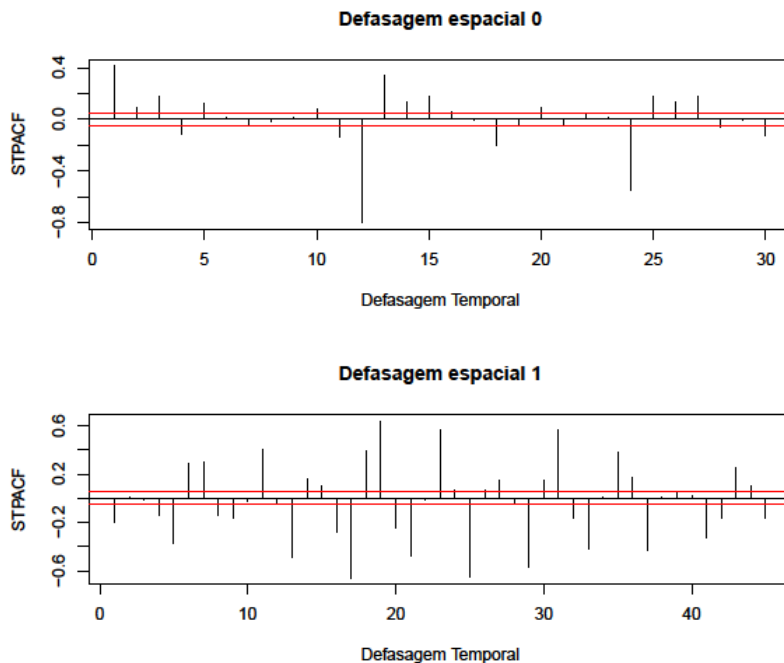


Figura 5 - Função de autocorrelação parcial espaço-temporal para diferentes ordens espaciais das séries com uma diferença sazonal

O teste sobre a esfericidade de G , matriz de variâncias e covariâncias dos resíduos, é realizado e é possível constatar que esta matriz não é diagonal, o

valor do teste é igual a $H=7242,119$ e o valor tabelado é $\chi_{0,95;136}^2 = 164,22$. Com isso, as STACF e STPACF devem ser recalculadas e, conseqüentemente, volta-se à parte inicial de identificar um modelo candidato, seguir as etapas de estimativas dos parâmetros considerando-se $G \neq \sigma^2 I_N$, e, então, os diagnósticos.

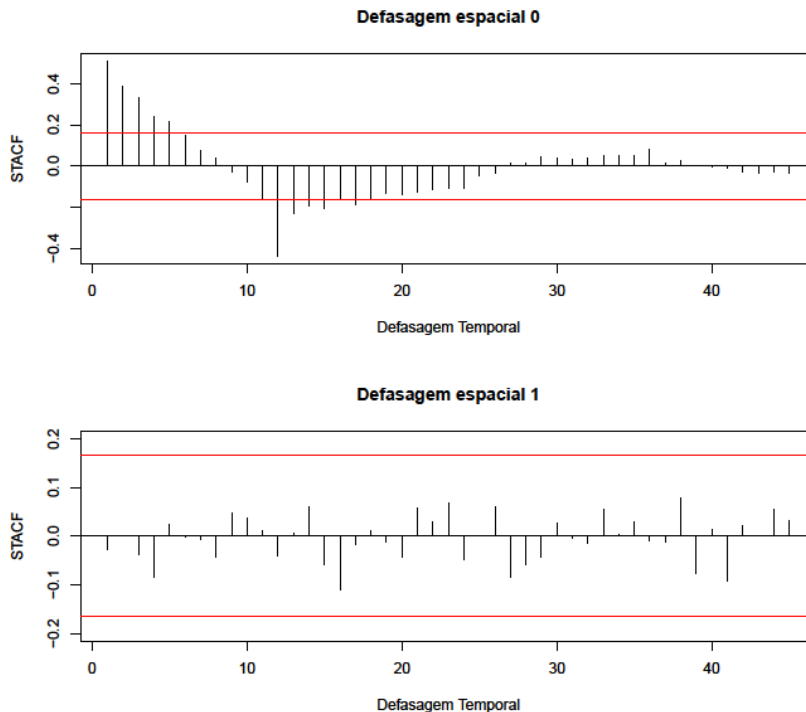


Figura 6 - Função de autocorrelação espaço-temporal para diferentes ordens espaciais das séries com uma diferença sazonal com $G \neq \sigma^2 I$

Na Figura 6, é apresentada a STACF com $G \neq \sigma^2 I_N$ e constata-se que os lags 1 e 12, na defasagem espacial 0, são significativos, ou seja, os termos θ_{10} e θ_{10} .

