DOI: 10.30612/tangram.v5i2.14532

Aprendizagem matemática: usando loterias da caixa como metodologia de ensino de análise combinatória e probabilidade

Mathematical learning: using box lotteries as a method of teaching combinatorial analysis and probability

Aprendizaje matemático: usar loterías de caja como método para enseñar análisis combinatorio y probabilidade

Raimundo Luna Neres
Universidade Federal do Maranhão – UFMA (Mestrdo profissional -PARFOR)
Universidade CEUMA – UNICEUMA (Engenharia Civil)
São Luís/MA Brasil
E-mail:raimundolunaneres@gmail.com
Orcid: http://orcid.org/0000-0002-1825-0097

Venâncio Barros Correa
Prof. da rede pública estadual e municipal
Centro Novo do Maranhão, Brasil
E-mail:venanciobc@hotmail.com
Orcid: http://orcid.org/0000-0002-1825-0097

Resumo: Neste artigo teve-se como objetivo analisar dificuldades de aprendizagem em Análise Combinatória e Probabilidade manifestadas por 35 alunos do segundo ano do ensino médio de uma Escola pública do município de Centro Novo do Maranhão – MA. Utilizamos como metodologia de ensino volantes de loterias da Caixa Econômica Federal. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa. Os resultados revelaram que os estudantes apresentam dificuldades em resolução de problemas envolvendo principalmente probabilidade. Assim como, em interpretar os resultados obtidos. Embora, alguns deles tenham demonstrado apropriação dos conteúdos ministrados, mesmo assim, ainda cometiam muitos erros ao resolver os problemas propostos. Muitas das dificuldades dos alunos apontavam para não conhecimentos de conceitos básicos de matemática. No entanto, estes resultados obtidos com o ensino baseado em volantes lotéricos podem ajudar mais significativamente para a aprendizagem dos estudantes.

Palavras-chave: Análise combinatória. Loterias da Caixa. Ensino Médio. Resolução de problemas

Abstract: This article aimed to analyze learning difficulties in Combinatorial analysis and Probability manifested by 35 students of the second year of high school of a public school in the municipality of Centro Novo do Maranhão - MA. We use as methodology of teaching money players of lotteries of Caixa Econômica Federal. This is a qualitative research. The results revealed that students present difficulties in problem solving involving mainly probability. As well as, in interpreting the results obtained. Although some of them demonstrated appropriation of the contents taught, even so, they still made many mistakes in solving the proposed problems. Many of the students' difficulties pointed to non-knowledge of basic concepts of mathematics. However, these results obtained with lottery fly-based teaching can help more significantly for students' learning.

Keywords: Combinatorial analysis. Cashier lotteries. High School. Troubleshooting.

Resumen: En este artículo analizamos las dificultades de aprendizaje en Análisis Combinatorial y Probabilidad manifestadas por 35 estudiantes del segundo año de secundaria de una escuela pública en el municipio de Centro Novo do Maranhão - MA. Utilizamos como metodología didáctica las ruedas de lotería de Caixa Econômica Federal. Esta es una investigación cualitativa. Los datos obtenidos revelaron que los estudiantes presentaban dificultades para resolver problemas que implicaban combinaciones simples y probabilidad, así como en la interpretación de los resultados. Aunque algunos de ellos demostraron conocimiento a la hora de resolver los problemas propuestos, todavía cometieron muchos errores. Observamos que muchas de las dificultades de los estudiantes apuntaban a la no apropiación de conocimientos básicos de matemáticas. Por lo tanto, la enseñanza del análisis combinatorio y la probabilidad con la contribución de "Loterías en Efectivo" puede contribuir significativamente al aprendizaje de estos estudiantes.

Palabras- chave: Análisis combinatorial. Loterías de cajeros. escuela secundaria. Solución de problemas.

Recebido em: 10/04/21
Aceito em: 20/04/2022

INTRODUÇÃO

Neste artigo discutimos o ensino e aprendizagem de análise combinatória e probabilidade utilizando como metodologia de ensino “Loterias da Caixa”, com o intuito de melhorar o desempenho escolar dos estudantes da Escola Pública Estadual “Centro de Ensino Maria do Socorro Almeida Ribeiro” de Centro Novo do Maranhão/ MA, nestes conteúdos, tendo em vista que os índices de aproveitamento escolar dos estudantes do Ensino Médio, em Matemática, dessa cidade do Maranhão, conforme dados divulgados pelo Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), estão abaixo das médias de outros Estados do Brasil, (Ideb, 2018).

