Tangram
Revista de Educação Matemática

DOI: 10.30612/tangram.v6i2.16920

Geometría escolar y prácticas matemáticas: un caso

School geometry and mathematical practices: a case

Geometria escolar y práticas matemáticas: um caso

Carlos Roberto Pérez Medina
Universidad Nacional de Tierra del Fuego, Antártida e Islas del Atlántico Sur
Rio Grande, Argentina
mathperez@gmail.com
Orcid : 0000-0001-6601-8826

Resumen: En el marco de la presencia cada vez más difundida de los Ambientes de Geometría Dinámica en las aulas de matemáticas de muchos países, se propuso identificar y clasificar las prácticas matemáticas que desarrollan alumnos de secundaria con un Sistema de Geometría Dinámica en clase para resolver problemas sobre congruencia de triángulos vía transformaciones geométricas. Se presenta la identificación y clasificación del repertorio de prácticas matemáticas con GeoGebra de uno de los casos analizados en una escuela técnica secundaria pública en Argentina. Se utilizó una perspectiva metodológica cualitativa a través del estudio de casos múltiples. Los resultados contribuyen a comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría mediados con Sistema de Geometría Dinámica, en particular desde el reconocimiento de las prácticas matemáticas desarrolladas en la resolución de tareas sobre un concepto geométrico que se define como transformación geométrica.

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas. Geometría. Tecnología digital.

Abstract: In the context of the increasingly widespread presence of Dynamic Geometry Environments in mathematics classrooms in many countries, it was proposed to identify and classify the mathematical practices that secondary school students develop with a Dynamic Geometry System in class to resolve problems about congruence of triangles via geometrical transformations. This article presents the identification and classification of the repertoire of mathematical practices using GeoGebra of one of the cases analyzed in a public technical secondary school in Argentine. In this study a qualitative methodological perspective was used by means of a multiple-case study. The results help to understanding the teaching and learning processes of geometry mediated with Dynamic Geometry System, in particular from the recognition of the mathematical practices developed in tasks about a geometric concept that is defined as geometric transformation.

Keywords: Mathematics teaching. Geometry. Digital technology.

Resumo: No contexto da presença cada vez mais difundida de Ambientes de Geometria Dinâmica em salas de aula de matemática em muitos países, propôs-se identificar e classificar as práticas matemáticas desenvolvidas por alunos do ensino médio, com um Sistema de Geometria Dinâmica em sala de aula, para resolver problemas de congruência de triângulos via transformações geométricas. É apresentada a identificação e classificação do repertório de práticas matemáticas com o GeoGebra de um dos casos analisados em uma escola técnica secundária pública da Argentina. Foi utilizada uma perspectiva metodológica qualitativa por meio do estudo de casos múltiplos. Os resultados contribuem para a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem da geometria mediados com Sistema de Geometria Dinâmica, em particular a partir do reconhecimento das práticas matemáticas desenvolvidas na resolução de tarefas sobre um conceito geométrico que se define como transformação geométrica.

Palavras-chave: Ensino de matemática. Geometria. Tecnologia digital.

Recebido em
21/02/2023
Aceito em
11/04/2023

INTRODUCCIÓN

En tiempos de reformas educativas, motivadas por la revolución que las Tecnologías Digitales de la Información y la Comunicación han provocado en los sistemas educativos, el uso de las herramientas de Sistema de Geometría Dinámica (SGD) para la enseñanza de la geometría escolar es cada vez más frecuente en las aulas. Desde 2010 las aulas del nivel secundario en la República Argentina están dotadas de *netbooks* para cada alumno gracias al Programa Nacional de inclusión digital a gran escala. Proyectos de implementación de tecnologías digitales a gran escala han provocado en las aulas de clase de matemáticas la presencia de herramientas basadas en el computador, así como también un incremento de estudios preocupados por el uso de tecnologías digitales en Educación Matemática (Sinclair *et al*., 2010). Drijvers *et al*. (2010) afirman que en los contextos de aprendizaje de las matemáticas que resultan de la integración de la tecnología, emerge una nueva ecología del aprendizaje y por lo tanto se producen nuevas prácticas matemáticas a raíz del potencial de los recientes desarrollos en tecnologías dinámicas. También es posible afirmar que se repotencian o modifican otras prácticas como se describe en el párrafo siguiente para el caso particular de la geometría.

Particularmente para la geometría, dicha ecología es el resultado de la integración de la tecnología dinámica digital en el contexto de aprendizaje de la geometría, y está caracterizada por el tipo de interacciones que se dan entre alumnos, profesores, tareas y tecnologías. Tales interacciones están mediadas principalmente por los Ambientes de Geometría Dinámica (AGD). La visualización, en tanto proceso cognitivo que permite obtener conclusiones de un objeto geométrico a partir de su representación y exploración heurística, es una de las prácticas matemáticas que se ve repotenciada porque recibe mayor impulso del aspecto dinámico que introduce este tipo de herramientas. Olive y Makar (2010) establecen que la introducción de los AGD en el aula hace que cambie la preponderancia de la demostración dando entrada a otras prácticas como explorar, conjeturar, validar, modelar, deducir y construir, y que el arrastre, quizá la más obvia y la más nueva práctica que el AGD hizo posible, está en relación con aspectos cognitivos del aprendizaje de la geometría como esas otras prácticas. Arzarello (2001) afirma que la medida en un AGD también es una práctica matemática de tipo práctica física, así como el arrastre, propias de la geometría dinámica. Este aspecto junto con las modalidades de arrastre (Olivero, 1999), parecería dar lugar a otro tipo de prácticas matemáticas como justificar y argumentar.

En los trabajos de los autores citados, hay alusión a distintas prácticas, algunas nuevas, otras repotenciadas y otras modificadas, todas posibilitadas por la introducción de los AGD en el aula, pero no se encargan de definir, identificar y clasificar sistemáticamente cuáles son las prácticas que efectivamente desarrollan los alumnos en la resolución de problemas en temas específicos de la geometría usando un SGD. Es justamente la respuesta a ese interrogante lo que generó interés de investigar, para definir el concepto de práctica matemática y a través de él lograr mayor comprensión de las acciones que realiza un estudiante cuando desarrolla una actividad en la que implica conocimiento geométrico en un escenario de tipo AGD. Por ello la investigación es un estudio inicial y descriptivo. Particularmente el interés fue determinar cuáles son las prácticas matemáticas que desarrollan alumnos de secundaria de una escuela pública, que usan el SGD en clase para resolver un problema abierto sobre congruencia de triángulos vía transformaciones geométricas. Se entiende por problema abierto, en el caso de la congruencia, una tarea no tradicional rutinaria de usar los criterios de congruencia para comprobarla, sino que implica que el estudiante elabore una construcción geométrica de su propia inventiva sobre una figura dada, con la cual deba hacer un proceso de exploración para poder dar respuesta a la pregunta del problema. En el presente artículo, se expone el repertorio de prácticas matemáticas con SGD que desarrolla uno de los alumnos que compone el conjunto de casos estudiados, elegido por la riqueza que provee para el análisis su actividad de resolución del problema en comparación con los otros.