Na Figura 7, é apresentada a STPACF com $G \neq \sigma^2 I_N$ e constata-se que os lags 1 e 12, na defasagem espacial 0, são significativos e, na defasagem espacial 1, o lag 1 é significativo, ou seja, os termos ϕ_{10} , ϕ_{11} e Φ_{10} . Note que é o mesmo modelo selecionado anteriormente, STARIMA(1,0,1) × (1,1,1)₁₂ sazonal.

Re-estimando os parâmetros do modelo, com **G** não diagonal, as estimativas são:

$$\phi_{10} = 0,6104, \phi_{11} = -0,0306, \theta_{10} = 0,0828, \Phi_{10} = 0,0670 \text{ e } \Theta_{10} = 0,7731. \#(12)$$

A função de autocorrelação STACF dos resíduos, utilizando $G \neq \sigma^2 I$, é apresentada na Figura 8, e indica que, por não estar correlacionado, o pressuposto dos erros é satisfeito. Contudo, após todas as etapas para o ajuste de um modelo espaço-temporal, conclui-se que o melhor modelo ajustado é o STARIMA (1,0,1) × (1,1,1)₁₂ com $G \neq \sigma^2 I$ com as estimativas dos parâmetros apresentado em (12).

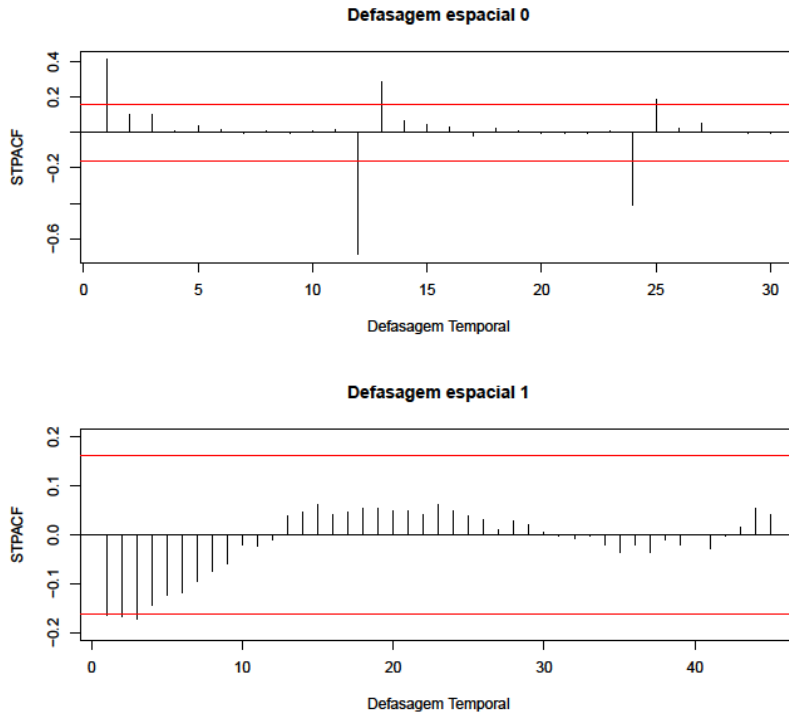


Figura 7 - Função de autocorrelação parcial espaço-temporal para diferentes ordens espaciais das séries com uma diferença sazonal com $G \neq \sigma^2 I$