A escola tem um papel fundamental no desenvolvimento de competências dos estudantes.(Sturion & Amaral – Schio, 2019) A Educação Matemática nesse contexto, representa um segmento do saber humano essencial para desenvolver essas capacidades.

No percurso da Licenciatura em Matemática normalmente as abordagens teóricas visando a aprendizagem, em geral, são de forma interacionistas, sendo o docente o protagonista da construção do conhecimento dos alunos.

Dessa forma, desenvolver a aprendizagem usando como estratégia metodológica de ensino “Loterias da Caixa”, com o objetivo de melhorar os conhecimentos dos alunos, tornou-se para os pesquisadores um desafio, pois além dos atos de mediação dos docentes com os alunos; seria possível investigar com eles algo diferente e inovador.

Assim, quais seriam as competências que precisaríamos desenvolver com os estudantes para atingir nossos objetivos? Trabalhar com jogos de Loterias motivaria os discentes a desenvolver raciocínio matemático para resolver problemas?

Baseado nesse contexto, nesta pesquisa procurou-se identificar quais as dificuldades que os alunos apresentam, assim como, o que aprenderam em conteúdos tendo como eixo central análise combinatória e probabilidade. E a partir do uso dessa metodologia de ensino - loterias da caixa - refletir sobre a aprendizagem dos alunos.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O Plano Nacional de Educação (PNE), Lei nº. 13.005/2014, de 25 de junho de 2014 é o instrumento de planejamento que nos orienta para a efetivação e o aprimoramento de Políticas Públicas do setor educacional. Com o PNE, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), (Brasil, 2007), passou por modificações construídas como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), (Brasil, 2017) que regulamenta as aprendizagens que são essenciais e que devem ser trabalhadas nas escolas brasileiras públicas e particulares para garantir o direito à aprendizagem e ao desenvolvimento pleno de todos os estudantes.

A Lei nº. 9.394/1996 – LDB, no artigo 35, inciso III, afirma que a Educação Básica terá como uma de suas finalidades o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e a autonomia intelectual e do pensamento crítico, devendo cada componente curricular contribuir na formação desse cidadão (Brasil, 2013).

No entanto, o ensino das matemáticas tem sido, tradicionalmente, na maior parte das escolas, segundo Rosa e Rosa (2005), um ensino voltado para a transmissão de informações através de aulas expositivas utilizando metodologias voltadas apenas para resolver exercícios algébricos, o que nos leva a fazer reflexões para modificação de nossas práticas pedagógicas.

A formação do cidadão passa pela escola. Portanto, ela precisa investir na formação dos jovens, munindo-lhes de condições que possibilitem refletir, interferir e compreender a realidade que os cerca. É importante capacitá-los para que sejam estimulados a discutir sobre os benefícios que uma boa formação escolar pode proporcionar-lhes nos enfrentamentos que a vida nos traz.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM's), (Brasil, 2006), encontramos o que devem ser ministrados no Ensino Médio, dentre elas está elencado análise combinatória e probabilidade. E nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), (Brasil, 2002), está determinado que o estudante precisa se apropriar desses conteúdos pois eles facilitam ao estudante desenvolver sua capacidade cognitiva.

Ensinar a resolver problemas de análise combinatória e probabilidade, por meio de volantes das Loterias da Caixa, permitiu levantar junto aos alunos muitas hipóteses conceituais e procedimentais, e para que alcançássemos nossos objetivos por meio dessa estratégia de ensino, optamos por proceder de forma contextualizada, mesmo quando nos referíamos a problemas relacionados ao senso comum dos alunos e do professor.

Os diversos tipos de problema que enfrentamos diariamente e no meio escolar relativos à Matemática exigem dos alunos, segundo (Pozo & Crespo, 1998 e Lima, Moreira, Vieira & Ortigão, 2020) conhecimento e habilidades diversas, cuja aquisição, normalmente, é advinda das dificuldades de aprendizagem. Portanto, será preciso incentivar os estudantes a buscarem estratégias e o hábito de trabalhar com problemas. Mas, para isso acontecer, cumpre aos professores trabalharem com conteúdo e metodologias atrativas e motivadoras que eles possam usar normalmente.

Em geral, jogar é uma ação praticada pelo homem,

> É uma prática ou distração que normalmente ocorre em alguns casos dentro de determinados parâmetros da sociedade, seguindo regras de livre pensamento, com objetivos aleatórios, mas com um propósito de ganhar. Pode ser acompanhado de apreensão, de sentimento e de tensão. No entanto, acredita estar fazendo algo diferente (Huizinga, 2000, p. 43).