PRÁCTICA MATEMÁTICA DESDE EL ENFOQUE ERGONÓMICO CON SGD

En la línea de estudios sobre la génesis instrumental y su relación con la construcción de conocimientos (Hollebrands *et al*., 2007), se estudian las prácticas matemáticas desde la dimensión de instrumentalización de la génesis instrumental (Rabardel, 1995). Esto es, dado que esta se produce por la relación bilateral que se establece entre el artefacto y el sujeto que lo usa, se estudia uno de los procesos de la instrumentalización. Por ello, la investigación se sitúa en el Enfoque Ergonómico (Rabardel, 1995) de la Aproximación Instrumental (Autor, 2014). Se alude específicamente a las ideas de este enfoque para caracterizar el concepto de práctica matemática con SGD, mostrando cómo está relacionado con una de las dos dimensiones de la génesis en una suerte de tejido de relaciones teóricas desde una perspectiva didáctica.

Desde el enfoque ergonómico se asume que el uso que hace un alumno de un SGD en la clase de matemáticas es una actividad instrumentada de aprendizaje en la cual subyacen las prácticas matemáticas. Las acciones que realiza el alumno en dicho uso son instrumentadas si emplea el SGD y no instrumentadas en caso contrario. De esta manera, el alumno se relaciona con el SGD a través de una génesis instrumental caracterizada por dos dimensiones: la instrumentación y la instrumentalización. La actividad de uso de un SGD implica por un lado, condicionamientos para el actuar del alumno derivados del software, como por ejemplo, cuando quiere mover un objeto para analizar la relación que tiene con otro pero si es un objeto que está fijo tendrá que pensar en otras maneras de hacerlo, esto constituye un ejemplo de un proceso correspondiente a la instrumentación. Por otro lado, dicha actividad implica acciones del alumno sobre el software como manipular objetos geométricos a través de herramientas del mismo de acuerdo con su razonamiento, lo que constituye un ejemplo de un proceso correspondiente a la instrumentalización. Esta última dimensión que involucra los procesos que van del alumno al SGD, permite reconocer a las prácticas matemáticas con SGD y es en la que centramos la mirada en el análisis.

Esto es, dada la génesis instrumental del alumno por la relación bilateral que se establece entre él y el SGD, la observación se centró en su dimensión de instrumentalización a través de identificar los procesos que ocurren en ella, específicamente las prácticas desarrolladas por el alumno a través de los esquemas de utilización. En este marco, la congruencia de triángulos desarrollada vía transformaciones geométricas, como una transformación isométrica (traslación, rotación, reflexión central o axial), se abordó conceptualmente en la investigación como contenido matemático para la actividad instrumentada de aprendizaje.

Se denomina práctica matemática con SGD (siguiendo a Arzarello, 2001; Ball, 2002; Leung *et al*., 2006; Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2006; Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2008; y Olive y Makar, 2010) como (Autor, 2019): el repertorio de acciones deliberadas que desarrolla un alumno dentro de su actividad instrumentada de aprendizaje, para resolver una tarea con el uso del SGD como tecnología de tipo dinámico y la geometría dinámica como sistema particular de conocimiento. Las prácticas se conforman por acciones que son recurrentes y constan de tres componentes: a) artefacto que corresponde al SGD; b) conocimientos geométricos; y c) habilidades, modos en que el alumno usa sus capacidades visual, manual y cognitiva para aplicar los conocimientos que son puestos en juego en la resolución del problema. En el componente b se trata del conocimiento puesto de manifiesto *in situ* por quien realiza la práctica a través del recuento que hace de su proceso de resolución de la tarea.

De acuerdo con la intencionalidad del alumno en el momento de realizar la práctica matemática con SGD y a la presencia o ausencia de cada uno de sus tres componentes, se distingue en ella tres niveles y dentro de cada nivel diferentes tipos (Autor, 2019): Nivel 1. Práctica técnicamente pura: permite ver solo el componente artefacto y no incluye ningún tipo de reflexión sobre la acción. Tipos: Arrastrar, Medir, activar rastro, ocultar/exponer, trazar, zoom y transferir medidas; Nivel 2. Práctica analítica: permite ver solo el componente conocimiento geométrico, en la que hay un esbozo de reflexión y su utilización tiene una intencionalidad dudosa. Tipos:

conjeturar, argumentar, visualizar, sistematizar información, justificar y explorar; Nivel 3. Práctica técnico-analítica: permite ver los tres componentes, por ello están constituidas por una combinación de tipos de práctica de los niveles 1 y 2 que se desarrollan conjuntamente.

MÉTODO

Según el objeto de investigación y ante la falta de antecedentes investigativos en el contexto local del trabajo, la investigación se inscribió en una modalidad exploratoria (Sánchez Gamboa, 1989, citado en Fiorentini y Lorenzato, 2010). Dada la naturaleza del objeto a investigar el trabajo se orientó metodológicamente desde una perspectiva cualitativa adoptando la modalidad de estudio de casos múltiples (Stake, 1995), esencialmente descriptivo.

La experiencia se desarrolló en un curso de 3er año de una escuela secundaria pública de orientación técnica ubicada en el ámbito urbano de una localidad del interior de la República Argentina, con 19 alumnos (14-15 años), 4 horas semanales de clase de Matemática y cada alumno con una *netbook* que tenía GeoGebra en su versión 3.2. Fue a partir de la motivación de la profesora titular que se desarrolló el estudio, ella compartía con sus colegas la intención de elaborar e implementar un desarrollo curricular en geometría con el uso del SGD. Se decidió elegir solamente tres alumnos-casos, lo que permitió hacer un estudio inicial y no manejar un gran volumen de información en el análisis.

Fueron dos los criterios principales para la elección de casos acordados entre profesora e investigador: la habilidad para comunicar oralmente el trabajo matemático y el desempeño académico en la clase de matemáticas. Para este último se consideraron tres niveles: alto para un alumno con un rendimiento académico sobresaliente en matemáticas y hábil en el dominio de conceptos matemáticos; medio para un alumno de un rendimiento académico promedio en matemáticas; y bajo para un alumno con rendimiento académico insuficiente al que le cuesta el trabajo en matemáticas y no es muy hábil en el dominio de conceptos matemáticos. En la determinación de estos tres niveles lo que importaba era el carácter único y específico de los mismos, a partir del supuesto que el rendimiento académico podía ser un factor determinante o de fuerte influencia para la presencia o uso de prácticas matemáticas.

Los casos elegidos corresponden a Romina, Gaby y Guillermo quienes voluntariamente decidieron participar en el estudio. Los dos primeros con un nivel medio de desempeño académico y el último con nivel alto. No se incluyó un alumno con un nivel bajo de desempeño dado que Fabricio, el alumno elegido inicialmente, decidió no continuar con el contrato y los otros alumnos con dicho nivel no quisieron participar en la investigación.

El contenido de enseñanza de la geometría elegido para el análisis fue la congruencia de triángulos como transformación geométrica en el plano (Escudero 2003a, 2003b, 2005) porque: 1) está presente en la reforma curricular (Ministerio de Educación, 2007) vigente en la provincia a la que pertenece la escuela donde se realizó el estudio, al referirse al uso del concepto de función para definir la congruencia en el eje de geometría, 2) es un tema que vincula conocimientos previos que tiene el alumno y 3) la perspectiva de transformación geométrica en entornos de geometría dinámica supera la perspectiva intrafigural en la que se basan otros investigadores (Autor, 2007).

