

DOI: 10.30612/tangram.v6i3.17587

## **Estadística y probabilidad en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido estocástico**

*Statistics and probability in early childhood and primary school: Ten essential manipulatives for developing stochastic sense*

*Estatísticas e probabilidade no ensino pré-primário e primário: dez manipuladores essenciais para desenvolver o sentido estocástico*

**Ángel Alsina**

Universidad de Girona, Cátedra de Didáctica de las Matemáticas M<sup>a</sup>. A. Canals  
Girona, España

E-mail: [angel.alsina@udg.edu](mailto:angel.alsina@udg.edu)

0000-0001-8506-1838

**Ester Bosch**

Universidad de Girona, Gabinet de Materials i de Recerca per la Matemàtica a l'Escola  
Girona, España

E-mail: [ebosch16@xtec.cat](mailto:ebosch16@xtec.cat)

0000-0001-7169-0924

**Resumen:** La estadística y la probabilidad es el estándar de contenidos de más reciente incorporación en el currículo de matemáticas de infantil y primaria. Su presencia se debe a la necesidad de desarrollar el sentido estocástico desde las primeras edades, para que la ciudadanía movilice los conocimientos y las herramientas necesarias para interpretar críticamente los datos y tomar decisiones en situaciones de incertidumbre. Con el propósito de ayudar al profesorado de las primeras etapas a conseguir este reto, en la primera parte de este artículo se describen los conocimientos importantes e ideas centrales de estadística y probabilidad para desarrollar el sentido estocástico; y, en la segunda parte, se presenta una selección de diez materiales manipulativos esenciales, a partir de criterios de contenido, de finalidades didácticas y de tipo de material. Para cada material, se describen diversas actividades por grupos de edad: 3-6 años; 6-8 años; 8-10 años; 10-12 años.

**Palabras clave:** Estadística y probabilidad. Sentido estocástico. Materiales manipulativos. Educación Infantil. Educación Primaria.

**Abstract:** Statistics and probability is the most recently incorporated content block in the mathematics curriculum for infant and primary school. Its presence is due to the need to develop stochastic sense from an early age, so that children mobilise the knowledge and tools necessary to critically interpret data and make decisions in situations of uncertainty. In order to help early childhood teachers meet this challenge, the first part of this article describes the important knowledge and big ideas of statistics and probability to develop stochastic sense; and, in the second part, a selection of ten essential manipulative materials is presented, based on criteria of content, pedagogical purposes and type of material. For each material, various activities are described by age: 3-6 years; 6-8 years; 8-10 years; 10-12 years.

**Keywords:** Statistics and probability. Stochastic sense. Manipulative materials. Early Childhood Education. Primary Education.

**Resumo:** Estatísticas e probabilidade é o bloco de conteúdo mais recentemente incorporado no currículo de matemática para o ensino infantil e primário. Sua presença se deve à necessidade de desenvolver a senso estocástico desde as primeiras idades, para que as crianças mobilizem os conhecimentos e ferramentas necessárias para interpretar criticamente os dados e tomar decisões em situações de incerteza. A fim de ajudar os professores da primeira infância a enfrentar este desafio, a primeira parte deste artigo descreve os importantes conhecimentos e idéias centrais de estatística e probabilidade para desenvolver a senso estocástico, e a segunda parte apresenta uma seleção de dez materiais manipuladores essenciais, com base em critérios de conteúdo, fins didáticos e tipo de material. Para cada material, as atividades são descritas por grupo etário: 3-6 anos; 6-8 anos; 8-10 anos; 10-12 anos.

**Palavras-chave:** Estatísticas e probabilidade. Senso estocástico. Materiais manipuladores. Educação pré-escolar. Ensino primário.

**Recebido em**

21/04/2023

**Aceito em**

20/08/2023

## INTRODUCCIÓN

La mayor parte de la ciudadanía del siglo XXI recibirá, a lo largo de su vida, una gran cantidad de datos que deberá interpretar críticamente y, a la vez, necesitará decisiones en situaciones de incertidumbre, considerando la gran complejidad del mundo. Para dotarles de conocimientos y habilidades para hacer frente a estos retos, uno de los grandes aciertos del sistema educativo en las últimas décadas ha sido, precisamente, incorporar la estadística y la probabilidad en los currículos de las primeras etapas educativas. El organismo que, con visión de futuro, impulsó esta transformación curricular fue el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) de Estados Unidos, cuando propuso estándares de contenido de estadística y probabilidad a partir de los 3 años (NCTM, 2003). Si bien esta incorporación se ha producido a distintas velocidades en los diferentes países, y en la actualidad todavía hay algunos currículos que no consideran explícitamente los conocimientos de estadística y probabilidad (sobre todo en el período 3-8 años), la tendencia a integrar estos contenidos en los currículos de infantil y primaria va en aumento (Vásquez y Alsina, 2022).

En honor a la verdad, y como ocurre casi siempre que se produce algún cambio relevante, este cambio curricular no ha estado exento de voces críticas, desde personas expertas en la materia que han cuestionado que los niños de las primeras edades puedan adquirir conocimientos de estadística y probabilidad, hasta personas anónimas que consideran que a estas edades lo que deben hacer los niños es jugar, divertirse, y que “lo académico” ya llegará.

Sin embargo, desde la observación y la documentación de lo que hacen (y lo que no hacen) los niños de las primeras edades, nos preguntamos ¿toman decisiones cuando juegan?, ¿se dan cuenta de que hay algunas situaciones imposibles, otras seguras... mientras juegan?, ¿descubren progresivamente que hay distintos tipos de

juegos?, ¿discriminan que algunos juegos son los preferidos por la mayoría, mientras que otros juegos gustan menos? Las respuestas a estas preguntas evidencian que, en las experiencias cotidianas, emergen los primeros conocimientos asociados a la estadística y la probabilidad, como por ejemplo un primer acercamiento a la idea de espacio muestral (los distintos tipos de juegos), la identificación de la moda (el juego preferido), o la posibilidad de ocurrencia y el comportamiento del azar en algunas situaciones lúdicas (por ejemplo, que al jugar al parchís cuesta que salga un cinco). La escuela, sin duda, es la institución responsable de dar continuidad y de consolidar estos conocimientos emergentes, considerando que “la conexión más importante en los primeros aprendizajes matemáticos es el existente entre las matemáticas intuitivas, informales, que los niños han aprendido a través de sus experiencias, y las que están aprendiendo en la escuela” (NCTM, 2003, p. 136).

Con base en estos planteamientos, y desde el firme convencimiento que es esencial promover el desarrollo del sentido estocástico desde las primeras edades (Alsina, 2021; Alsina y Vásquez, 2016; Batanero, 2013; entre otros), en este artículo se proporcionan herramientas al profesorado de las etapas de infantil y primaria para llevar a cabo una enseñanza eficaz de la estadística y la probabilidad. Si bien es cierto que, tal como señalan múltiples autores y organismos (Alsina et al., 2020; Bargagliotti, 2020; Batanero y Díaz, 2011; entre otros) los contextos reales y/o basados en proyectos son especialmente adecuados para lograr esta meta, los materiales manipulativos son también un recurso fundamental, puesto que permiten visualizar las ideas matemáticas de manera y hacer más eficaz el proceso de aprendizaje (Alsina, 2022; Alsina y Planas, 2008).

Los currículos de matemáticas se han ido impregnando progresivamente de esta forma de abordar la enseñanza, razón por la que ha surgido una gran avalancha de propuestas anónimas en diversos medios, principalmente en redes sociales como Instagram, Pinterest, etc. (Alsina y Bosch, 2022). En este sentido, Alsina (2020) indica que esta gran cantidad de propuestas requiere que el profesorado tenga criterios

objetivos, es decir, respaldados por la investigación, para seleccionar recursos que garanticen un buen aprendizaje.

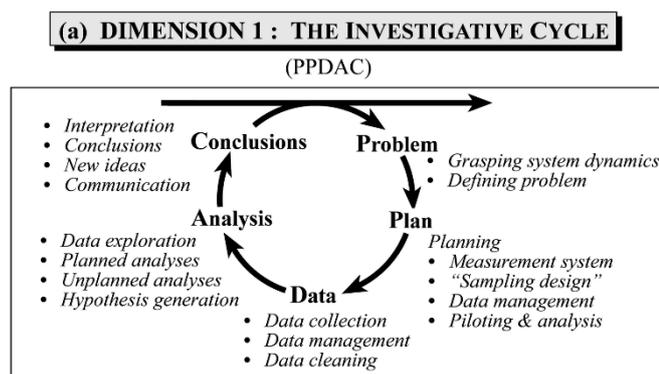
Desde este punto de vista, en la primera parte del artículo, se describen los conocimientos importantes de estadística y probabilidad que fundamentan la selección de recursos y, en la segunda parte, se presentan diez recursos manipulativos esenciales que contribuyen a desarrollar el sentido estocástico de los 3 a los 12 años, a partir de criterios de contenido, de finalidades didácticas y de tipo de material.