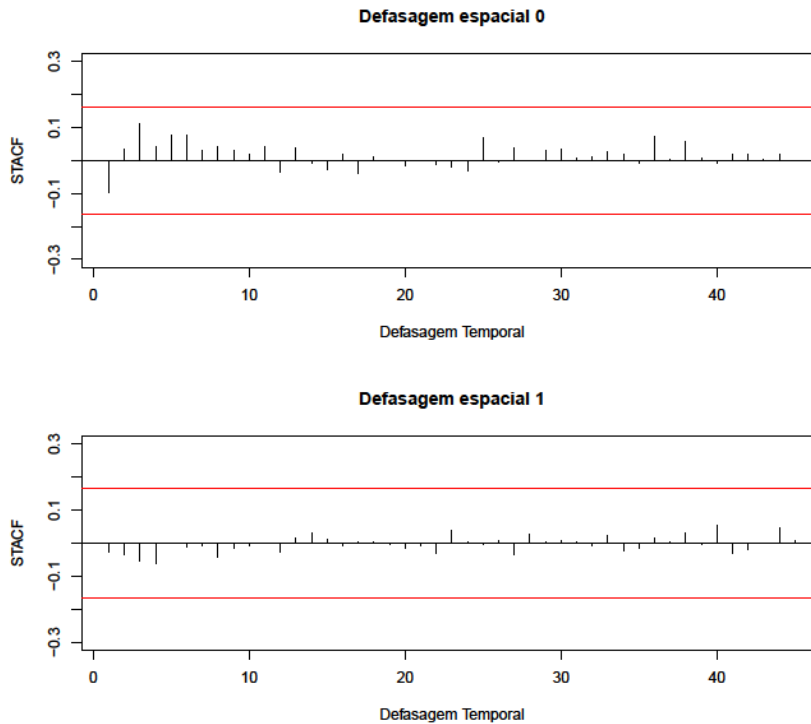


Figura 8 - Função de autocorrelação espaço-temporal dos resíduos para diferentes

ordens espaciais

Os resultados obtidos neste trabalho se assemelham aos encontrados por Rao e Antunes (2004), em que, não há esfericidade de G e os processos apresentam sazonalidade. Cabe lembrar que, no presente trabalho, buscou-se o melhor modelo com o uso do critério de informação bayesiano (BIC), porém, levou-se em consideração a significância dos parâmetros ajustados. Além disso, foram utilizadas diferentes formas para determinar os pesos espaciais, e a que apresentou melhores resultados foi com o uso do inverso da distância euclidiana.

Caso algum termo não seja controlado na fase de diagnóstico, o modelo é atualizado nessa fase de identificação, indicando outro modelo. É importante ressaltar que vários modelos podem adequar-se aos dados, e, pelo critério de informação bayesiano, o pesquisador deve escolher o melhor modelo, não se esquecendo de utilizar o modelo mais parcimonioso.

Após determinar o melhor modelo ajustado, pode-se utilizá-lo para fazer previsões de um horizonte h . Para este trabalho, foram realizadas as previsões que utilizam os horizontes de 1 a 6, sendo posteriormente calculado o erro percentual médio absoluto (MAPE) para cada uma das estações e modelos (Tabela 3). A incorporação do componente espacial pelo modelo STARIMA levou a uma redução média de 34% no MAPE. Adicionalmente são apresentadas na Figura 9 as 17 séries temporais e suas previsões.

Tabela 3 - Erro percentual médio absoluto para as previsões de temperaturas médias mínimas mensais de estações localizadas na mesorregião Oeste Paranaense utilizando-se o modelo sazonal STARIMA $(1_1, 0, 1) \times (1, 1, 1)_{12}$ e modelos ARIMA univariados.

Estação	Modelo	
	STARIMA	ARIMA
1	5,81	8,00
2	5,06	7,07
3	4,81	7,36
4	9,00	7,96
5	4,26	7,35
6	4,39	7,83
7	4,09	7,47
8	4,57	6,40
9	8,26	8,53
10	4,15	7,69
11	4,37	7,74
12	4,62	8,54
13	4,24	7,20
14	4,32	7,18
15	5,48	8,96
16	5,53	7,99
17	5,00	8,02