El diseño de la actividad para el aula fue realizado en colaboración con la profesora sobre la base de una propuesta previa del investigador que contemplaba actividades iniciales y experimentales de acuerdo con la modificación a la planificación para el segundo trimestre académico, tiempo concedido para el desarrollo del trabajo de campo. Dicha modificación se hizo necesaria por el bajo nivel de conocimientos geométricos de los alumnos y por falta de experiencia en el uso de GeoGebra. Se acordó con la profesora que: la intervención del investigador en el aula sería como observador no participante y ayudante en la logística de la utilización de los recursos tecnológicos durante todas las clases; las clases se desarrollarían en la modalidad de taller con el uso del proyector para mostrar la pantalla de la computadora de la profesora y la de los alumnos que así lo desearan; que se usaría la plataforma

Dropbox para intercambiar los archivos de las actividades entre alumno, profesora e investigador; que del software GeoGebra se usaría solo la ventana gráfica sin acceso a la ventana algebraica ni a la barra de entrada, y que la configuración de la barra de herramientas del programa sería personalizada, incluyendo solo aquellas herramientas que estén relacionadas con geometría básica sin coordenadas.

La actividad de congruencia (figura 1) fue dada a cada alumno en un archivo GeoGebra, previamente se introdujo la siguiente definición de congruencia: Dos triángulos ΔABC y ΔXYZ son congruentes si y sólo si existe una isometría que transforma ΔABC en ΔXYZ.

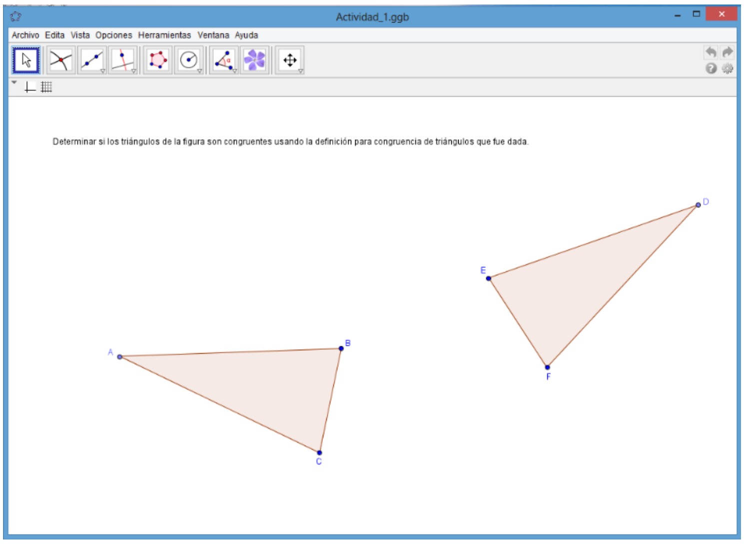

Figura 1. Captura de pantalla del archivo GeoGebra de la actividad de congruencia.

Fuente: Autor (2019, p.151).

Los distintos instrumentos y medios de recolección de información, complementarios entre sí, fueron utilizados en diferentes momentos de la fase de trabajo de campo: previo, durante y posterior al trabajo en aula. La intención de complementariedad entre los instrumentos diseñados se ilustra en la figura 2 a través de la dirección de las flechas, la información que se obtiene del instrumento hacia el que apunta la flecha es complementada por la del que está en su origen, cuando la flecha es de doble dirección se asume que hay mutua complementariedad.

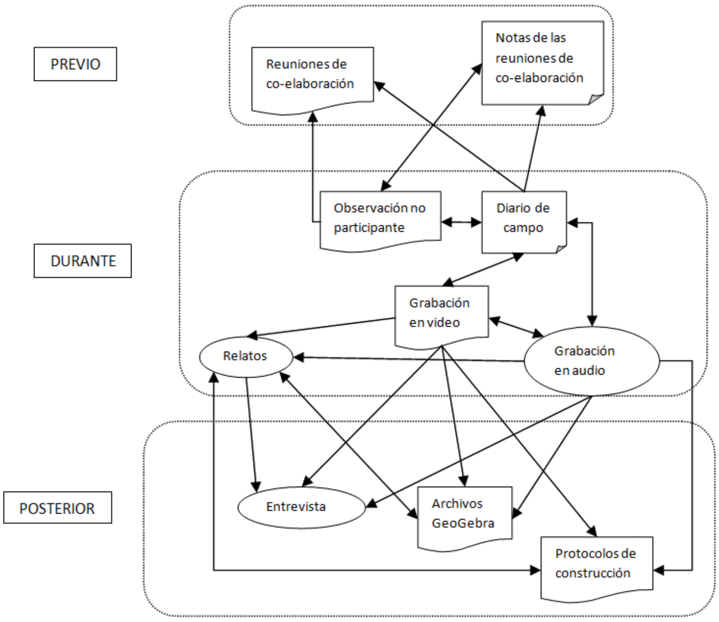

Figura 2. Complementariedad de los instrumentos de recolección de datos.

Fuente: Autor (2019, p.137).

Se usaron el registro en video y audio como medios principales de recolección de información en el aula. En total se usaron seis (6) dispositivos de recolección de datos en el ambiente del aula: una cámara de video y una grabadora de audio por cada alumno participante a la investigación. La cámara enfocaba la pantalla de la *netbook* y la grabadora, ubicada en la mesa de trabajo, registraba el audio.

ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD INSTRUMENTADA

El análisis de los casos consistió en identificar las acciones deliberadas que realizó el alumno en su actividad instrumentada de aprendizaje para resolver el problema (figura 1), primero las acciones instrumentadas y luego las no instrumentadas. De cada acción se determinó la intención del alumno al realizarla y los componentes (artefacto, conocimientos o habilidades) presentes en ella. Ello sirvió para poder distinguir si tal acción correspondía a uno de los 3 niveles de práctica, y en caso afirmativo la denominamos situación susceptible de ser práctica matemática del nivel correspondiente, dado que las prácticas se conforman por acciones que son recurrentes. Finalmente, determinamos el tipo de práctica al que correspondía cada situación susceptible. Enseguida presentamos el caso Gaby.

Gaby presentaba un nivel medio de desempeño académico y una gran facilidad para comunicar oralmente su trabajo matemático, mostraba interés por la materia y motivación para el uso de la herramienta de software en la clase. La actividad instrumentada de Gaby para resolver el problema se inició con la consulta del material teórico dado para el tema de reflexión, este consistía en una breve explicación de la reflexión como transformación geométrica, su definición y el procedimiento en GeoGebra para aplicarla a un punto. Gaby discierne sobre el tipo de simetría que tienen dos triángulos según cuál es el tipo de reflexión que se aplique. Luego ella expresó -"¿Sabés con qué lo vamos a hacer? con líneas paralelas", de lo que se puede deducir que iba a hacerlo mediante traslación. Trazó 5 rectas paralelas a distintos lados de los triángulos y obtuvo el ΔHGF (figura 3a), de cada triángulo midió el ángulo opuesto al lado menor y al darse cuenta que el del ΔHGF es diferente a los de los otros dos triángulos, intentó modificarlo arrastrando el punto H pero no pudo porque se trata de un objeto dependiente. Borró los objetos construidos y trazó rectas paralelas a los lados del ΔABC y obtuvo el $\Delta ABA'$ (figura 3b) que sin trazarlo lo reconoció como congruente al ΔABC, trazó dos circunferencias y determinó la intersección de una con dos de las rectas paralelas trazadas y consultó el material teórico de reflexión en la sección de congruencia.