## **ESTADÍSTICA, PROBABILIDAD Y SENTIDO ESTOCÁSTICO DE 3 A 12 AÑOS: CONOCIMIENTOS IMPORTANTES**

La noción de *matemáticas importantes* fue impulsada por el NCTM (2003) para referirse a unas matemáticas que preparen para un estudio continuado y para la resolución de problemas en diferentes entornos (el aula, la casa o el trabajo); y para enfatizar que su buena articulación incentiva a los niños para ir aprendiendo ideas matemáticas cada vez más complejas a medida que avanzan los estudios.

En relación a los conocimientos importantes para el segundo ciclo de educación infantil (3-6 años), Alsina (2022, p. 183) destaca que “la estadística y la probabilidad mantienen estrechas conexiones intradisciplinarias en el marco de la estocástica, que incluye lo que está sometido al azar y que es objeto de análisis estadístico”. Desde esta visión integrada de la estadística y la probabilidad, describe algunos conocimientos imprescindibles para cada fase del ciclo de investigación estadística (Wild y Pfannkuch, 1999) y en torno al significado intuitivo de la probabilidad (Batanero, 2005). Para ofrecer una visión de continuidad, Alsina (2019) aborda estos mismos conocimientos para la etapa de educación primaria (6-12 años), adoptándolos a los conocimientos que pueden movilizar los niños de estas edades. Adicionalmente, se añaden otros conocimientos correspondientes a otros significados de la probabilidad como el clásico, el frecuencial y el subjetivo (Batanero, 2005).

En la Figura 1 se muestran las cinco fases del ciclo de investigación estadística, conocido por el acrónimo PPDAC:



**Figura 1.** Ciclo de investigación estadística. Fuente: Wild y Pfannkuch (1999, p. 226)

Con la presentación de este ciclo, se quiere romper con el estereotipo que asocia la estadística exclusivamente a la representación gráfica de datos y, en su lugar, dar valor a los procesos previos de recogida y organización de datos, a partir de su clasificación. Estos procesos incluyen tanto la definición de categorías (valores de la variable objeto de estudio) como la elaboración de tablas estadísticas de recuento y el tránsito hacia las tablas de frecuencias mediante la transnumeración, que permite pasar de un modo de representación habitualmente más concreta o pictórica a otra más abstracta para promover la comprensión (Rodríguez-Muñiz et al., 2021).

Considerando que la omisión de estas fases preliminares en el ciclo de investigación estadística tiene importantes repercusiones, a continuación, se aportan algunos conocimientos imprescindibles para cada una de las cinco fases:

*Fase 1. Planteamiento del problema (reto)*

Al plantear proyectos de investigación estadística en los que el alumnado deba recoger datos, es necesario tener en cuenta que el reto que se formula determina la

variable de estudio. Las variables son de dos tipos: a) cualitativas, que se refieren a aspectos no numéricos, es decir, cualidades que no se pueden ordenar numéricamente (p. ej., el equipo de fútbol preferido); b) cuantitativas, que se refieren a características que pueden tomar valores numéricos (p. ej., la cantidad de lluvia diaria).

### *Fase 2. Recogida de datos*

En esta fase debe considerarse el conjunto de elementos (o individuos) que son de interés para realizar la investigación estadística, que se denomina población. La recogida puede realizarse a partir del censo, cuando se realiza con la totalidad de una población; o con una muestra, cuando se realiza con una parte de la población. En la estadística temprana se trabaja con muestras (p. ej., los niños de la clase).

Seguidamente, deben definirse bien las categorías de la variable de estudio. De acuerdo con Rodríguez-Muñiz et al. (2021), hay dos estrategias posibles: a) definir las categorías previamente (p. ej., si la variable es el equipo de fútbol preferido, se hace un listado previo de las categorías: Boca Juniors, Milán, Juventus, Manchester United, Barça, Real Madrid...); b) analizar los datos recogidos y decidir, entre todos, las categorías (p. ej., si la variable es la fruta preferida, se analizan los casos entre todos y se deciden las categorías: naranja, manzana, cereza...).

### *Fase 3. Organización de los datos*

Para la organización de los datos es imprescindible prestar atención, como se ha mencionado, a la definición de las categorías y a la comprensión de las tablas estadísticas de recuento y de frecuencias, asumiendo que la comprensión incluye la confección y la interpretación de dichas tablas.

Las tablas estadísticas son un tipo de representación estadística que tienen un papel muy relevante en la recogida y organización de datos. Estrella (2014, p. 6) define dichas tablas como:

[...] un arreglo rectangular con una estructura que comprende un conjunto de filas y columnas [...], permite presentar los datos correspondientes a una o más variables (características del fenómeno bajo estudio) en forma clasificada y resumida, para permitir la visualización del comportamiento de los datos y facilitar la comprensión de la información que se puede extraer.

Las tablas estadísticas pueden ser de dos tipos: las tablas de recuento, que se asocian principalmente a las fases concreta y pictórica expresadas por Hoong et al. (2015), y las tablas de frecuencias, que se asocian a la fase abstracta de esta misma categorización. Esta última fase implica el tránsito a los números mediante la transnumeración, que es una forma de obtener una nueva información al cambiar de un sistema de representación a otro (Wild y Pfannkuch, 1999).

Aunque en la práctica existe bastante variabilidad, Estrella (2014) señala algunos de los elementos que deberían contener las tablas estadísticas: el título, que transmite la idea principal sobre la información representada y su contexto; el cuerpo de datos, que corresponde al bloque rectangular interior compuesto por el grupo de celdas formadas por la intersección de filas y columnas; el encabezado lateral (primera columna), que refleja las categorías de la variable; el encabezado superior, que presenta el nombre del contenido de las columnas, por ejemplo, las frecuencias; y los totales, relativos a las sumas por fila o columna y/o totales.

Las primeras tablas estadísticas que debería elaborar el alumnado son tablas de recuento concretas en las que se usan los propios niños o bien objetos asociados a ellos como marcas de cuenta. Otra posibilidad es utilizar dibujos y signos diversos (palitos, cruces, etc.) como marcas de recuento (Rodríguez-Muñiz et al., 2021), sin imponer el tipo de marca, sino dando libertad al alumnado para que elijan las que

preferían. Estos signos pueden ser no organizados y organizados. Después de la tabla de recuento es necesario transitar a la tabla de frecuencias que, de acuerdo con Díaz-Levicoy et al. (2018), representan las frecuencias (obtenidas mediante agrupación o recuento de datos iguales) asociadas a los valores o categorías de las variables (se pueden consultar ejemplos de distintos tipos de tablas en Alsina, 2019, 2022).

#### *Fase 4. Representación de datos*

Rodríguez-Muñiz et al. (2021) subrayan que lo que caracteriza a un gráfico estadístico es la representación de información estadística, que pasa por clasificar, organizar y, en su caso, agrupar los datos y resumirlos; en otras palabras, la generación de información a partir de datos.

Debe considerarse que los primeros gráficos que se pueden empezar a realizar a finales de infantil o inicios de primaria son concretos, normalmente con material y respetando una correspondencia término a término. Al final de la etapa de infantil pueden elaborarse también los primeros pictogramas usando signos diversos. Más adelante, ya en primaria, se pueden ir introduciendo otras representaciones gráficas: p. ej., gráficos de barras dobles y apilados, histogramas, gráficos de líneas simples y dobles, gráficos de sectores, coropletas, mapas de burbujas, nubes de términos, etc. (se pueden consultar ejemplos en Alsina, 2019, 2022; Alsina et al., 2020).

Diversos autores han tratado de describir y caracterizar los diferentes niveles de comprensión para tablas y gráficos estadísticos. Díaz-Levicoy et al. (2018), por ejemplo, exponen cuatro niveles de comprensión desde el más elemental al más complejo:

1. Leer los datos: requiere una lectura literal de la información presentada en la tabla, como por ejemplo leer una frecuencia, una categoría o el título general de la misma. No requiere interpretación.

2. Leer dentro de los datos: requiere encontrar un valor por medio de comparaciones u operaciones aritméticas sencillas, además incluye la interpretación de la información contenida en ella, como por ejemplo calcular la cantidad total de estudiantes que participaron en la encuesta, entre otras.
3. Leer más allá de los datos: requiere determinar una información ausente en la tabla por medio de predicciones o estimaciones, como por ejemplo hacer una inferencia estadística (inferir la temperatura máxima a partir de las temperaturas máximas de una ciudad mostradas en la tabla).
4. Leer detrás de los datos: requiere valorar críticamente la manera en que se recogieron los datos, interpretar la crítica que otras personas hacen del mismo o bien cuestionar la calidad de los datos. Supone una reflexión del conocimiento matemático y del contexto. Por ejemplo, analizar si la pregunta utilizada para recoger los datos es la apropiada o no.

#### *Fase 5. Interpretación de datos*

En infantil y primeros cursos de primaria, se pueden interpretar los datos haciendo comparaciones de las frecuencias de cada categoría, usando los comparativos “más...que”, “menos...que”, etc.; se pueden ordenar; etc.