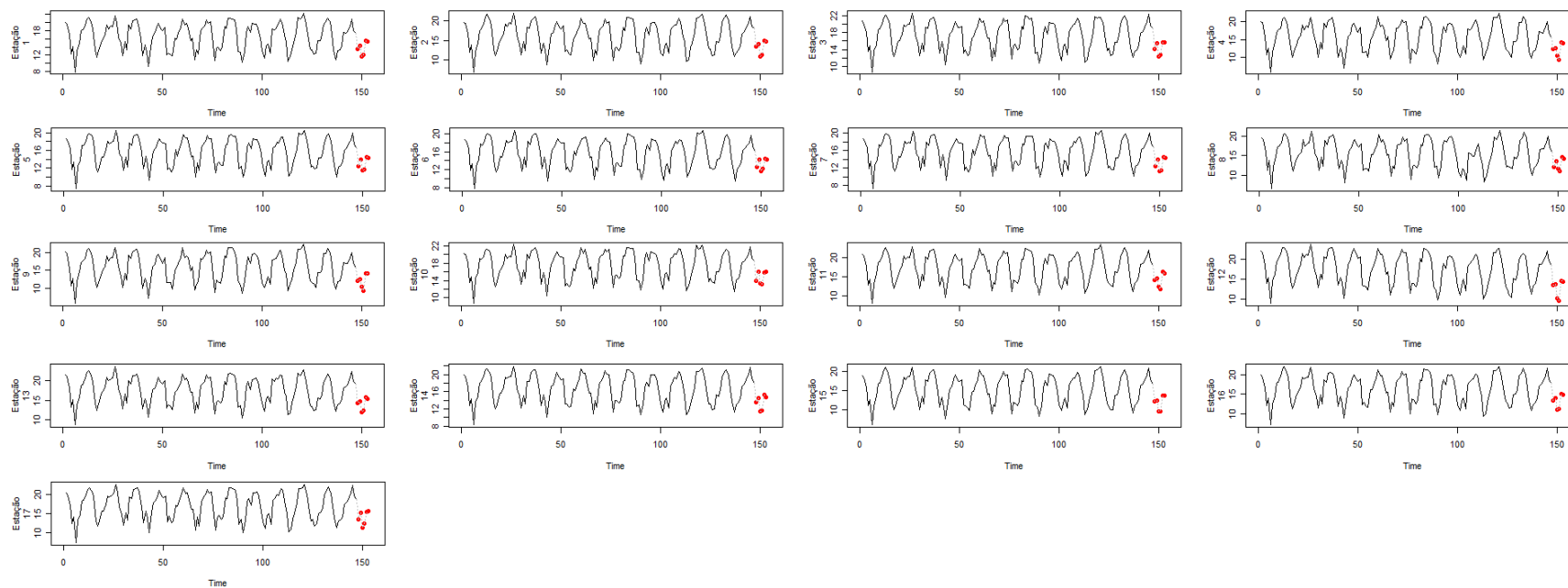


Figura 9 - Séries temporais das médias mensais das temperaturas mínimas diárias observadas nas 17 estações meteorológicas e previsões a um horizonte 6

CONCLUSÕES

Com base nos resultados apresentados do ajuste do modelo autorregressivo integrado e de médias móveis espaço-temporal utilizando a matriz de pesos espaciais calculada pelo método do inverso da distância euclidiana, conclui-se que estes modelos são uma ferramenta alternativa de previsão, mostrando-se superiores aos modelos ARIMA na previsão da temperatura mínima média mensal para a região analisada. Desta maneira, a classe de modelos STARMA é indicada como um importante método de modelagem para pesquisadores da área de climatologia, economia, entre outros, uma vez que estes modelos captam a dependência espacial, temporal e sazonal. Ademais, sugere-se o modelo STARMA como uma metodologia alternativa para instituições e/ou empresas que necessitem realizar previsões baseadas em processos que tenham dependência espacial e/ou temporal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AHRENS, C. D. *Meteorology today: an introduction to weather, climate, and the environment*. Cengage Learning, 2012.
- BIZ, G. Simulações de pesos espaciais para o modelo STARMA e aplicações. Tese. Universidade de São Paulo, 2014.
- BOROVKOVA, S.; LOPUHAÄ, H.P.; RUCHJANA, B. N. Consistency and asymptotic normality of the least squares estimators in generalized STAR models. *Statistica Neerlandica*, Malden, v. 62, p. 482-508, 2008.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. São Francisco: Holden-Day, 1970. 537 p.
- CARGNELUTTI, A.; MALUF, J. R. T.; MATZENAUER, R. Coordenadas geográficas na estimativa das temperaturas máxima e média decendiais do ar no Estado do Rio Grande do Sul. *Ciências Rural*, Santa Maria, v. 38, p. 2448-2456, 2008.
- CHECHI, L.; BAYER, F. M. Modelos univariados de séries temporais para previsão das temperaturas médias mensais de Erechim, RS. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, Campina Grande, v. 16, n. 12, p. 1321-1329, 2012.
- CLIFF, A. D.; HAGGETT, P.; ORD, J. K.; BASSETT, K. A.; DAVIES, R. B. *Elements of spatial structure: A quantitative approach*. Nova York: Cambridge University Press, 1975.
- CLIFF, A. D.; ORD, J. K. Space-time modelling with an application to regional forecasting. *Transactions of the Institute of British Geographers*, Nova York, n. 64, p. 119-128, mar. 1975.
- DEUTSCH, S. J.; PFEIFER, P. E. Space-Time ARMA Modeling with Contemporaneously Correlated Innovations. *Technometrics*, Nova York, v. 23, n. 4, p. 401-409, 1981.
- DING, Q.; WANG, X.; ZHANG, X.; SUN, Z. Forecasting Traffic Volume with Space-Time ARIMA Model. *Advanced Materials Research*, Switzerland, v. 156-157, p. 979-983, 2011.
- GIACINTO, V. d. A Generalized space-time ARMA model with an application to regional unemployment analysis in Italy. *International Regional Science Review*,