La actividad de congruencia (figura 1) fue dada a cada alumno en un archivo GeoGebra, previamente se introdujo la siguiente definición de congruencia: Dos triángulos ΔABC y ΔXYZ son congruentes si y sólo si existe una isometría que transforma ΔABC en ΔXYZ.

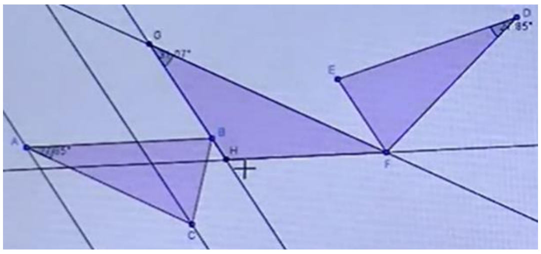

Figura 3a. ΔHGF.

Fuente: Elaboración propia.

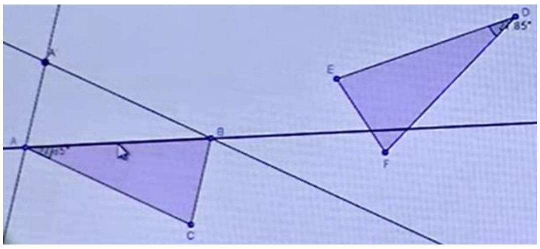

Figura 3b. $\Delta ABA'$.

Fuente: Elaboración propia.

A partir de ello Gaby imaginó una línea no existente que podría usar, borró las circunferencias trazadas y trazó otras tres, dos rectas paralelas y un segmento, así obtuvo el ΔGHI (figura 4a) y midió su ángulo con vértice en G, finalmente verificó que el triángulo no es congruente con el ΔABC ni con el ΔDEF. Gaby le dijo a la profesora que el triángulo obtenido no le quedaba igual y aseguró que lo había hecho por traslación al decir -"Sí, hicimos las paralelas y a través de las paralelas fuimos trasladando". Luego la profesora le explicó cómo debía hacer la traslación y la alumna pudo reconocer qué es lo que realmente estaba haciendo cuando dijo -"No teníamos idea entonces agarramos y empezamos a trazar paralelas hasta encontrar algo y pensábamos que si trazábamos paralelas íbamos a encontrar un punto en la cual alguna se una". Luego Gaby, después de recibir orientaciones de la profesora, trasladó el ΔABC según el vector BE trazando algunas rectas paralelas y circunferencias, obteniendo el $\Delta GA'J$ (figura 4b).

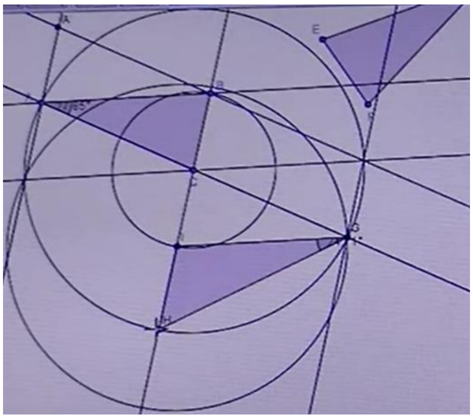

Figura 4a. ΔGHI.

Fuente: Elaboración propia.

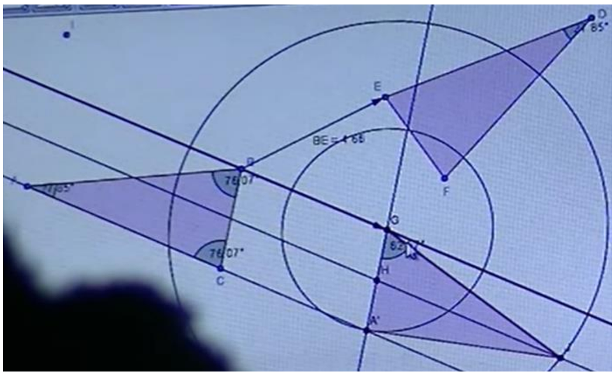

Figura 4b. $\Delta GA'J$.

Fuente: Elaboración propia.

La profesora conversó con Gaby acerca de la construcción y la guio para corregir la traslación de los puntos A y C según el vector BG, así obtuvo el $\Delta A'B'C'$ (figura 5), que es el único triángulo producido de manera correcta según los procedimientos estudiados en la clase y con el que Gaby pudo continuar su proceso de resolución del problema.

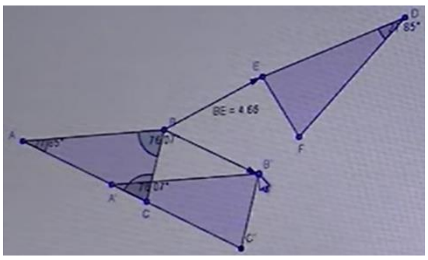

Figura 5. $\Delta \boldsymbol{A'B'C'}$.

Fuente: Elaboración propia.

La manera como ha procedido Gaby deja ver que no tenía un plan previamente elaborado, obró en función de la transformación que decidió aplicar (traslación) e hizo 4 intentos distintos, pero en ninguno consiguió aplicarla correctamente. A partir de estos elementos parece claro que el modo de actuar de Gaby fue exploratorio, idea que se refuerza por lo que dijo en uno de sus relatos durante la resolución -"O sea, tenemos que buscar si tiene una rotación, si tiene una traslación y si tiene una reflexión". Todo el desarrollo de su actividad fue en una actitud de búsqueda en la que empleó reiteradamente una estrategia que vale la pena resaltar: determinó una circunferencia con la herramienta compás a partir de una distancia en la construcción, y la arrastró, sin fijarla en ningún punto, para comprobar igualdad de distancias entre el triángulo origen y su imagen.

Gaby continuó la resolución del problema con lo que se puede llamar "la búsqueda de la siguiente figura". A partir del $\Delta \mathrm{A'B'C'}$ ella inició la búsqueda de su imagen trazando un vector $B'E$, tal como lo expresa en la entrevista al preguntarle -"¿qué pretendías con ese nuevo vector?" ella dijo -"pararme en un punto y la distancia… sobre ese vector trasladarla a una forma externa de la figura en la cual me pueda permitir poder encontrar el siguiente…, seguir encontrando la siguiente figura EDF". Continuó la búsqueda de los puntos de la "siguiente figura" a través del trazo de circunferencias con distintos radios tomados de los lados de los triángulos, tal como lo expresa en la entrevista para esta parte de la construcción, como respuesta a la pregunta -¿A qué correspondían tantas pruebas con el compás?, ella dijo -"Teníamos que tener, había un punto, que en este caso era ese el punto B, que yo me tenía que parar en ese punto e ir encontrando los puntos de la otra figura…". Esta respuesta pone en evidencia que Gaby insistía en hacer traslación, pero en la clase la profesora le aclaró que no sólo es traslación dado el tipo de movimiento que necesita aplicarle al $\Delta A'B'C'$ respecto de la orientación que tiene el ΔDEF en el vértice D, entonces Gaby decidió hacer reflexión y consultó nuevamente el material teórico de reflexión en los títulos congruencia, reflexión central y reflexión axial. Luego trazó dos circunferencias de radio BA, enseguida borró una, después trazó una recta paralela al vector BE que también la borró prontamente. Luego trazó dos circunferencias con radios BC y AC y llamó a la profesora quien le explicó los errores de su construcción (figura 6) y cuál sería el efecto de aplicar traslación, rotación o reflexión al $\Delta A'B'C'$ a través de figuras que trazó en el pizarrón del aula.