Progresivamente, a partir de los niveles intermedios de primaria, se empiezan a utilizar medidas de tendencia central y características de dispersión para estudiar e interpretar numéricamente, con la máxima precisión, los fenómenos colectivos incompletamente conocidos. Las principales medidas de tendencia central (denominadas también características de posición central) son la media aritmética, la moda y la mediana:

- La media aritmética se obtiene dividiendo la suma de todos los casos por el número total de casos.

- La moda es el valor que tiene la frecuencia absoluta más elevada (es la única medida de tendencia central que se puede usar para variables cualitativas, además de las cuantitativas).
- La mediana es el valor central de una muestra ordenada de datos. Hay dos casos posibles: a) cuando se trata de un conjunto impar de datos numéricos ordenados, la mediana es el valor que ocupa el lugar central; b) cuando se trata de un conjunto par de datos numéricos ordenados, la mediana es la media aritmética de los dos valores que ocupan el lugar central.

En relación a las características de dispersión, proporcionan datos comparativos respecto a los valores de tendencia central. La medida de dispersión más usada es la desviación típica, denominada también desviación estándar, que por su complejidad no se presenta en primaria. Únicamente, pues, el alumnado de esta etapa puede identificar el rango, que se refiere a la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de un conjunto de datos, aunque es poco representativo de la dispersión (Alsina, 2019).

### **La probabilidad**

La probabilidad puede definirse, de forma sencilla, como la medida de la posibilidad de ocurrencia de los hechos. Su desarrollo histórico-epistemológico ha dado lugar a la coexistencia de diversos significados (Batanero, 2005): intuitivo, frecuencial, clásico o laplaciano, subjetivo y axiomático.

Diversos organismos y autores (Alsina, 2021; Alsina y Vásquez, 2016, NCTM, 2003; entre otros) subrayan que en infantil los niños ya pueden empezar a comprender el significado intuitivo de la probabilidad que, a partir de situaciones cotidianas, se focaliza en el uso de términos estocásticos y la expresión de grados de creencia para la ocurrencia de sucesos, a partir de una escala cualitativa desde seguro a imposible.

En primaria, de acuerdo con Vásquez y Alsina (2019), se deberían trabajar todos los significados salvo el axiomático. De acuerdo con estos autores, en la Tabla 1 se presenta una síntesis de los conocimientos más representativos de cada significado:

**Tabla 1**

Síntesis de los conocimientos asociados a los significados de la probabilidad

Intuitivo	Exploración y distinción de fenómenos aleatorios, diferenciándolos de los deterministas. Énfasis en la posibilidad de ocurrencia como escala cualitativa que va desde lo seguro a lo imposible. Imprevisibilidad y variabilidad de sucesos y sus resultados posibles.
Clásico	Representación de probabilidades de ocurrencia por medio de una escala cuantitativa cuyos valores fluctúan entre 0 y 1. Énfasis en conceptos y propiedades tales como espacio muestral, casos favorables y no favorables, juego justo, probabilidad de ocurrencia como medida de la incerteza, sucesos simples equiprobables, Regla de Laplace. Foco en situaciones problemas centradas en el cálculo de probabilidades, en determinar la probabilidad de ocurrencia teórica a partir de los datos observados en un experimento aleatorio.
Frecuencial	Foco en realizar predicciones a partir de los datos observados en un experimento aleatorio. Uso de términos y expresiones verbales específicas de las probabilidades (población, valor estimado, simulación, probabilidad teórica y experimental, tendencias, frecuencias, proporción, etc.) Énfasis en la independencia de sucesos, estabilización de frecuencias y en el rango de la frecuencia relativa de un suceso (entre 0 y 1).
Subjetivo	Procedimientos centrados en analizar experimentos en los que la probabilidad de ocurrencia depende de la información disponible, y valorar la probabilidad de ocurrencia de un suceso a partir de experiencias personales. Análisis de ejemplos y experiencias previas que permiten ajustar las asignaciones previas de probabilidad a partir de nueva información.

## ESTADÍSTICA, PROBABILIDAD Y SENTIDO ESTOCÁSTICO DE 3 A 12 AÑOS: IDEAS CENTRALES

En esta sección se presentan las grandes ideas asociadas a la estadística y la probabilidad en infantil y primaria, asumiendo que una *idea central* o *gran idea* vincula diversos conocimientos en un todo coherente, con el objeto de que el alumnado vea a las matemáticas como un sistema altamente conectado de pensamiento y conceptos a través de varios temas, en lugar de verlos como conceptos aislados (Charles, 2005; Toh y Yeo, 2019).

Con base en este planteamiento, el *Centre de Recursos per Ensenyar i Aprendre Matemàtiques (CREAMAT)* del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya (España) ha trabajado en la definición de las ideas centrales correspondientes a los distintos bloques de contenidos. A continuación, se reproducen las ideas centrales de estadística y probabilidad para la etapa de infantil (Torra y Roca, 2019) y primaria (Burgués y Serra, 2019):

**Tabla 2**

Ideas centrales de estadística y probabilidad de 3 a 12 años.

3-6 años	6-12 años
Para ayudarnos a interpretar fenómenos e informaciones recogemos, organizamos y representamos datos.	El propósito principal para recoger y organizar datos es responder preguntas.
Hay cosas que son seguras, otras imposibles y algunas son probables.	La organización de datos en tablas, gráficos y otras representaciones ayuda a darles sentido. Los datos se pueden relacionar: El análisis de los gráficos amplía la extensión de su significado.
	La probabilidad que se produzca un acontecimiento se puede representar a lo largo de un continuo de cero a uno.
	La probabilidad ofrece una base para hacer predicciones.

Por un lado, desde una perspectiva amplia, las ideas centrales de estadística se vinculan con los principales componentes de conocimiento de la alfabetización estadística (Gal, 2002) y las ideas estadísticas fundamentales en el currículo escolar y en la formación del profesorado (Burrill y Biehler, 2011): 1) saber por qué se necesitan datos y cómo se pueden producir; 2) estar familiarizado con términos e ideas básicas relacionadas con la estadística descriptiva; 3) estar familiarizado con términos e ideas básicas relacionadas con tablas y gráficos; 4) comprender las nociones básicas de probabilidad; y 5) saber cómo se llega a conclusiones o inferencias estadísticas.

Por otro lado, las ideas centrales de probabilidad se vinculan con los componentes de conocimiento de la alfabetización probabilística (Gal, 2005): 1) grandes ideas (variación, aleatoriedad, independencia, predictibilidad e incertidumbre); 2) calcular probabilidades (formas de encontrar o estimar la probabilidad de eventos); 3) lenguaje (términos y métodos utilizados para comunicarse sobre el azar); 4) contexto (comprender el papel y las implicaciones de los problemas probabilísticos y mensajes en diferentes contextos); y, 5) preguntas críticas (cuestiones sobre las que reflexionar en relación a la probabilidad); adicionalmente, se relacionan también con los significados de la probabilidad descritos por Batanero (2005).

## **DIEZ MATERIALES MANIPULATIVOS ESENCIALES PARA DESARROLLAR EL SENTIDO NUMÉRICO DE LOS 3 A LOS 12 AÑOS**

Como se ha indicado en la introducción, para seleccionar los diez materiales se han seguido criterios de contenido, de objetivo didáctico y de tipo de material: se han seleccionado materiales abiertos, que permitan realizar actividades variadas y usar el mismo material para diferentes edades. También se ha tenido en cuenta que fuesen materiales de fácil acceso, relativamente económicos y que, en el caso de no poder disponer del recurso comercializado, se pudiera crear manualmente un material parecido. Pero el criterio más importante es que con un mismo material se puedan plantear propuestas didácticas que permitan no solo practicar conceptos sino descubrirlos experimentando, visualizarlos para tener referencias, crear conexiones e investigar.

Los diez materiales (o grupos de materiales) seleccionados son: 1) Material para descubrir e investigar de manera experimental fenómenos aleatorios y expresar el grado de posibilidad; 2) Material para facilitar el recuento; 3) Bolsas opacas o cajas para ocultar material; 4) Juegos de mesa; 5) Material para hacer combinaciones distintas; 6) Soportes para crear tablas; 7) Láminas de graduación de posibilidades; 8)

Material para construir gráficos; 9) Material para hacer investigaciones estocásticas; y 10) Cubo de madera. A continuación, para cada material, se describen algunas actividades concretas que se pueden realizar, organizadas por grupos de edad: 3-6 años; 6-8 años; 8-10 años; 10-12 años (Tablas 3 a 12).

**1. Material para descubrir e investigar de manera experimental fenómenos aleatorios y expresar el grado de posibilidad:** son objetos muy distintos (p. ej., dados, ruletas, monedas, peonzas, cartas, bolas de distintos colores, material lógico estructurado, etc.), que se usan para trabajar de manera experimental fenómenos que dependen del azar y asignarles el grado de posibilidad de ocurrencia (Figura 2).