Além disso, pode mobilizar muitos apostadores viciados, seja na esperança de ser sorteado, ou por pura distração. Essa foi a razão de termos escolhido essa metodologia de ensino para incentivar os alunos a aprenderem análise combinatória e probabilidade.

Borin, (2004) e Ferrada, Diaz- Levicoy e Salgado Orellana (2018), levantam hipóteses de que a ação do jogar pode dotar o sujeito de habilidades que promovam o raciocínio lógico. Entretanto, pode tornar o sujeito um dependente do jogo. Além disso, enseja incentivar a criatividade, aumentar a concentração, corroborando de certa forma, se bem utilizada, para a produção de conhecimento Matemático.

Para Lopes (2005), trabalhar com probabilidade na educação básica é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Dessa forma, o ensino dessa componente curricular baseado nessa metodologia de ensino "Loterias da Caixa" para promover conhecimento foi idealizado como um norte para o estudante compreender matemática.

Segundo Cardoso (2007), em análise combinatória e probabilidade ensejamos estudar a formação, a contagem e as propriedades de agrupamentos. Ele afirma ainda que,

> Os agrupamentos são reuniões que podem ser de objetos, pessoas que podem se constituir em elementos dos agrupamentos em estudo. Quando num agrupamento todos os elementos são distintos, é chamado agrupamento simples, quando houver repetição de alguns dos elementos, ele é chamado de agrupamento com repetição. Se forem definidos segundo ao modo de formação, são classificados em: arranjos, permutações e combinações. (Cardoso, 2007, p.35).

No entanto, nesse nível de ensino, não é aconselhável particularizar demais o estudo de Permutação, Arranjo, Combinatória e Probabilidade, pois com esse procedimento pode tolher novas ideias e tornar-se o estudo mais complicado.

O professor deve incentivar o estudante a investigar metodologias que permita resolver muitos problemas e não um truque específico que lhe permita resolver penas um problema.

> Os problemas de combinatória são essencialmente construtivos. Portanto, é importante levarmos os alunos a levantar hipóteses sobre qualquer situação, nunca indicar para o aluno se o problema se refere a permutação, arranjo etc. e sim procurar descobrir o tipo de problema em estudo, (Lima; et al., 2006, p.45).

Segundo Schneider e Saunders (1997), uma abordagem alternativa na fase inicial do ensino, usando-se resolução de problemas, é ministrar as aulas usando uma linguagem que o estudante possa registrar todas as informações passadas pelo docente,

> Uma abordagem inicial para o ensino de resolução de problemas consiste em fornecer ao discente uma linguagem de fácil apreensão e ilustrada. A disponibilidade do professor para dirimir dúvidas também é importante, pois, não só promove bons hábitos como também permite liberdade pessoal do estudante na abordagem de problemas. À medida em que os estudantes progridem, as linguagens ilustradas podem transformar-se num suporte sólido para a introdução gradativa de linguagens simbólicas e de registros semióticos, (Schneider & Saunders, 1997, p.88).

Assim, para promover a aprendizagem dos estudantes é primordial o entendimento e apropriação de conteúdos trabalhados em sala de aula.

De acordo com Branca (1997), toda a Matemática se relaciona com a resolução de problemas. As hipóteses levantadas por Branca devem estar baseadas em objetivos, os quais ele enumera,

> Munir o aluno de uma variedade de estratégias para se apropriar do enunciado para proceder a resolução de problemas. Desenvolver com o estudante a sagacidade para lidar com a resolução de problemas. Desenvolver técnicas para uso de representações semióticas, como uma forma de conseguir novas informações sobre um resultado dado ou obtido. Aprimorar suas habilidades no uso de representações em forma de tabelas, de informações de dadas e deduzidas, para usar na construção da resposta. Levar o discente a uma compreensão melhor de um problema, ensinando-o a fazer estimativas numéricas e testá-las em problemas reais. Dotar o aluno de conhecimento de como testar a sua resposta para saber se o resultado encontrado responde ao problema em estudo, (Branca, 1997, p. 9).

Resolver problemas, portanto, deve ser a razão principal para o estudante que quer aprender Matemática. Esse é um dos processos de aplicação de conhecimentos desenvolvido em novas situações de ensino.

Contudo, um dos mais importantes papeis do professor é auxiliar os seus alunos, para isso, exige confiança de ambas as partes, tempo, e amor pelo que faz.

Segundo Polya (2006) e Garcia – Garcia, Calvário & Arredondo (2018), o estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Se ele for deixado sozinho sem acompanhamento, é provável que não tenha progresso. Entretanto, a ajuda do docente deve ser gradual, pois, se ele ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. Nesse caso, ele deve auxiliar nem demais nem de menos, mas de tal modo que o estudante também trabalhe.