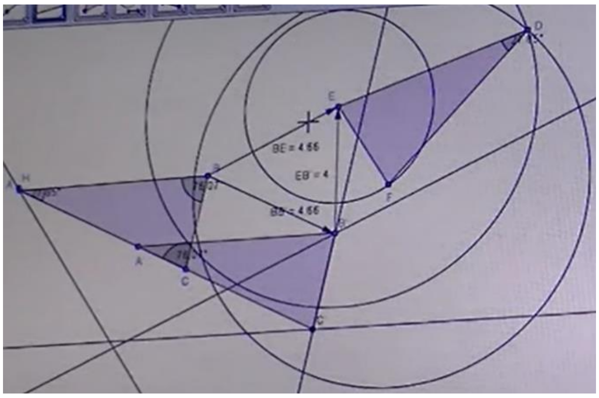

Figura 6. Trazo de dos circunferencias con radios BC y AC.

Fuente: Elaboración propia.

Gaby decidió trasladar el $\Delta A'B'C'$ según el vector $B'E$ y usó la estrategia con la herramienta compás (figura 7), trazó tres semirrectas, una por cada lado del ΔABC, y dos rectas paralelas a lados del mismo (figura 8a) pero las borró dejando solo una de las semirrectas. En el relato de ese momento Gaby dijo -“acá me estanqué”, lo que lleva a pensar que ella no tenía un plan determinado y que su modo de resolver el problema era errático.

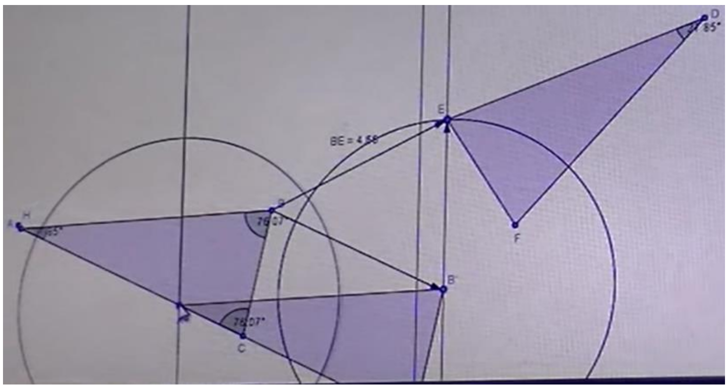

Figura 7. Construcción para trasladar el $\Delta A'B'C'$ según el vector $B'E$.

Fuente: Elaboración propia.

Luego, Gaby trazó dos rectas paralelas a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del ΔABC y el punto H en su intersección y obtuvo el ΔBCH, posteriormente trazó una circunferencia de radio AB y centro en H, y sus intersecciones I y J con las dos paralelas, así obtuvo el ΔHIJ y midió su ángulo con vértice en J (figura 8b).

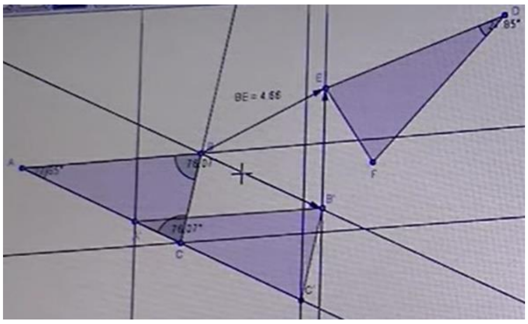

Figura 8a. Semirrectas y rectas paralelas a lados del ΔABC.

Fuente: Elaboración propia.

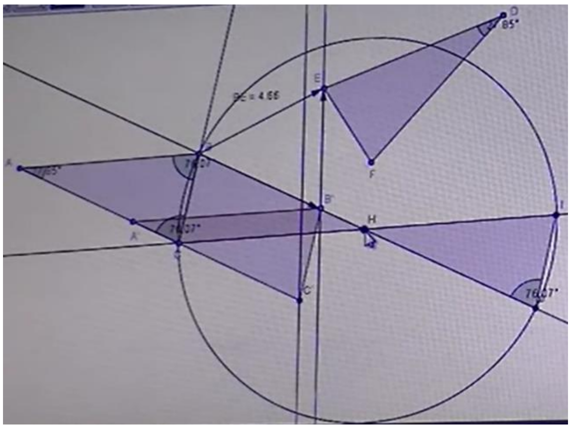

Figura 8b. ΔHIJ y medida de su ángulo con vértice en J.

Fuente: Elaboración propia.

En el relato, al preguntarle qué transformación o combinación de transformaciones iba a seguir para ir del $\Delta A'B'C'$ o el ΔBCH al ΔDEF, ella respondió con duda la reflexión, pero que primero debería hacer el vector, con lo cual se puede interpretar que pensó seguir haciendo una traslación aun cuando había afirmado que era una reflexión. La profesora se acercó y Gaby le contó que obtuvo el ΔHIJ por reflexión con paralelas, la profesora preguntó -"¿Cómo hiciste esas reflexiones así? -¿Qué hiciste para que queden ahí?" y Gaby respondió -"Hice paralelas (con el índice izquierdo recorre la recta paralela al $\overline{AC}$ que pasa por B, en dirección al punto H) con respecto a esta figura (ΔBCH), a la que está acá (recorre con el índice derecho el contorno del ΔBCH)". Esto permite pensar que si bien Gaby enunció que haría una reflexión, siempre aplicó la traslación para ir encontrando el triángulo transformado por ensayo y error. Se puede apoyar esta interpretación con lo que dice en su relato -"lo que más me marea es cuando tengo que agarrar y trasladar los puntos" porque pone en evidencia que tenía confusión en cómo aplicar el procedimiento de traslación y al intentar varias veces en él ganaba información sobre cómo aplicarlo correctamente. Después trazó una recta paralela al vector BE por H, una paralela a esta por E que borró y luego su intersección K con la circunferencia de centro en H y determinó el ΔHIK (figura 9a). Luego trazó una circunferencia de radio IK y centro en K y determinó el ΔHKL (figura 9b). En ese momento se dio por terminada la clase.

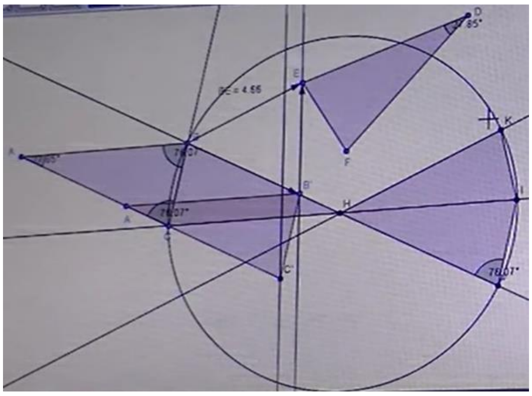

Figura 9a. $\Delta \boldsymbol{HIK}$.

Fuente: Elaboración propia.