**Figura 2. Ejemplos de material para descubrir e investigar fenómenos aleatorios**

Todas las actividades propuestas se pueden realizar con cada uno de los materiales, pero es muy recomendable no centrarse en uno, sino utilizarlos alternativamente para ofrecer la posibilidad al alumnado de analizarlos y descubrir cómo sus características modifican las probabilidades que se quieren descubrir: p. ej, los dados cúbicos ofrecen seis posibilidades, las monedas dos, las cartas de la baraja española doce; mientras que las ruletas, las bolas de colores y los otros tipos de dados permiten crear las posibilidades que interesan trabajar.

### Tabla 3

Actividades con material para descubrir e investigar fenómenos aleatorios

3-6	<p>Observación de una colección de objetos (bolas, cubos de colores, cartas de familias...) para contestar preguntas a partir de una escala cualitativa, desde seguro hasta imposible (p. ej., en una bolsa con bolas rojas y verdes, ¿qué color es imposible que salga al extraer una bola?)</p> <p>Realización de las actividades anteriores variando el grado de posibilidad de ocurrencia de los distintos colores (p. ej., el color amarillo aparece tres veces en la ruleta y los otros solo uno; en la caja hay seis bolas rojas y solo una de verde...)</p> <p>Uso de dados u otro material para avanzar en circuitos o juegos de azar.</p> <p>Recuento de datos y realización de tablas estadísticas en experimentos estocásticos: con material manipulativo (p. ej., las veces que sale cada color en una ruleta con distintos colores posibles); con signos (p. ej., cruces o rayas para sustituir los objetos de recuento); con números, para expresar las frecuencias de cada categoría.</p>
6-8	<p>Reconocimiento y comparación de sucesos según su grado de posibilidad de ocurrencia, en una escala cualitativa de imposible a seguro (p. ej., que al tirar un dado salga un 3, un 0, un 5 o un 8; que salga rojo en una ruleta donde aparecen tres amarillos y cuatro verdes...)</p> <p>Construcción de conjuntos de elementos para conseguir que un hecho sea seguro, imposible o posible (p. ej., escoger los colores de las bolas de una caja para conseguir que sea posible que salga rojo, para que sea imposible que salga amarillo...; o pintar una ruleta de colores para que sea posible que salga rojo, para que sea imposible que salga amarillo...)</p> <p>Uso de dados u otro material para avanzar en circuitos o juegos de azar y verbalización de los hechos que permiten ganar.</p> <p>Recuento de datos y realización de tablas estadísticas en experimentos estocásticos (p. ej., registro de los resultados observados al lanzar 20 veces un dado o dos monedas).</p>
8-10	<p>Juegos de azar con una opción previa y comparación intuitiva según su grado de posibilidad, en una escala cualitativa de imposible a seguro (p. ej., al lanzar dos dados, que su suma sea 14; que salgan dos números iguales; que los dos sumen 7...). Adicionalmente, propuesta de situaciones para que al lanzar el dado sea seguro/muy probable/imposible que gane.</p> <p>Juegos de azar con condiciones concretas (p. ej., si sale un número impar, pierdes; si sale par, ganas, avanzas, retrocedes...) o con propuestas desiguales (p. ej., si sale de 1 a 4, la ficha roja avanza las casillas que salgan; si sale 5 o 6, avanza la ficha azul; etc.).</p> <p>Realización de predicciones y discusión de si los resultados obtenidos concuerdan.</p> <p>Experimentación con monedas para realizar hipótesis de que es más probable que salga cara/cruz o los dos casos iguales. Adicionalmente, representación de las posibles combinaciones al lanzar dos monedas.</p> <p>Iniciación de juegos de carreras con apuestas previas (estimación de resultados).</p> <p>Inicio de la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia en una escala entre 0 y 1.</p>

10-12

Cuantificación y comparación de la probabilidad de sucesos, según su grado de posibilidad, en una escala cuantitativa de 0 a 1 (p. ej., al lanzar una moneda, comparar que salga cara/cruz o los dos casos iguales después de realizar hipótesis y experimentar).

Utilización de tablas de doble entrada, diagramas de árbol u otras herramientas para favorecer el cálculo de probabilidades.

Juegos de azar escogiendo previamente el dado con el que queremos jugar (cúbico o dodecaédrico, un dado o dos...).

Juegos de carreras con apuestas previas y análisis posterior de resultados (p. ej., carrera de camellos: sumando los dados; carrera de caballos: restando los dados; carrera de perros: multiplicando los dados y avanzar según la última cifra...)

Aplicación de los descubrimientos hechos en las carreras anteriores en otros juegos o situaciones para descubrir las semejanzas y diferencias.

Juegos de circuitos con estudio razonado. Adicionalmente, construcción de circuitos para conseguir que las condiciones sean equitativas para los dos jugadores o para que haya un camino ganador.

Repetición de un experimento muchas veces para empezar a entender la teoría de los grandes números.

Toma de decisiones a partir de los datos teniendo en cuenta la muestra.

**Material alternativo:** El material propuesto es muy accesible pero también se pueden construir otros elementos con palos marcados con dos caras distintas, ruletas o dados de papel/cartón.

**2. Material para facilitar el recuento:** se trata de conjuntos de piezas iguales para favorecer el recuento en los experimentos estocásticos, como se puede observar en la Figura 3 (p. ej., policubos, piezas de madera iguales, ositos o muñecos de colores, dibujos pictográficos relacionados con el tema investigado, fichas de colores, gomets, etc.). Principalmente en los primeros niveles (3-8 años), los mismos niños pueden ser las unidades de recuento; mientras que en los últimos niveles de primaria (10-12 años), la mayoría de recuentos se realizan directamente en tablas de registro con signos no organizados (cruces, rayas...) u organizado, sin apoyo de material.



**Figura 3.** Ejemplos de material para facilitar el recuento

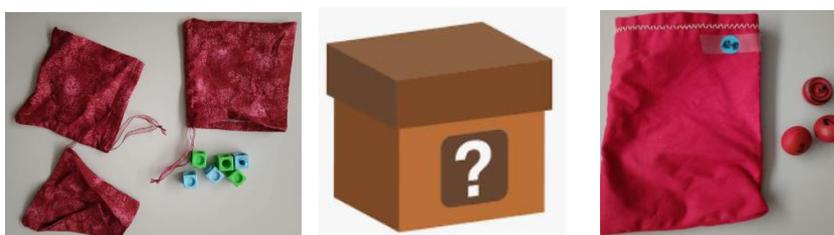
**Tabla 4**

Actividades con material para facilitar el recuento.

3-6	<p>Recuento de datos: 1) con niños (p. ej., cada niño se sitúa en la categoría de la variable que corresponde para responder la pregunta estudiada: fruta favorita...); 2) con policubos (p. ej., colocar una pieza encima de un dibujo de cada fruta para escoger la favorita); 3) con ositos u otros materiales discretos (p. ej., colocar, uno a uno, ositos del color correspondiente al que sale en una ruleta, en filas o columnas; colocar una bola dentro del recipiente correspondiente dependiendo de si hace sol, está nublado o llueve; etc.). Para hacer estos recuentos, pueden usarse también dibujos pictográficos.</p> <p>Organización del recuento con niños y/o con materiales en tablas de recuento concretas, a partir de su clasificación en distintas categorías, principalmente usando signos no organizados.</p> <p>Construcción de tablas de frecuencias, a partir del recuento de la frecuencia absoluta de los casos de cada categoría.</p> <p>Comparación de las frecuencias absolutas de cada categoría utilizando los comparativos “más... que, tantos... como, menos... que, etc.</p>
6-8	<p>Actividades vivenciales dinámicas (p. ej., cada niño se sitúa en la columna de la categoría que corresponde respondiendo la pregunta estudiada y hacer el recuento; a continuación, cambiar las categorías para observar los desplazamientos realizados).</p> <p>Votaciones colocando una pieza de madera según su elección para darse cuenta que tiene que haber tantos votos como alumnos.</p> <p>Observación de tablas de recuento hechas con material y contestar las preguntas: ¿qué veo?, ¿qué noto?, ¿qué me pregunto?</p> <p>Realización del mismo recuento, primero con materiales de tamaño pequeño y después con piezas grandes, para comprobar que la frecuencia no depende del tamaño del material.</p> <p>Sustitución de cada pieza de la tabla de registro por signos no organizados (cruces, rayas...) e inicio del uso de signos organizados (en grupos de dos, de cinco, etc.)</p>
8-10	<p>Situaciones para comprobar la necesidad de saber qué categorías escoger para poder situar los materiales de recuento correctamente.</p> <p>Uso de piezas de colores distintos para realizar recuentos de una misma categoría distinguiendo una característica de la muestra (un color para alumnos de tercero y otro para los de cuarto).</p> <p>Recuentos de la recogida de datos de situaciones del alumnado y externas.</p> <p>Situación correcta del material de recuento en tablas de registro de intervalos.</p> <p>Sustitución de cada pieza de material de la tabla de registro por un signo no organizado (cruces, rayas...) y organizado.</p>
10-12	<p>Realización de recuentos con material en situaciones en las que se pueden votar más de una categoría (p. ej., deportes que se practican, actividades extraescolares...) para descubrir que, en estos casos, la suma de frecuencias puede no coincidir con el número de alumnos.</p> <p>Construcción de las tablas de recuento necesarias u otras maneras de recogida de datos (cestas, pictogramas...) para buscar la persona típica de la escuela a partir de 5 preguntas (por ejemplo: niño o niña, si lleva gafas o no, color preferido, con qué viene a la escuela) para realizar conjuntamente con todos los alumnos.</p> <p>Uso del material para hacer recuento de todas las combinaciones posibles a partir de una situación concreta.</p> <p>Recuento de probabilidades (p. ej., en un sorteo, usar granos de arroz para representar todos los números posibles y pintar el premio de color rojo).</p>

**Material alternativo:** se pueden utilizar tapones, cápsulas de café, piedras, etc.

**3. Bolsas opacas, cajas cerradas y cajas con un agujero en un vértice:** se trata de materiales que se usan para ocultar las piezas que determinan el estudio probabilístico (Figura 4). El hecho de no visualizar las características de los materiales permite realizar hipótesis según los resultados obtenidos y poder hacer las comprobaciones posteriores. En la mayoría de los casos, se pueden realizar tareas inversas a las propuestas en el primer material propuesto.