Polya (2006), também levanta a hipótese de que o melhor para ambos é o professor ajudar o aluno com naturalidade, valorizar o ponto de vista do estudante e indicar saídas para ele desenvolver o raciocínio.

PERCURSO METODOLÓGICO

A intervenção foi realizada com 35 alunos do segundo ano do ensino médio na localidade Limão, município de Centro Novo do Maranhão – MA . Os conteúdos de análise combinatória e probabilidade foram ministrados por um dos pesquisadores, sendo 8 aulas expositivas dialogadas e duas de aplicação desses conteúdos trabalhados com duração de 50 minutos cada aula, durante o segundo semestre letivo de 2019. Os alunos foram nominados por: para preservar suas identidades, assim como, facilitar as análises dos dados coletados.

A ministração das aulas foi dialogada e participativa, situação em que os alunos tiravam imediatamente suas dúvidas com os pesquisadores. Segundo Goldenberg (2007), essa mediação entre alunos e pesquisadores é imprescindível para se alcançar os resultados desejados.

Fizemos uma discussão sobre os procedimentos metodológicos que seriam usados, com os alunos, reforçando a importância da participação e da aprendizagem dos conteúdos que seriam trabalhados.

Fiorentini e Lorenzato (2009), levantam hipóteses sobre o que é importante para o pesquisador trabalhar, deve observar os comportamentos espontâneos dos estudantes, principalmente, quando eles estão resolvendo determinada atividade de aula.

A coleta dos dados desta pesquisa ocorreu a partir da primeira aula, em que fizemos uma revisão de conteúdos de matemática básica. Haja vista que, em problemas envolvendo, conteúdos referentes a análise combinatória e probabilidade necessita-se da apropriação de matemática referente aos anos anteriores de estudo escolar.

Nas aulas ministradas utilizando bilhetes das “Loterias da Caixa”, fizemos a combinação de dezenas entre as dezenas contidas nos bilhetes lotéricos. Depois discutimos a resolução de problemas envolvendo o emprego de análise combinatória e probabilidade.

Esta pesquisa foi de caráter qualitativa, pois as análises foram baseadas na interpretação das respostas construídas e apresentadas pelos estudantes. Dessa forma, os pesquisadores mantiveram contato direto com as atividades desenvolvidas em sala de aula pelos alunos onde ocorreu a pesquisa.

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Devido ao grande número de problemas trabalhados em sala de aula, elencamos apenas três, um de autoria dos pesquisadores e os outros dois adaptados dos bilhetes de “Loterias da Caixa”, com o objetivo de mostrar como esta investigação se desenvolveu.

Problema 1:

> O volante de apostas de uma loteria tem 12 números e podem-se jogar de 8 a 10 números. Será sorteado com o prêmio máximo aquele que acertar 8 números.
>
> a) Qual a probabilidade de um apostador ganhar o prêmio máximo, marcando num bilhete exatamente 8 números?
>
> b) E marcando 10 números?

No quadro 1, apresentamos a transcrição dos cálculos realizados pelos alunos , e para encontrar, o evento, o espaço amostral e a probabilidade do apostador ganhar marcando 8 dezenas.

Quadro 1: Resolução do item (a)

a) Como são só 12 números nessa loteria, vamos encontrar o espaço amostral e o evento através da análise combinatória simples. Tem-se:

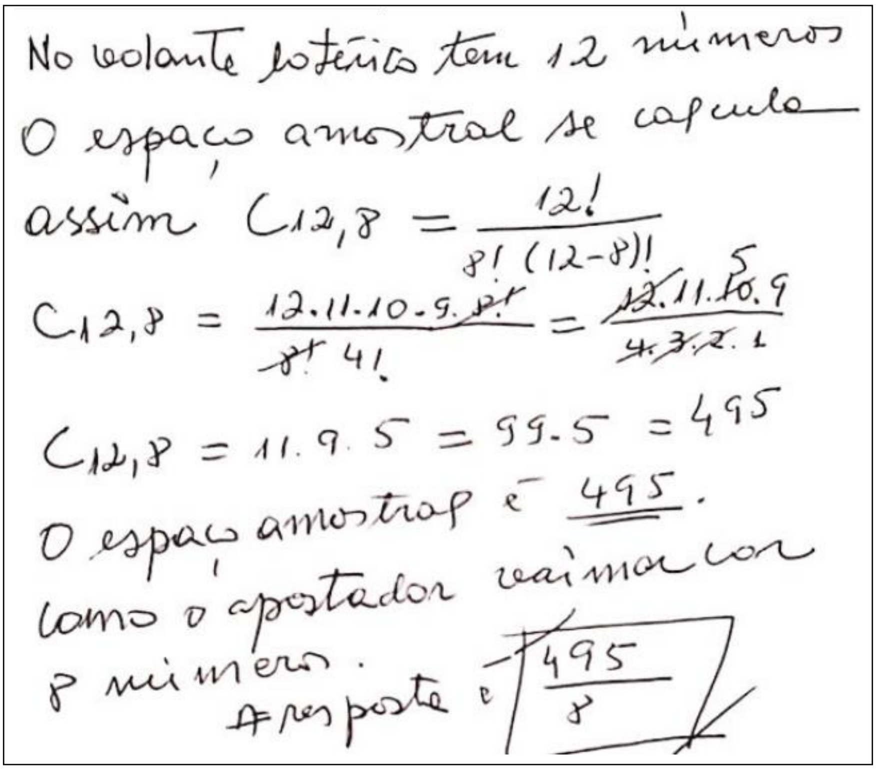
$Evento\ \binom{8}{8} = \frac{8!}{8!(8-8)!} = 1$ e $Espaço\ amostral\ \binom{12}{8} = \frac{12!}{8!(12-8)!} = 495,$

logo a probabilidade de acerto $P(A) = \frac{\binom{8}{8}}{\binom{12}{8}} = \frac{1}{495}$, é a resposta, ou seja: jogando 495 bilhetes tem-se a probabilidade de 1 bilhete ser o premiado.

Fonte: Dados dos pesquisadores. 2019.

Praticamente todos os alunos utilizaram a metodologia discutida nas aulas para resolver ao item (a) do problema 1, ou seja: encontrar a probabilidade de acerto jogando 8 números. Calcularam o espaço amostral, o evento e a probabilidade de acertos utilizando análise combinatória. Entretanto, alguns estudantes demonstraram dificuldades em interpretar corretamente ao que se requeria no item (a) do problema 1. Escolhemos, para apresentar, na figura 1, as soluções de alguns desses alunos: $A_3, A_{15}, A_{21}\ e\ A_{32}$.

Figura 1: Solução apresentada pelos alunos


No volante lotérico tem 12 números
O espaço amostral se calcula
assim $C_{12,8} = \frac{12!}{8!\,(12-8)!}$
$C_{12,8} = \frac{12.11.10.9.\cancel{8!}}{\cancel{8!}\,4!} = \frac{\cancel{12}.11.\overset{5}{\cancel{10}}.9}{\cancel{4}.\cancel{3}.\cancel{2}.1}$
$C_{12,8} = 11.9.5 = 99.5 = 495$
O espaço amostrap é 495.
como o apostador vai marcar 8 números.
A resposta é $\boxed{\frac{495}{8}}$

Fonte: arquivo dos pesquisadores, 2019

Observamos que esses alunos souberam calcular o espaço amostral pedido na opção (a) do problema 1, usando a $C_8^{12} = \binom{12}{8}$ mas, esqueceram ou não identificaram que seria necessaário calcular o evento que seria usado para calcular a probabilidade de acertos jogando 8 números. Consequentemente não conseguiram expressar corretmente a resposta do problema proposto.

Dessa forma, resolver problemas deve ser encarado como um processo de aplicação do conhecimento adquirido, com isso pode-se colocar em prática o que aprendeu nas aulas e discussão em situações de ensino. Assim, a busca por soluções desconhecidas provavelmente se tornará mais exitosa.

No quadro 2, apresentamos a transcrição da solução do item (b) desenvolvida pelos alunos, $A_{13}, A_{28},$ e A_{31}. Convém salientar que estas resoluções foram transcritas dos originais dos alunos.

Quadro 2: : Resolução do item b)

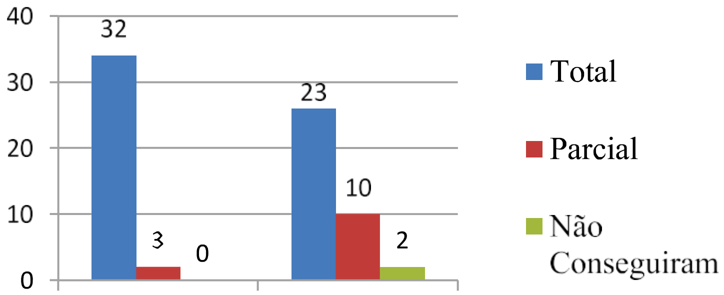
b) Agora, marcando no bilhete 10 números, o evento passa a ser: $C_{10,8}$ e o espaço amostral é o mesmo, ou seja: 495. Logo a resposta é calculada pela P(A) probabilidade de acerto.

$$P(A) = \frac{\binom{10}{8}}{\binom{12}{8}} = \frac{\frac{10!}{8!(10-8)!}}{495} = \frac{1}{11},$$ ou seja, em 11 bilhetes jogados pode-se acertar um bilhete.