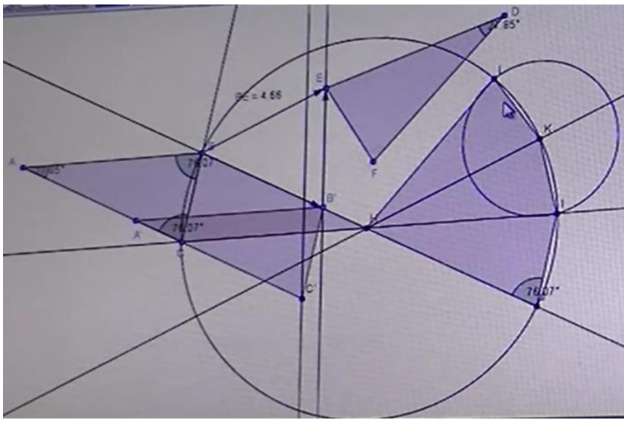

Figura 9b. $\Delta \boldsymbol{HKL}$.

Fuente: Elaboración propia.

Como se pudo ver, el proceso de resolución que Gaby utilizó puede estructurarse en dos grandes momentos, el primero es en el que decide hacerlo a través de una traslación y solo después de 5 intentos logra obtener un $\Delta A'B'C'$ que acepta como imagen por una traslación del ΔABC. Ese hecho es justamente el que marca el fin del primer momento y el inicio del segundo, en el que buscó cómo seguir a partir del $\Delta A'B'C'$. En ese segundo momento, ella realizó 4 intentos a través de los que obtuvo 5 triángulos congruentes al ΔABC pero no logró resolver el problema al no poder encontrar una transformación isométrica que le permitiera transformar el ΔABC en el ΔDEF. Se puede ver que en los distintos intentos Gaby era insistente en la intención de aplicar traslación, pero no lo hacía con el procedimiento estudiado sino solo a través del trazo de rectas paralelas, pero no en todas las veces las trazaba paralelas al vector de traslación sino a lados del ΔABC, aun cuando el vector existía. Ello quiere decir que Gaby realizó varias acciones instrumentadas para trazar rectas paralelas, nuevos puntos, circunferencias y polígonos con la intención de agregar un objeto a la construcción para lograr resolver el problema y en la mayoría de ocasiones eran acciones para las que no reflexionaba en el momento de hacerlas porque luego de obtenerlas las borraba, resultando un intento fallido. Ello hace que tales acciones conformen situaciones susceptibles de ser práctica matemática de nivel 1 del tipo trazar.

La estrategia resaltada en la actitud de búsqueda de Gaby corresponde a una situación susceptible de ser práctica matemática de nivel 1 del tipo arrastrar, porque siempre su intención era verificar igualdad de distancias y contenía solo el componente artefacto en tanto Gaby la ejecutaba de forma mecánica y no reflexionaba al hacerla, solo se restringía a constatar la congruencia en los distintos intentos de resolución. La tabla 1 muestra la cantidad de situaciones de acciones instrumentadas del tipo trazar y arrastrar que fueron las que mayoritariamente empleó Gaby. En el marco de este artículo resulta imposible mostrar en detalle el análisis de esas situaciones.

Las acciones en las que Gaby consultó el material teórico constituyen situaciones susceptibles de ser práctica matemática de nivel 2 en tanto no realizó acciones instrumentadas pero sí cognitivas que corresponden al tipo de práctica explorar, puesto que realizó una actividad investigativa en los enunciados teóricos en busca de aquellos que le permitieran tomar decisiones sobre hacia dónde dirigir la resolución del problema. Con la información que conseguía en esas consultas y en la figura con la estrategia de arrastre con la circunferencia, ella logró establecer pautas para seguir intentando plantear una transformación exitosa. Ello da cuenta de situaciones susceptibles de ser práctica matemática de nivel 2 de tipo visualización, porque generalmente identificaba lugares en el área gráfica en los que decía que debería quedar el triángulo pero éste no existía aún en la construcción, y así establecía qué objetos debería trazar para conseguirlo mediante traslación o reflexión, era su forma de ir construyendo el procedimiento de resolución. Con ello estableció nexos entre la figura de la construcción y su saber previo que le permitieron identificar y aislar elementos de interés por medio de la vista para detectar propiedades no percibidas y hacerlas explícitas.

Es importante mencionar en relación con la acción instrumentada ocultar/exponer, que Gaby desarrolló algunas acciones correspondientes a este tipo de práctica, aunque no de manera voluntaria sino por indicación de la profesora, sin embargo, avanzada la clase ya lo hacía de forma autónoma en algunas ocasiones.

Los varios intentos y la gran cantidad de ensayos y pruebas que realizó Gaby, dejan ver un repertorio nutrido de situaciones susceptibles de ser una práctica matemática de nivel 3, de muy variados tipos y ello reporta una riqueza en la actividad matemática de Gaby que contrasta con su evidente falta de dominio de los conceptos involucrados y la ausencia de un plan para resolver el problema. A ello se suma el hecho que en la reducción de datos aparecieron varias situaciones en las que una de las acciones instrumentadas presentes era cliquear, que no aparecía en los tipos de práctica de nivel 1 pero se aceptó como un nuevo tipo de acción instrumentada para definir tipos de situaciones susceptibles de ser práctica de nivel 3.

RESULTADOS

La determinación de cuáles son las prácticas matemáticas con SGD (PMsgd) que desarrolló el alumno en su actividad instrumentada, se realiza según la recurrencia en el uso de las situaciones de acciones instrumentadas y/o cognitivas susceptibles de ser práctica matemática de cada nivel y tipo. De la reducción de datos del proceso de análisis se obtiene un listado de tales situaciones asociadas al tipo de práctica al que corresponden, que se resumen en la tabla 1 para Gaby. La primera columna indica el nivel y tipo de práctica, la segunda la cantidad de situaciones de acciones instrumentadas y/o cognitivas que desarrolló susceptibles para cada nivel y tipo, y la tercera si es o no una práctica matemática según el criterio de la recurrencia.

Tabla 1

Cuadro resumen del análisis de Gaby.

PMsgd		Cantidad de situaciones susceptibles de cada tipo de práctica	¿Es PMsgd de cada nivel?
Nivel	**Tipo**		
1	Arrastrar	12	Sí
	Medir	4	Sí
	Trazar	19	Sí
	Zoom	ninguna	No
2	Explorar	3	Sí
	Visualizar	9	Sí
	Visualizar-conjeturar.	1	No

	Conjeturar-medir.	1	No
	Conjeturar-arrastrar.	1	No
	Cliquear-visualizar-conjeturar-cliquear-visualizar.	1	No
	Cliquear-visualizar-cliquear-conjeturar-cliquear.	1	No
3	Cliquear-visualizar.	1	No
	Cliquear-visualizar-arrastrar-cliquear.	1	No
	Visualizar-cliquear-visualizar-cliquear.	1	No
	Cliquear-arrastrar-visualizar-cliquear-arrastrar-visualizar-cliquear.	1	No
	Visualizar-conjeturar-cliquear.	1	No
	Visualizar-cliquear.	1	No

Fuente: Autor (2019, pp. 229-230)

La tabla 2 muestra el repertorio de prácticas matemáticas con SGD desarrollado por Gaby. El número entre paréntesis al lado del nombre de cada práctica indica la cantidad de situaciones susceptibles de ser práctica de cada tipo que desarrolló Gaby, que es lo que muestra el carácter recurrente de la misma. Con la información de esta tabla y la del proceso de constitución del cuerpo principal de datos realizado, se llega a los resultados del análisis que enseguida se describen.