**Figura 4.** Bolsas y cajas que esconden objetos

**Tabla 5**

Actividades con materiales escondidos.

3-6	<p>Retos concretos conociendo el material escondido, pero sin visualizarlo (p. ej., tenemos tres bolsas con bolas amarillas, rojas y mezcladas... ¿de dónde puedo coger dos bolas rojas?, ¿y una de amarilla y una de roja?).</p> <p>Actividad inversa (p. ej., enseñar las bolas sacadas y preguntar ¿de qué bolsa las he sacado?, ¿en qué bolsa pondrás la mano para sacar dos bolas amarillas?)</p>
6-8	<p>Extracción de tres bolas escondidas en una caja: ¿qué hipótesis se puede realizar?</p> <p>Construcción de conjuntos de elementos para conseguir que un hecho sea seguro, imposible o posible (p. ej., escoger los colores de las bolas de una caja para conseguir que sea posible que salga rojo; para que sea imposible que salga amarillo). Realizar las preguntas a un compañero que no sepa la composición.</p>
8-10	<p>Juegos de estimación con materiales escondidos.</p> <p>Elaboración de hipótesis (p. ej., no sabemos los colores de las bolas de la caja; si saco tres bolas... ¿qué hipótesis puedo realizar?)</p> <p>Resolución de enigmas (p. ej., si tienes 10 pares de calcetines en una caja... ¿cuántos tienes que coger para asegurarte que tienes un par emparejado?). Hacer la comprobación posterior. Deducción de los colores de los cuatro objetos de una bolsa conociendo los hechos posibles (p. ej., es posible sacar dos verdes, verde y amarillo, pero imposible dos amarillos).</p>

10-12

Extracción repetitiva de una bola y analizar el resultado: ¿cuántas bolas hay?, ¿de qué colores pueden ser? Comprobación de la hipótesis  
 Experimentación con dados trucados: ¿por qué sale más un número que otro?, ¿dónde está el sobrepeso?  
 Predicción de cuántas fichas blancas y cuántas negras hay, extrayendo un puñado de bolas diez veces conociendo condiciones concretas (p. ej., en total hay 20 bolas)  
 Cambio de consignas o elementos a experimentos previos. Descubrir la nueva composición.  
 Realización de las mismas actividades con o sin reposición de bolas.

**Material alternativo:** Cualquier objeto que pueda contener materiales.

**4. Juegos de mesa:** si bien en la gran mayoría de estos juegos interviene el azar (p. ej., al lanzar los dados, en las cartas que te tocan, turno de actuación, etc.), algunos son especialmente útiles para comprender que realizar predicciones favorece la victoria, como los juegos de tentar la suerte, conocidos internacionalmente como *Push your luck*, en los que se tiene que valorar si continuar jugando o no, dependiendo de la percepción de las propias posibilidades (Figura 5).



**Figura 5.** Ejemplos de juegos de mesa

**Tabla 6**

Actividades con juegos de mesa

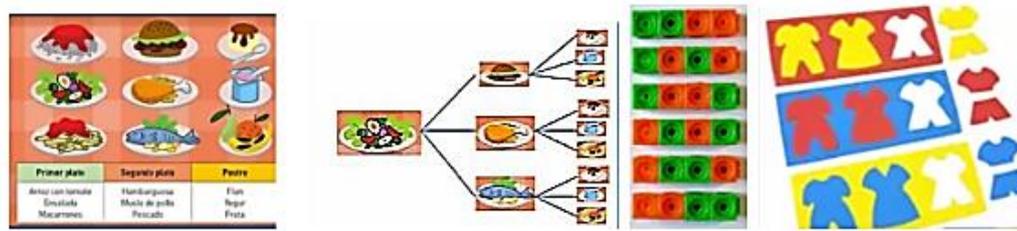
3-6	Juego de la oca, parchís y otros juegos donde la suerte del número que sale hace avanzar más rápido o menos. El frutal: trabajando en equipo, los jugadores intentan recolectar las frutas de los árboles, antes de que el cuervo logre robarlas
6-8	Numerama: colocar los números en celdas según la siguiendo unas condiciones concretas y intuyendo la probabilidad. Juegos de cartas: el cinquillo, etc.

8-10 Piko-piko: conseguir el máximo de puntos o perderlos todos.  
 Diamant: decidir el momento preciso para salir de la cueva según las condiciones concretas.  
 Unanimo: definir un objeto con las palabras que creas que más gente coincidirá contigo  
 Knister: colocar números para conseguir el objetivo.

10-12 Wordle: elegir las letras más probables.  
 Can't stop: ser el primero en llegar a la cima sin arriesgarse demasiado.  
 Camel Up: decidir el camello ganador y perdedor de cada etapa según el desarrollo del juego.  
 Just one: escoger palabras que definan un objeto sin coincidir con otras personas.  
 ¿Seguro?: descubrir los intervalos y los rangos.

**Material alternativo:** Muchos de estos juegos se pueden jugar *online*.

**5. Material para hacer combinaciones distintas:** se trata de materiales manipulativos, dibujos y/o imágenes para visualizar las combinaciones posibles de un conjunto de elementos (p. ej., alimentos, piezas de ropa, cubos de colores, monedas de distinto valor, figuras geométricas, etc.) e introducir el principio multiplicativo (Figura 6).



**Figura 6.** Ejemplos de actividades para visualizar todas las combinaciones posibles

**Tabla 7**

Actividades con material para hacer combinaciones distintas

3-6 Identificación de las combinaciones: 1) con materiales (p. ej., combinación de cubos y palas de tres colores distintos para conseguir resultados diferentes); 2) con dibujos (p. ej., juntar dos semicírculos de distintos colores para conseguir muchos círculos distintos).  
 En una tabla de doble entrada, representar con material (imágenes, etc.) las combinaciones que van en cada casilla según los elementos dados (diferentes entre ellos).

6-8	<p>Representación con material de las distintas maneras que nos podemos vestir si tenemos tres camisetas distintas y dos pantalones.</p> <p>Construcción con policubos de las distintas banderas (o edificios de tres pisos o las tres velas de un barco o...) que podemos realizar con tres franjas de colores.</p> <p>Con dos figuras rojas (triángulo y cuadrado) y tres azules (cuadrado, estrella y triángulo), dibujar cuántas parejas de distinto color podemos conseguir.</p> <p>Con monedas iguales y considerando sus dos posibilidades (cara/cruz), construcción de todas las combinaciones posibles.</p> <p>Realizar combinaciones con gomets.</p> <p>A partir de una tabla de doble entrada, representar con policubos las combinaciones que van en cada casilla a partir de los colores otorgados en las filas y columnas.</p>
8-10	<p>Realización de las mismas actividades anteriores añadiendo elementos o condiciones.</p> <p>Realización de actividades para encontrar todas las combinaciones posibles.</p> <p>Con cuatro colores distintos, representación de todas las combinaciones posibles de tres elementos variando las consignas (si importa el orden, si se puede repetir el color...).</p> <p>Construir todas las opciones de menú posibles según el número de platos disponibles.</p> <p>Dibujo de todas las casas posibles según el color del tejado (tres colores), la forma de las ventanas (tres posibilidades) y el número de chimeneas (una o dos).</p> <p>Resolución de problemas: p. ej., "En un edificio de tres plantas hay una oficina, un dentista y una academia. Coloca los carteles correspondientes para descubrir de cuántas maneras distintas pueden estar. ¿En cuántas posibilidades hay el dentista en la primera planta?"; "Si tengo monedas en el bolsillo de cuatro valores distintos y cojo tres, ¿qué cantidades puedo conseguir?"</p>
10-12	<p>Dado un diagrama de árbol, adivinar las consignas previas y deducir si se han representado todas las posibilidades; si hay soluciones repetidas; si se podían repetir elementos...</p> <p>Acabar de rellenar un diagrama de árbol en el que aparecen solo los resultados finales.</p> <p>Resolución de problemas: p. ej., "calcula todos los pesos que podemos realizar en una balanza si tenemos cinco pesos distintos y podemos utilizar uno o varios a la vez"</p>
<p><b>Material alternativo:</b> Los materiales utilizados pueden ser piedras de distintas formas o material cotidiano de distintos colores</p>	

**6. Soportes para crear tablas:** en las actividades para promover el sentido estocástico, la utilización de tablas es esencial (recogida de datos, registro de posibilidades, combinaciones...). En numerosas ocasiones, se proporcionan a los alumnos para que se rellenen sin considerarse como material que permite hacer conexiones y ayudar a resolver problemas. Sin embargo, en las clases de matemáticas es necesario programar el aprendizaje de estas herramientas básicas. Los alumnos tienen que aprender a diseñarlas, escoger la más adecuada, concretar el número de columnas... Es por este motivo que las cuerdas, los soportes de cartulina, plástico u otro material cuadriculado que, a modo de ejemplo, se muestran

en la Figura 7 permiten construir o modificar de una manera rápida las tablas para posteriormente saberlas plasmar en el papel. Estos materiales permiten visualizar y verbalizar las características que tienen que tener las tablas según el objetivo concreto.