Fonte: dados dos pesquisadores, 2019.

Notamos que eles não demonstraram dificuldades para calcular o espaço amostral, assim como, identificar facilmente o que calcular, ou seja, a probabilidade de acertos. Em seguida apresentamos no gráfico 1 o desempenho dos 35 alunos referentes às resoluções apresentadas para os itens (a) e (b).

Gráfico 1: Desempenho dos alunos no problema 1



Fonte: Arquivo dos pesquisadores, 2019.

Os dados no gráfico revelam que 32 alunos, aproximadamente 91%, dos alunos resolveram corretamente o item (a) e 3 alunos não conseguiram resolver parcialmente o item (a) do problema proposto. 23 alunos, aproximadamente 66%, deram a resposta correta para o item (b), 10 alunos resolveram parcialmente e 2 alunos não conseguiram esboçar nenhuma solução. Num olhar holístico das soluções apresentadas pelos estudamos, consideramos que a aprendizagem para esse problema foi satisfatória.

Para os pesquisadores ficou patente que a maioria dos estudantes se apropriaram da metodologia trabalhada em sala de aula. Pois, apenas, 2 estudantes, aproximadamente 6%, não responderam corretamente ao problema proposto. Observamos também no gráfico1, que 8 % tentaram resolver o item (a) e 28% tentaram resolver o item (b). Entretanto, não tiveram sucesso no desenvolvimento das operações matemáticas realizadas para encontrar a resposta correta.

Problema 2:

Problema adaptado. O bilhete da LOTOFÁCIL tem 25 números. Um apostador poderá marcar até 18 números deste bilhete. Para um apostador ganhar o prêmio máximo deve acertar no mínimo 15 números. Se um apostador marcar 16 números, calcule: a) o evento e o espaço amostral; b) a probabilidade do apostar acertar os 15 números.

$A_2, A_5, A_{14}, e\ A_{29}$, esquematizaram o plano de ação para calcular o evento e o espaço amostral. Entretanto, alguns alunos ainda tiveram dúvidas quanto à identificação dos eventos. Então, sugerimos que lessem novamente o material discutido em sala e, se mesmo assim, não entendessem o que estávamos solicitando, poderiam ser ajudados. No quadro 3, apresentamos a resolução dada pelos alunos citados.

Quadro 3: Resposta dos alunos

a) Cálculo do evento $\binom{16}{15} = \frac{16!}{15!(16-15)!}$ =16. E

Cálculo do Espaço amostral $\binom{25}{16} = \frac{25!}{16!(25-16)!} = 2042975$

b) Cálculo da probabilidade $P(A) = \frac{\binom{16}{15}}{\binom{25}{16}} = \frac{16}{2.042.975} \cong \frac{1}{127.686}$.

Portanto, as chances de acerto são de 1 em 127.686 bilhetes jogados.

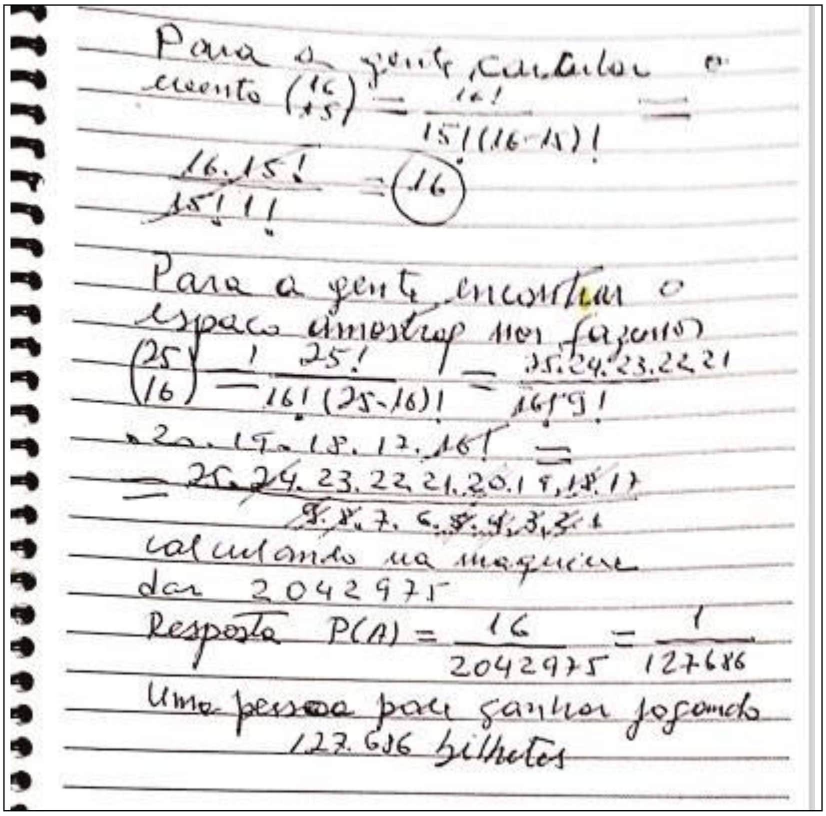
Fonte: dados dos pesquisadores, 2019.