Tabla 2

Repertorio de prácticas matemáticas con SGD del caso Gaby.

Prácticas Matemáticas con SGD		
Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Arrastrar (12)	Explorar (3)	
Medir (4)	Visualizar (9)	
Trazar (19)		

Fuente: Elaboración propia

La presencia predominante de las prácticas trazar y visualizar en cada uno de los niveles a los que pertenecen, se corresponde con el modo de actuar de Gaby en su proceso de resolución del problema. Los 9 intentos por medio de los que obtuvo finalmente dos triángulos correctamente transformados, fueron realizados a través del trazo de varios objetos geométricos que pretendían resolver la actividad y se apoyaron en la obtención de información de la figura. Esta obtención fue por medio de la representación dinámica en GeoGebra y su exploración heurística a través de la estrategia resaltada en la actitud de búsqueda de Gaby. Esta última se corresponde con el hecho que la segunda posición mayoritaria de situaciones susceptibles de ser práctica matemática de nivel 1 corresponde al tipo arrastrar.

Suponemos que la práctica medir está presente porque el problema relaciona medidas y que la práctica ocultar/exponer podría estar presente porque ocultar las construcciones auxiliares fue un pedido de la profesora para el trabajo con el software, pero no está presente en Gaby porque realizó la acción de ocultar de forma autónoma solo después que le fuera indicado por la profesora en las distintas ocasiones que la orientó sobre sus construcciones. Respecto de la práctica de nivel 2 visualizar, Gaby la usó como un apoyo a la actividad siendo la base de su modo de proceder.

La escasa aparición de prácticas matemáticas de nivel 2 y la ausencia de prácticas de nivel 3, se debe a la falta de recurrencia en las situaciones susceptibles de ser práctica de cada uno de estos niveles, como lo muestra la tabla 1. Se atribuye esta situación al hecho que los alumnos del curso tenían poca experiencia en el uso del SGD para el desarrollo de actividades de problemas abiertos. La actividad de congruencia era la segunda que desarrollaban de este tipo, la primera fue la actividad de exploración (composición de traslación y rotación) que se dio en el mismo trabajo de campo de la investigación. Otro hecho al que también se atribuye esta situación es la falta de conocimientos y pericia en el manejo del software por parte de Gaby, se pudo ver que inicialmente tenía poco dominio del software, pero a medida que fue avanzando en el desarrollo de la actividad, fue ganando habilidad en el manejo de las herramientas que iba incorporando, mostrando así un avance progresivo en su destreza para el uso del software. Se puede pensar que la creatividad es otro aspecto determinante, un ejemplo que lo evidencia corresponde a algunas situaciones que propuso Gaby para transformar el ΔABC a través de una traslación en la que intuía que la posición del vector debía estar en relación con una recta paralela a los lados de este triángulo. Ella había podido dejar libre el vector para usar el arrastre como una estrategia para encontrar una mejor aproximación a la traslación que le servía. Se puede suponer que no lo hizo porque no había trabajado lo suficiente con el software como para haber probado esta forma de uso y tampoco la había visto hecha por la profesora.

El tipo de situaciones de acciones instrumentadas y cognitivas susceptibles de ser práctica matemática de nivel 3 que aparecieron, dejan ver que la conformación de las prácticas de este nivel es más rica de lo que se había supuesto en el marco conceptual. Se había previsto que estas prácticas iban a estar conformadas por una práctica de nivel 1 y una de nivel 2, pero los resultados de Gaby muestran que las situaciones susceptibles de ser práctica de nivel 3 pueden estar conformadas por una, dos, tres o cinco acciones instrumentales y tres, dos o una acción cognitiva, alguna(s) de las cuales se puede(n) repetir. Esto permite pensar que las prácticas de nivel 3 son más difíciles de rastrear desde la tarea de investigación, más complejas dentro del desarrollo de la actividad instrumentada del alumno y más ricas respecto de la actividad matemática instrumentada por la herramienta de software que supone para el alumno.

DISCUSIÓN

Dos puntos que se consideran centrales en la discusión de resultados se refieren al marco conceptual y a la perspectiva metodológica privilegiados en la investigación. Respecto del primero, se destaca la originalidad del marco de referencia propuesto que permitió lograr dos resultados importantes a nivel conceptual: por un lado, establecer una definición concreta, que hasta ahora no se ha encontrado, del concepto práctica matemática de una actividad de aprendizaje instrumentada con una herramienta de tecnología digital, y por otro lado, haber establecido tal definición desde una perspectiva didáctica. Al respecto se puede establecer haber superado la visión de práctica matemática de Arzarello (2001) y Olivero (1999), concibiendo, también desde un enfoque instrumental desde el marco de la génesis instrumental, una visión más amplia de la misma que distingue sus dos dimensiones, cognitiva y técnica.

En lo que se refiere a la metodología se destaca que la perspectiva cualitativa privilegiada permitió superponer y combinar varias técnicas de recolección de información, lo cual permite verificar la estabilidad de los resultados producidos. Este principio, llamado de triangulación de fuentes, pone en evidencia una postura del investigador que trata activamente de corroborar los resultados del estudio. Es esa postura la que nos posibilitó hacer el análisis de un modo sistemático, riguroso y profundo a fin de identificar progresivamente cada tipo de práctica a partir de sus indicadores. El trabajo realizado permite pensar que se ha superado los análisis que han hecho Arzarello (2001), Olive y Makar (2010), Olivero (1999) y Santos-Trigo y Moreno-Armella (2006), brindando a la comunidad de investigadores una herramienta para abordar metodológicamente una investigación sobre el aprendizaje de la geometría mediado por un SGD, desde el enfoque ergonómico de la aproximación instrumental.

CONCLUSIONES

Como fue mencionado en la introducción, los investigadores de los trabajos citados no se ocuparon en definir, identificar y clasificar sistemáticamente cuáles son las prácticas que efectivamente desarrollan los alumnos en la resolución de problemas abiertos en temas específicos de la geometría usando un SGD. Los resultados de este trabajo aportan en esta línea de investigación que se está empezando a desarrollar y tiene un interesante potencial de desarrollo futuro.

En respuesta al interés de investigación planteado en la introducción, se ha mostrado el repertorio de prácticas de un alumno con un nivel medio de desempeño académico en la clase de matemática. Se ha visto que para el tipo de actividad propuesto se constituyeron PMsgd solamente en los niveles 1 y 2, y para el nivel 3 se desarrollaron varias situaciones susceptibles de ser práctica de este nivel sin que alguna llegara a ser recurrente, situación similar ocurrió para una situación del nivel 2.

La práctica de nivel 1 trazar adquiere relevancia en tanto fue de uso frecuente y constituyó una acción central para el desarrollo del proceso de resolución del caso. La práctica de nivel 1 arrastrar se convirtió en una herramienta de comprobación importante en el modo de proceder de Gaby. La ocurrencia de situaciones susceptibles de ser práctica de nivel 1 ocultar/exponer no se da de forma espontánea aun cuando el uso de la herramienta correspondiente en el SGD se haya establecido en la clase en el contrato didáctico. La visualización y conjeturación son las acciones cognitivas del tipo de prácticas matemáticas de nivel 2, que caracterizan particularmente el modo de actuar de Gaby en su proceso de resolución del problema, son las que tienen mayor presencia en las situaciones susceptibles de ser práctica en los niveles 2 y 3.