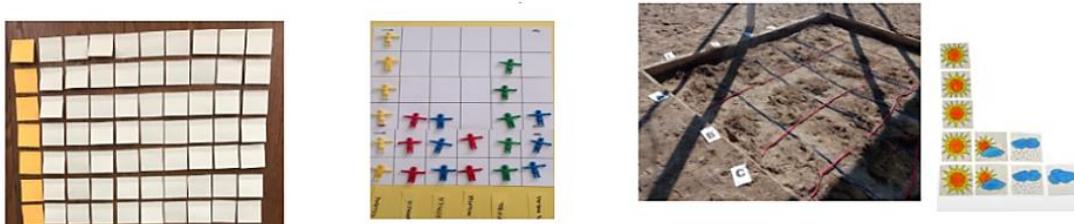


Figura 7. Ejemplos de soportes para crear tablas

## Tabla 8

### Actividades con los soportes para crear tablas

3-6	<p>Realización de tablas de recuento vivenciales.</p> <p>Utilización de elementos pictóricos (sol, nube...) para completar la tabla de recuento u objetos de distintos colores para visualizar los elementos que estamos analizando.</p> <p>Creación de tablas de doble entrada con cuerdas para poder vivenciar las combinaciones (p. ej., con aros de colores y pelotas de colores, desplazarse por la fila de aros rojos y en cada casilla mirar qué pelota se tiene que incorporar).</p> <p>Dibujo de cada uno de los elementos que pueden aparecer en la tabla de recuento (color de los zapatos, figuras geométricas, vehículos...) en cartulinas independientes. Se organizan los datos de cada elemento observando al final los distintos apartados que han formado la tabla.</p> <p>Utilización de recipientes o cajas para colocar los elementos de recuento (bolas, palos...).</p> <p>Representación de las distintas cajas en forma de tablas.</p>
6-9	<p>Verbalización de cómo podríamos recoger los datos para contabilizar todos los elementos repetidos de un dibujo. Proceso gradual para descubrir que las tablas nos facilitan el recuento.</p> <p>Recorte de tiras de papel. Reflexión de cuántas tiras necesitamos para poder anotar las frecuencias de cada categoría estudiada (p. ej., dos tiras para registrar gafas/no gafas; cuatro tiras para estudiar el color del pelo; tres tiras para los colores posibles de una ruleta...). La suma de las tiras serán las columnas necesarias para la construcción de la tabla.</p> <p>Dadas las categorías de la variable estudiada, ir añadiendo notas adhesivas verticales (tipo <i>post-it</i>) según los resultados obtenidos, para percibir la altura necesaria de la tabla.</p> <p>Uso de palos para realizar el recuento. Aprender a agrupar los palos para favorecer el recuento (grupos de cinco, etc.)</p>

8-10	<p>Análisis de los distintos soportes con cuadrículas (cartulinas o material transparente con distinta cantidad de columnas y filas) y verbalizar para qué variables podrían ser útiles (p. ej., soporte con dos columnas para variables con dos únicas categorías, soporte con cinco columnas y una sola fila: necesidad de registrar las frecuencias con símbolos en una misma casilla, etc.).</p> <p>Elección de la cuadrícula necesaria para recoger los datos de una variable concreta.</p> <p>Incorporación de filas o columnas si es conveniente.</p> <p>Realización de la recogida de datos partiendo de consignas orales. Análisis posterior de que si no anotamos las categorías no sabremos a qué hacen referencia las frecuencias.</p>
10-12	<p>En esta franja de edad, los soportes ya no son necesarios y se pueden construir las tablas directamente en el papel.</p> <p>Investigación de las consignas, observación de los resultados de las tablas y descubrimiento de las primeras leyes generales.</p> <p>Analizar previamente las características de las gráficas para utilizar correctamente las herramientas digitales.</p>
<p><b>Material alternativo:</b> no se precisa</p>	

**7. Láminas de graduación de posibilidades:** para entender las escalas cualitativas y cuantitativas que sirven para expresar la medida de la posibilidad de ocurrencia, es necesario comparar situaciones parecidas, analizar porqué una situación es más o menos probable, comprobar predicciones, etc. Las láminas secuenciadas con el mismo material permiten descubrir las variables que intervienen y las que no, analizar los casos seguros o imposibles y poder experimentar de manera rápida para comprobar hipótesis.

Son imágenes o tarjetas visuales sin necesidad de consigna en las que aparece el mismo material (bolas de colores, dados, monedas, ruletas...), con pequeñas modificaciones en la cantidad o en los retos a descubrir (Figura 8). En esta misma categoría podemos considerar situaciones de experimentación para identificar escalas cuantitativas del 0 al 1.



**Figura 8.** Ejemplos de láminas de graduación de posibilidades

**Tabla 9**

Actividades con láminas de graduación de posibilidades

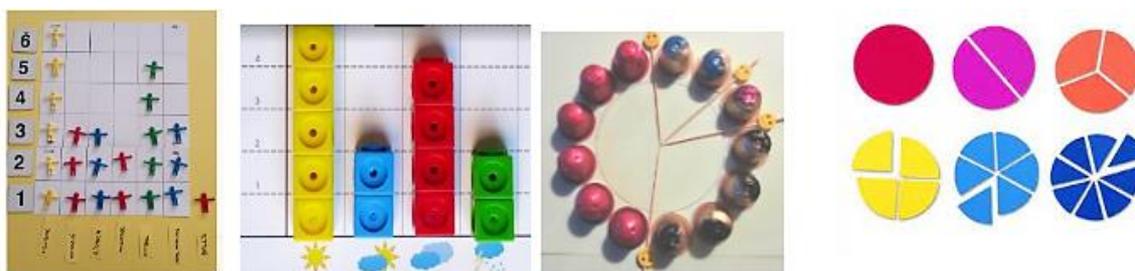
3-6	<p>Utilizar paneles de soporte para clasificar situaciones cotidianas según sean seguras, probables o imposibles.</p> <p>Utilizar láminas visuales sencillas o con consigna oral por parte del adulto de situaciones cotidianas (que salga un 8 al tirar un dado cúbico; que mi madre me regale un juguete por mi cumpleaños; que me regalen un juguete hoy; que mañana veamos un dinosaurio real; que veamos un elefante en una película...)</p>
6-8	<p>Observación de los retos propuestos en las tarjetas y verbalización de si es una situación segura, posible o imposible.</p> <p>Experimentación de cada uno de los retos para comprobar si nuestra hipótesis se cumple.</p> <p>Uso de paneles de soporte para clasificar situaciones de azar según sean seguras, probables o imposibles.</p>
8-10	<p>Realización de las actividades anteriores con retos de mayor complejidad e introduciendo los distintos grados de posibilidad.</p> <p>Experimentación de cada uno de los retos para comprobar si nuestra hipótesis se cumple.</p> <p>Ordenación de las cartas de retos de probabilidad, de mayor probabilidad a menor.</p> <p>Comprobación experimental y argumentación.</p>
10-12	<p>Ordenación de las cartas de retos de probabilidad, de mayor probabilidad a menor.</p> <p>Comprobación experimental de nuestras hipótesis.</p> <p>Elaboración y dibujo de cinco retos visuales con la condición que su probabilidad sea distinta.</p> <p>Elección y dibujo de retos con distintos materiales para lograr que las probabilidades sean parecidas.</p> <p>Creación de circuitos con las láminas graduadas para conseguir opciones ganadoras.</p> <p>Experimentación de los retos propuestos (posibilidad que, al lanzar una pieza de gran tamaño en una cuadrícula pequeña, quede encima de la cuadrícula; que, al coger una carta, me salga un trece; que, al lanzar tres chinchetas, las tres queden con la punta hacia arriba, etc.). Cada vez que se consigue el reto, se cambia una bola de recipiente para valorar visualmente cuántas veces ha salido.</p> <p>Realización inversa de la actividad anterior. Mirando la cantidad de bolas que hemos cambiado de recipiente podemos saber a qué reto pertenecen.</p>

**Material alternativo:** no se precisa

**8. Material para construir gráficos:** durante la etapa de primaria, el alumnado tiene que descubrir distintos tipos de gráficos, familiarizarse con ellos y valorar cuál es el gráfico más adecuado para representar la información. Antes de realizarlos sobre papel, es importante realizarlos con material para descubrir las características matemáticas y estéticas que deben tener; hacer modificaciones; experimentar la

necesidad de utilizar intervalos en determinados gráficos; construir un diagrama de sectores sin necesidad de calcular ángulos; pasar de un tipo de diagrama a otro; descubrir experimentalmente los primeros valores estadísticos (frecuencia, moda, media aritmética, mediana...); etc.