Após a intervenção dos pesquisadores e de relembrar alguns conceitos de análise combinatória trabalhado com eles em sala de aula, inclusive, reforçando para aqueles que não conseguiram fazer o problema 1, observamos que todos tentaram resolver o problema 2. Embora, alguns alunos não tenham conseguido resolver corretamente, mesmo assim, consideramos que o resultado apresentado foi considerado relevante.

Também observamos que mesmo tendo-se feito uma discussão dos conteúdos ministrados e que poderiam ser usados para encontrar a solução do referido problema, mesmo assim, alguns alunos não conseguiram resolver corretamente e chegar à solução.

Na figura 2, apresentamos a solução dos alunos $A_{12}, A_{15}, A_{24}, e\ A_{30}$

Figura 2: Solução apresentada pelos alunos



Para a gente calcular o evento $\binom{16}{15} = \frac{16!}{15!(16-15)!} = \frac{16.15!}{15!1!} = 16$

Para a gente encontrar o espaço amostral nós fazemos $\binom{25}{16} = \frac{25!}{16!(25-16)!} = \frac{25.24.23.22.21.20.19.18.17.16!}{16!9!} = \frac{25.24.23.22.21.20.19.18.17}{9.8.7.6.5.4.3.2.1}$

calculando na máquina dá 2042975

Resposta $P(A) = \frac{16}{2042975} = \frac{1}{127686}$

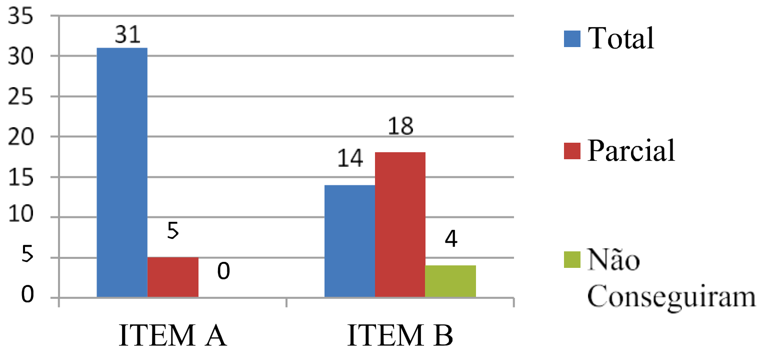
Uma pessoa para ganhar jogando 127.686 bilhetes

Fonte: arquivo dos pesquisadores, 2019

Ouvimos comentários, por parte dos alunos, do tipo: *é muito› difícil ganhar, pois acertar exatamente os números sorteados é pura sorte do apostador.*

No gráfico 2, apresentamos o desempenho dos alunos da classe com referência ao segundo problema.

Gráfico 2: Desempenho dos alunos no problema 2.



Fonte: Arquivo dos pesquisadores, 2019.

O gráfico mostra que os alunos tiveram bom rendimento ao calcular o evento e o espaço amostral do problema proposto, pois 31 alunos, aproximadamente 86%, resolveram corretamente ao item (a) e 5 estudantes tentaram resolver, ou seja: 13% . O gráfico mostra também que 14 alunos resolveram corretamente ao item (b), aproximadamente, 39%, e 18 estudantes tentaram resolver, ou seja: 50% . Apenas, 11% não o conseguiram resolver o item (b) em sua totalidade.

Quanto ao cálculo e interpretação da probabilidade, alguns alunos demonstraram dificuldades de entendimento. Mesmo usando máquina de calcular, acusavam dificuldades em trabalhar com números grandes.