Londres, v. 29, p. 159-198, 2006.

KAMARIANAKIS, Y. I.; PRASTACOS, P. P. Space-Time Modeling of Traffic Flow. *Computer e Geosciences*, Hellas, v. 31, p. 119-133, 2005.

LIN, S.L.; HUANG, H.Q.; ZHU, D.Q.; WANG, T.Z. The application of Space-Time ARIMA model on traffic flow forecasting. In: PROCEEDINGS OF THE EIGHTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON MACHINE LEARNING AND CYBERNETICS, Baoding, 2009, *Resumo...* Baoding, 2009. p. 3408-3412.

MARTIN, R.L.; OEPPEN, J.E. The identification of regional forecasting models using space-time correlation functions. *Transactions of the Institute of British Geographers*, Nova York, n. 66, p. 95-118, 1975.

MARTINS, N.; BIZ, G.; OZAKI, V. A. MODELO AUTORREGRESSIVO DE MÉDIA MÓVEL ESPAÇO-TEMPORAL APLICADO EM DADOS DE TEMPERATURAS MÍNIMAS MÉDIAS MENSAIS. *Revista Brasileira de Biometria*, v. 32.1, p. 158-169, 2014

MEDEIROS, S. S.; CECÍLIO, R. A.; MELO JUNIOR, J. C. F.; SILVA JUNIOR, J. L. C. Estimativa e espacialização das temperaturas do ar mínimas, médias e máximas na Região Nordeste do Brasil. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, Campina Grande, v. 9, n. 2, p. 247-255, 2005.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, *Análise de séries temporais*. São Paulo: Blucher; 2006. 538 p.

MONROY, N. A. J. *Modelo ARFIMA Espaço-Temporal em Estudos de Poluição do Ar*. 2013. p. 80. Tese (Doutorado em Engenharia Ambiental) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. A Three-Stage Iterative Procedure fo Space-Time Modeling. *Technometrics*, Nova York, v. 22, n. 1, p. 35-47, 1980a.

PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. Identification and Interpretation of First Order Space-Time ARMA Models. *Technometrics*, Nova York, v. 22, n. 3, p. 397-408, 1980b.

PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. A STARIMA Model-Building Procedure with Application to Description and Regional Forecasting. *Transactions of the Institute of British Geographers*, Nova York, v. 5, no. 3, p. 330-349, 1980c.

PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. Independence and sphericity tests for the residuals of space-time ARIMA models. *Communications in Statistics. Simulation and Computation*, Nova York, p. 533-549, 1980d.

PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. Variance of the Sample Space-Time Correlation Function. *Journal of the Royal Statistical Society*, Atlanta, v. 43, n. 1, p. 28-33, 1981a.

PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. Variance of the Sample Space-Time Correlation Function of Contemporaneously Correlated Variables. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Atlanta, v. 40, n. 1, p. 133-136, 1981b.

R Development Core Team. *R: A language and environment for statistical computing*. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>. 2017.

RAO, T. S.; ANTUNES, A. M. C. Spatio-Temporal modelling of temperature time series: A comparative Study. In: BRILLINGER, D. R.; ROBINSON, E. A.;

SCHOENBERG, F. P. (Ed.) *Time Series Analysis and Applications to Geophysical Systems*. Nova York: Springer, 2004. p. 123-150.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 6, 1978.

SMITH, T. E. *Spatial Weight Matrices*. Disponível em: <http://www.seas.upenn.edu/~ese502/lab-content/extra_materials/>. Acesso em: 24 jan. 2013.