Las regletas, los multicubos, los gomets, las piezas de madera iguales... que se muestran en la Figura 9 pueden servir para realizar gráficos de barras, los círculos de fracciones, piezas circulares, cápsulas de café, golosinas para descubrir los gráficos de sectores y los muñecos de distinto tamaño para trabajar los pictogramas.



**Figura 9.** Ejemplos de material para construir gráficos

### Tabla 10

#### Actividades con material para construir gráficos

3-6	<p>Construcción de un gráfico de barras simples en el que cada alumno coloca una pieza para visualizar su respuesta. Identificación de la respuesta más repetida.</p>
6-8	<p>Realización de gráficos de barras simples e inicio de los dobles con material, para descubrir que las piezas tienen que ser iguales para reflejar con exactitud las respuestas. Convertir una tabla de recogida de datos en material gráfico (anotar la medida de frecuencias, equidistancia de las distintas categorías, añadir el título...). Identificación de la moda en un gráfico.</p>

8-10	<p>Realización de gráficos de barras simples, dobles o apilados con regletas, teniendo en cuenta los valores de la tabla de recogida de datos. Organizar las frecuencias de distinta manera.</p> <p>Propuesta de realización progresiva de un gráfico de barras con intervalos, respetando las propuestas de los alumnos.</p> <p>Experimentación con galletas (u otros materiales contables) para descubrir distintas maneras de realizar la media aritmética.</p> <p>Elaboración de los primeros gráficos de sectores con los círculos de fracciones, controlando bien aspectos como la muestra, pero sin expresar aún los porcentajes.</p> <p>Creación de pictogramas utilizando muñecos de tres tamaños (valor de 10, 5 y 1)</p>
10-12	<p>Interpretación de pictogramas realizados por otros alumnos. Importancia de la leyenda.</p> <p>Realización de gráficos de sectores recortando las barras de los gráficos de barras de un estudio estadístico y pegándolos en forma circular.</p> <p>Construcción de gráficos de sectores con piezas de distintos colores, según la respuesta dada, colocadas en forma circular, identificando el centro y marcando los porcentajes (p. ej., con palillos).</p> <p>Juego de rol para distinguir medidas de tendencia central (p. ej., simular distintos sueldos según las profesiones adjudicadas a cada niño, para valorar que en determinados casos calcular la mediana es más adecuado que la media aritmética).</p> <p>Análisis previo de las categorías, frecuencias y tipos de gráficos más convenientes para poder dar las instrucciones necesarias para realizar los gráficos de manera digital.</p>

**Material alternativo:** Material cotidiano con la condición que sean piezas iguales

**9. Material para hacer investigaciones estocásticas:** el objetivo de estos materiales es proporcionar al alumnado retos para que pueda realizar investigaciones de distinto nivel de dificultad. Es por este motivo que encontramos dos tipos de materiales muy diferenciados (Figura 10): 1) los primeros son los mismos que se ido describiendo en los apartados anteriores, pero que se encadenan entre ellos para pasar por todas las fases del ciclo de investigación estadística; 2) los segundos son materiales específicos de la investigación propuesta (p. ej., tableros con un reto concreto, circuitos para investigar, máquina de Galton, etc.)



**Figura 10.** Ejemplos de material para hacer investigaciones estocásticas

**Tabla 11**

Material para hacer investigaciones estocásticas

<b>3-6</b>	Investigación y representación con materiales inespecíficos (piezas de madera, etc.) de un aspecto de nuestro entorno (p. ej., ¿qué vehículos pasan por la rotonda?)
<b>6-8</b>	Investigación y representación con materiales de un aspecto de nuestro entorno (p. ej., ¿quiénes serían mis vecinos si todos los alumnos viviéramos en la misma calle?)
<b>8-10</b>	Actividad de investigación para encontrar cuál es la persona típica de la escuela (la que se encuentra en la moda de todos los retos estudiados (p. ej., niño/niña, color preferido, con qué viene a la escuela, llevar gafas o no)
<b>10-12</b>	<p>Creación de hipótesis y estudio de en qué puerta caerán más bolas de la máquina de Galton. Estudio de un circuito que encadena sucesos de distinta posibilidad con la finalidad de crear uno que cumpla unas características concretas.</p> <p>Investigación exhaustiva a partir de la carrera de camellos.</p> <p>Investigación "Cruzar la calle": en los dos lados de la calle tenemos los números del 1 al 12. Tenemos 12 fichas para colocar en los números que queramos y la cantidad que decidamos en cada una. Al tirar dos dados sumaremos el resultado y pasaremos la ficha que ocupe este número al otro lado ¿En qué números colocaremos nuestras 12 fichas para poder ser los primeros en tener todas las fichas al otro lado?</p> <p>Reto de la desintegración: Tenemos 30 fichas con dos caras diferenciadas(A/B). Tiramos todas las fichas y retiramos en una primera columna las que hayan salido B. Repetimos la operación en una segunda columna. Cuántas veces tenemos que tirar para conseguir que todas estén en la cara B. Se hace una hipótesis inicial y se puede ir cambiando según el resultado ¿Se puede generalizar este resultado?</p> <p>Realizar un gráfico de los habitantes de cada pueblo de la zona geográfica con granos de arroz. ¿Cómo podemos calcularlo?</p>
<b>Material alternativo:</b> no se requiere	

**10. Cubo de madera:** se trata de un material propuesto por Fernández y Rubirola (2016), en el que cada alumno dispone de un cubo de madera (de unos 10cm de arista) en el que cada cara sirve para visualizar una información personal: una se reserva para el nombre del alumno y en las otras se intercalan datos cuantitativos (p. ej., número de hermanos, cantidad de televisores que hay en casa, número de pie, altura,...) o cualitativas (p. ej., fruta, color, animal o deporte preferidos, color de los

ojos o del pelo,...). Una vez personalizado el cubo, con una palabra y un dibujo en cada cara (Figura 11), se pueden realizar muchas investigaciones estadísticas utilizándose para hacer tablas de recuento o gráficos según sea nuestro objetivo. Los niños colocan el cubo en la categoría correspondiente para ir apilándolos en columna. Al ser una construcción en 3D se perciben mejor los datos, la frecuencia y la moda y, en caso de error, puede ser corregido de una manera muy ágil.



**Figura 11.** Tabla de recuento con cubos personalizados

## Tabla 12

### Actividades con el cubo de madera

3-6

Personalización de los cubos solo con el nombre del alumno. Colocar el cubo en la categoría escogida según la pregunta. Verbalización de los resultados: ¿dónde está mi cubo?, ¿qué ha elegido María?...

Personalizar una cara con la fruta preferida. Se pregunta a quién le gusta más cada tipo de fruta y los alumnos colocan el cubo encima de una superficie plana. En cada columna se visualiza la categoría a la que hace referencia con los dibujos realizados. Progresivamente, se van personalizando las distintas caras para realizar la recogida de datos de distintas propuestas.

Contar cuántos cubos hay en cada categoría.

Verbalización de las distintas frecuencias y cuál es la categoría más elegida.