El caso estudiado muestra que, para un alumno con un nivel medio de desempeño académico en la clase de matemática y un procedimiento errático de solución del problema, las prácticas de nivel 3 se configurarían mayoritariamente por dos o tres acciones cognitivas y lo mismo de acciones instrumentadas que suceden juntas en una misma situación, de tal suerte que se podría estar hablando de una práctica matemática compuesta de Gaby. Se encontró a la visualización acompañada de la conjeturación mayoritariamente, como una situación cognitiva susceptible de ser práctica matemática con SGD en los niveles 2 y 3. De manera particular se destaca el hecho que Gaby, con un modo de proceder errático, desarrolló un profuso repertorio de situaciones de acciones instrumentadas y cognitivas susceptibles de ser práctica matemática de nivel 3, en el que tres de ellas aparecía la acción instrumentada arrastrar. Este hecho es relevante en tanto supone una actividad matemática del alumno más rica, pues exhibe un dominio más completo y diestro del software y de sus herramientas, y al mismo tiempo un mejor conocimiento geométrico.

Los resultados del análisis del caso Gaby muestran que para las condiciones de implementación de la actividad propuesta son dos las acciones cognitivas presentes: visualización y conjeturación. La aparición de la visualización coincide con el hecho que es el proceso cognitivo mayormente desarrollado en el trabajo con SGD porque recibe mayor impulso de su aspecto dinámico, y que la conjeturación, por el contrario, no es privilegiada de igual manera. Sería interesante que como objetivo de una investigación futura se propusiera indagar cómo promover la aparición de estas acciones cognitivas a través de prácticas en el trabajo con SGD y problemas abiertos.

Podría decirse que, aunque el procedimiento de resolución de Gaby fue errático, hay gran riqueza en su actividad instrumentada de aprendizaje al estar dirigida por las acciones cognitivas visualizar y conjeturar y soportada por las acciones instrumentadas trazar y arrastrar. Desde la perspectiva de la enseñanza, en una mirada “ingenua” o limitada de la actividad instrumentada de Gaby para la resolución del problema, se diría que su desempeño fue deficiente porque no sabía cómo aplicar la traslación que pretendía ya que se equivocó varias veces en ello, aun consultando el material teórico no logró hacerlo correctamente, solo lo pudo hacer cuando la profesora la guio en cómo hacerlo, pero al final no pudo resolver la actividad. Sin embargo, el repertorio de prácticas matemáticas con SGD que desarrolló deja ver que lo que está detrás de ese procedimiento errático es que desarrolló los procesos de visualización y conjeturación apoyados en el trazo y el arrastre, porque tales procesos fueron el motor de su actividad instrumentada de aprendizaje y los desarrollaba haciendo con el software.

Podría haber entonces una relación directa entre la presencia predominante de algún tipo de práctica y el modo de proceder del alumno en el proceso de resolución de la situación problema. La presencia mayoritaria de prácticas de un tipo específico puede dar cuenta del tipo de actividad matemática del alumno (técnica, analítica o técnico-analítica), con lo que se evidenciaría que las acciones en la resolución del problema con el SGD son de distinta naturaleza, no siempre certeras o basadas en conocimiento sino también azarosas o dependientes del artefacto. A partir de ello se podría establecer qué parte de la acción del alumno en la resolución da información sobre su conocimiento del manejo del SGD, su conocimiento geométrico y habilidades. A partir de ello el profesor podría tener herramientas para orientar su proceso de enseñanza, específicamente en lo relacionado con el cómo leer la actividad de uso del SGD del alumno para reconocer la actividad matemática que despliega en el proceso de resolución de un problema, con lo cual tener una mirada más amplia para valorar los aprendizajes y procesos desarrollados, y así no centrarse solo o principalmente en el producto de esa resolución.

REFERENCIAS

Autor. (2007)

Autor. (2014)

Autor. (2019)

Arzarello, F. (2001). Dragging, perceiving and measuring: physical practices and theoretical exactness in Cabri-environments (conferencia plenaria). *Cabriworld 2*. Montreal, Canadá. https://patrickmoisan.net/documents/publications/cw2001/2001/contributions/Arzarello.pdf

Ball, D. (2002). *Mathematical proficiency for all students: toward a strategic research and development program in mathematics education*. RAND Education/Science and Technology Policy Institute. https://www.rand.org/pubs/monograph_reports/MR1643.html

Drijvers, P., Mariotti, M., Olive, J. y Sacristán, A. (2010). Introduction to Section 2. En C. Hoyles y J. B. Lagrange (eds.) *Mathematics education and technology-rethinking the terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 89-132). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_6

Escudero, I. (2003a). *La relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria. La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje* (tesis doctoral no publicada). Universidad de Sevilla.

Escudero, I. (2003b). La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje en la relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica (ponencia). *VII Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática*, Granada, España. https://www.uv.es/angel.gutierrez/aprengeom/archivos2/Escudero03.pdf

Escudero, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 23*(3), 379-392. https://ensciencias.uab.cat/article/view/v23-n3-escudero/1736

Fiorentini, D. y Lorenzato, S. (2010). *Investigación en Educación Matemática: recorridos históricos y metodológicos*. Autores Associados.

Hollebrands, K., Laborde, C. y SträBer, R. (2007). The learning of geometry with technology at the secondary level. En M. K. Heid y G. Blume (eds.), *Handbook of research on technology in the learning and teaching of mathematics: syntheses and perspectives* (pp. 155-205). Information Age Publishing.

Leung, A., Chan, Y. y Lopez-Real, F. (2006). Instrumental genesis in dynamic geometry environments (ponencia). *Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction*. Institute of Technology and Didirem Université Paris 7.

Ministerio de Educación (2007). Transformación de la escuela secundaria. *Gobierno de la Provincia*. Argentina.

Moreno-Armella, L. y Santos-Trigo, M. (2008). Mathematical practices and new potential instructional trajectories in a dynamic environment (ponencia). *11th International Congress on Mathematical Education*, Monterrey, México.

Olive, J. y Makar, K. (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. En C. Hoyles y J. B. Lagrange (eds.), *Mathematics education and technology-rethinking the terrain. The 17th ICMI study* (pp. 133-177). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_8

Olivero, F. (1999). Cabri-Géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations (ponencia). *4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, Plymouth, United Kingdom. https://telearn.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/190190/filename/Olivero_1999.pdf

Rabardel, P. (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos* (M. Acosta, trad). División de publicaciones Universidad Industrial de Santander.

Santos-Trigo, M. y Moreno-Armella, L. (2006). Students' development of mathematical practices based on the use of computational technologies. En C. Hoyles, J. B. Lagrange, L. H. Son y N. Sinclair (eds.), *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction* (pp. 495-502). Hanoi Institute of Technology and Didirem Université Paris 7.

Sinclair, N., Arzarello, F., Trigueros, M., Lozano, M., Dagiene, V., Behrooz, E. y Jackiw, N. (2010). Implementing Digital Technologies at a National Scale. En C. Hoyles y J. B. Lagrange (eds.), *Mathematics education and technology-rethinking the terrain. The 17th ICMI study* (pp. 61-78). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_5

Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Sage Publications.