6-8	<p>Personalización de los cubos con características distintas. Realización de recogida de datos a la pregunta formulada.</p> <p>Presentación oral de nuestras características a partir de las distintas caras del cubo.</p> <p>Realización de actividades para convertir la recogida de datos a gráfico (Título, visualizar categorías, frecuencias, equidistancia...).</p> <p>Personalizar una cara con el color preferido. Se pregunta a quién le gusta más cada color y los alumnos colocan el cubo mostrando su nombre. Potenciar el descubrimiento de la necesidad de rotular la categoría en cada columna.</p> <p>Realización de la recogida de datos sobre el número de hermanos: ¿qué necesitaríamos para saber cuántos niños tienen un hermano sin contar los cubos?</p> <p>Formulación de preguntas para comparar las distintas categorías.</p> <p>Análisis de cuántos cubos hay en total. Relación con el número de participantes.</p> <p>Visualización de las frecuencias y de la moda.</p> <p>Visualización de qué pasaría si cambiáramos cubos de categoría, si añadimos dos votos</p> <p>Realización del gráfico de sus alturas según el número exacto (p. ej., 1m 35cm). Reflexión de si es la mejor manera de hacerlo. Descubrir los gráficos de intervalos (p. ej., de 1.31m-1.40m)</p>
8-10	<p>Personalización de los cubos con características distintas. Realización de recogida de datos a la pregunta formulada. Variar la cara que se muestra del cubo (nombre del alumno o aspecto estudiado).</p> <p>Formulación de preguntas por parte de los alumnos para analizar el gráfico.</p> <p>Visualización de qué pasaría si cambiáramos cubos de categoría, si añadimos dos votos.</p> <p>Descripción escrita de una persona a partir de los datos incorporados en el cubo.</p> <p>Realización del gráfico de las iniciales de los nombres de los alumnos. Descubrir la necesidad de agrupar letras para realizar el conteo. ¿Cómo se pueden organizar?</p>
10-12	<p>Personalización de los cubos con características distintas. Realización de recogida de datos a la pregunta formulada.</p> <p>Estudio de dos variables a la vez, considerando que en el cubo aparece el nombre del alumno (p. ej., ¿la pera la han escogido más niños o más niñas?)</p> <p>Valoración de si hay correlación entre dos variables. La variable estudiada es ¿cómo vienen a la escuela? pero la cara del cubo que mostramos es la de número de hermanos: ¿hay relación entre los niños que vienen andando y el número de hermanos?, ¿cómo vienen a la escuela los hijos únicos?, ¿y los que tienen 4 hermanos?</p> <p>Actividades para darse cuenta que los cubos no pueden servir para hacer la media aritmética en las variables cuantitativas: ¿cuál es la media aritmética del número de hermanos de los alumnos de la clase?</p> <p>Descubrimiento de la Campana de Gauss. Construcción del gráfico de su número de pines: ¿qué forma tiene?, ¿por qué?</p>
<p><b>Material alternativo:</b> Cajas de madera de forma cúbica, p. ej. las de algún tipo café; o construir un cubo de cartulina</p>	

En la Tabla 13 se destacan los principales conocimientos de estadística y probabilidad que puede trabajarse en infantil y primaria con los diez materiales manipulativos presentados.

**Tabla 13**

Vínculos entre los conocimientos importantes e ideas clave de estadística y probabilidad con los diez materiales manipulativos.

	Estadística					Probabilidad		
	Reto	Recuento de datos	Organización de datos	Representación de datos	Interpretación de datos	Lenguaje probabilístico	Cuantificación de la posibilidad de ocurrencia	Cálculo de probabilidades
Material 1		x			x	x	x	x
Material 2	x	x	x		x			
Material 3		x			x	x	x	
Material 4						x	x	
Material 5	x	x	x					
Material 6	x	x	x					
Material 7						x	x	x
Material 8				x	x			
Material 9	x	x	x	x	x	x	x	x
Material 10	x	x	x	x	x			

## CONSIDERACIONES FINALES

En este artículo se ha enfatizado la importancia de abordar la enseñanza de la estadística y la probabilidad en las etapas de infantil y primaria (3-12 años) para que, desde edades tempranas, el alumnado tenga conocimientos y habilidades para interpretar críticamente los datos y tomar decisiones en situaciones de incertidumbre (Alsina, 2021; Alsina y Vásquez, 2016; Batanero, 2013; entre otros).

Para lograr este propósito tan relevante, es necesario que el profesorado de estas etapas movilice conocimientos tanto matemáticos como didácticos que les permitan planificar e implementar prácticas de enseñanza de la estadística y la probabilidad de manera eficaz. Aún más, teniendo en cuenta que en muchos casos el profesorado

generalista no ha recibido una formación inicial sólida en didáctica de la estadística y la probabilidad debido a múltiples factores como, por ejemplo, la reciente incorporación de este bloque de contenidos en el currículo de las primeras etapas o la escasa (o nula) presencia de la didáctica de estos conocimientos en los planes de estudio de magisterio.

Por esta razón, por un lado, se han descrito de forma sencilla, pero no por ello menos rigurosa, los conocimientos matemáticos más importantes que el profesorado de infantil y primaria debe movilizar en torno a la estadística y la probabilidad. Son muchos los organismos y autores de prestigio que llevan décadas haciendo aportaciones para que el profesorado que no ha tenido acceso a estos conocimientos pueda interiorizarlos (Bargagliotti, 2020; Batanero y Díaz, 2011; NCTM, 2003; entre otros). Considerando estas aportaciones, Alsina (2019, 2022) ha sintetizado los principales conocimientos matemáticos de estadística y probabilidad que han servido de base para la primera parte del artículo.

Por otro lado, asumiendo que la enseñanza de estos conocimientos no puede reducirse a un libro de texto si realmente se quiere responder a las necesidades reales del alumnado de estas etapas para aprender matemáticas, se han descrito diez recursos manipulativos esenciales que contribuyen a desarrollar el sentido estocástico de los 3 a los 12 años, a partir de criterios de contenido, de finalidades didácticas y de tipo de material: 1) Material para descubrir e investigar de manera experimental fenómenos aleatorios y expresar el grado de posibilidad; 2) Material para facilitar el recuento; 3) Bolsas opacas o cajas para ocultar material; 4) Juegos de mesa; 5) Material para hacer combinaciones distintas; 6) Soportes para crear tablas; 7) Láminas de graduación de posibilidades; 8) Material para construir gráficos; 9) Material para hacer investigaciones estocásticas; y 10) Cubo de madera. Adicionalmente, para cada recurso, se han propuesto diversas actividades organizadas por niveles, con la finalidad de que el profesorado de infantil y primaria disponga de un amplio abanico de recursos y actividades.

Como se ha señalado anteriormente, se ha puesto el foco en el uso de materiales manipulativos no solo para que el alumnado se divierta en la clase de matemáticas, sino para que, de acuerdo con Alsina y Planas (2008), se promueva la autonomía del aprendiz para lograr un aprendizaje más eficaz. El esfuerzo para alcanzar esta transformación está en manos del profesorado de hoy; la recompensa será, sin duda, que la ciudadanía del futuro estará más preparada para afrontar los retos sociales en un mundo altamente sofisticado.

## REFERENCIAS

- Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Graó.
- Alsina, Á. (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática*, 3(2), 127-159.  
<https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018>
- Alsina, Á. (2021). “Ça commence aujourd'hui”: alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. *PNA*, 15(4), 243-266.  
<https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.21357>
- Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)*. Graó.
- Alsina, Á. y Vásquez, C. (2016). De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: elementos para su caracterización y desarrollo. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 48, 41-58.

- Alsina, Á., Vásquez, C., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L.J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, 104, 99-128.
- Alsina, Á., y Bosch, E. (2022). Numeración y cálculo en infantil y primaria: : Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido numérico. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*, 5(3), 132–167.  
<https://doi.org/10.30612/tangram.v5i3.16420>
- Alsina, Á., y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Narcea S.A. de Ediciones.
- Bargagliotti, B., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Jhonson, R., Perez, L., y Spangles, D.A. (Eds.) (2020). *Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II)*. American Statistical Association.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la Educación Secundaria. *Relime* 8(3), 247-264.
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación? En J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, y F. Viseu (Eds.), *Atas do III Encontro de probabilidades e estatística na escola* (pp 1-13). Braga, Portugal: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Batanero, C., y Díaz, C. (2011). *Estatística con proyectos*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

- Burgués, C., y Serra, T. (2019). *Idees centrals de Matemàtiques (Primària)*. Recuperado de <https://sites.google.com/xtec.cat/idees-centrals-matematiques-ip/inici>.
- Burrill, G., y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En c. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57-69). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0\\_10](https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10)
- Charles, R. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics. *Journal of Mathematics Education Leadership*, 7, 9–24.
- Díaz-Levicoy, D.; Batanero, C.; Arteaga, P. (2018). Dificultades de los estudiantes chilenos de educación básica en la construcción de diagramas de barra. *Paradigma*, 2, 107-129. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2018.p107-129.id703>
- Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 14(2), 1-23.
- Fernández, X. y Rubirola, D. (2016). Estadística y combinatoria para el día a día de la escuela. *Aula de Innovación Educativa*, 251, 18-22.
- Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.

- Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Springer.
- Hoong, L.Y., Kin, H.W., y Pien, C. L. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its Origins and Charting its Future. *The Mathematics Educator*, 16(1), 1-18.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "Thales".
- Rodríguez-Muñiz, L., Muñiz-Rodríguez, L., Aguilar, Á. (2021). El recuento y las representaciones manipulativas: los primeros pasos de la alfabetización estadística. *PNA*, 15(4), 311-338. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22511>
- Toh, T.L., y Yeo, J.B.W. (2019). Big Ideas in Mathematics: *Yearbook 2019, Association of Mathematics Educators*. WSPC
- Torra, M., y Roca, M. (2019). *Idees centrals de Matemàtiques (Infantil)*. Recuperado de <https://sites.google.com/xtec.cat/idees-centrals-matematiques-ip/inici>.
- Vásquez, C., y Alsina, Á. (2019). Observing Mathematics Teaching Practices to Promote Professional Development: An Analysis of Approaches to Probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(3), 719-733. <https://doi.org/10.29333/iejme/5866>.
- Vázquez, C., y Alsina, Á. (2022). La estadística y la probabilidad en los currículos de infantil y primaria: implicaciones para la formación del profesorado. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar*

*Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 189-214). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

Wild, C. J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry.

*International Statistical Review*, 67(3), 223–248.

<https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>