Durante o desenvolvimento das aulas, surgiu a ideia entre os alunos e de pronto aceita pelos pesquisadores que os estudantes fariam uma arrecadação entre eles para fazerem um jogo da Megasena. Incialmente apresentamos um volante da Mega Sena, conforme figura 3, e em seguida sugerimos o problema 3.

Problema 3:

O bilhete da Megasena contém 60 dezenas. Ganha o prêmio principal quem acertar os 6 números sorteados. Se um apostador marcar 8 dezenas, qual a probabilidade de ele ganhar o prêmio máximo?

Figura 3. Volante da Mega Sena

Fonte: Foto de bilhete lotérico, 2019.

Convém registrar que esse problema causou muita curiosidade entre os estudantes, pois todos queriam resolvê-lo. Foi uma euforia total. Como todos queriam verificar a possibilidade de ficarem “ricos”, propusemos que todos deveriam fazer, mas de forma organizada. Nesse dia compareceram 35 alunos, que foram divididos em 7 equipes de cinco alunos, cada uma.

Calcularam o evento e o espaço amostral utilizando análise combinatória simples. De posse desses dados calcularam a probabilidade de acerto.

No quadro 4, apresentamos a resolução dos alunos para o cálculo da probabilidade de acerto por um apostador que jogar 8 dezenas na Mega – Sena. Esta solução é a fiel transcrição dos cálculos feitos pelos alunos.

Quadro 4: Solução apresentada pelos alunos pesquisados

Cálculo do evento $\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!(8-6)!} = \frac{8.7.6!}{6!.2!} = \frac{8.7}{2} = 28.$

Cálculo do Espaço amostral $\binom{60}{8} = \frac{60!}{8!(60-8)!} = \frac{60.59.58.57.56.55.54.53.52!}{(8.7.6.5.4.3.2.1).52!} =$ $2.558.620.845$

$P(A) = \frac{\binom{8}{6}}{\binom{60}{8}} = \frac{28}{2.558.620.845} \cong \frac{1}{91.379.315}$, portanto as chances de acerto são de 1 pessoa ganhar em $91.379.315$ bilhetes jogados.

Fonte: Arquivo dos autores, 2019.

Alguns alunos tiveram dificuldades para trabalhar com números tão grandes, mas como todos estavam imbuídos do mesmo propósito, ajudaram-se. Um fato chamou-nos a atenção: disseram que não iriam jogar, pois as chances de ganhar seriam mínimas. Afirmaram que ganhar na Mega – Sena “é pura sorte do apostador”.

Interrogamos os estudantes se haveria algum fator de proporcionalidade envolvido entre os acertos e a quantidade de números marcadas nos volantes lotéricos. Evidente, “responderam, as chances de se ganhar são maiores quando aumentamos a quantidade de números marcados”.

No decorrer da pesquisa observamos que as maiores dificuldades dos alunos estavam relacionadas a não apropriação de conceitos básicos de matemática. Em função disto, tinham dificuldades em interpretar os problemas envolvendo probabilidade. No entanto, no decorrer da pesquisa procuramos superar estas dificuldades trabalhando com vários tipos de problemas e enfatizando as interpretações necessárias.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A instrução Matemática deve envolver os alunos em atividades de resolução de problemas e análise da resposta encontrada, de tal forma que possa promover o raciocínio matemático, além de permitir abordar outras estratégias de resolução.

Motivar os alunos e ajudá-los a construir novos conhecimentos matemáticos por meio da resolução de problemas, tem sido nas últimas décadas interesse de muitos pesquisadores.

Nesta pesquisa, observamos que quando trabalhamos com problemas que envolviam atividades relacionadas ao cotidiano dos alunos, conseguimos mobilizar mais a classe, a atenção deles aumentava e a aprendizagem se tornava mais consistente.

Procuramos trabalhar com atividades que aguçasse a curiosidade dos alunos para podermos investigar a capacidade de interpretação e habilidades dos estudantes em resolver problemas. Assim, poderíamos construir com eles novos conhecimentos e superar as dificuldades apresentadas.

Acreditamos que o trabalho investigativo realizado com os estudantes estimulou o raciocínio e ajudou a perceberem que muitos acontecimentos do entorno social deles são de fato aleatórios, e que podem ser identificados e mensurados por meio da matemática e da estatística.

Além disso, lhes permitiu analisar, um problema, mais cuidadosamente antes de tentar resolvê-lo. Demonstraram preocupação antes de eleger os dados de uma sentença matemática e de como deveriam selecionar e montar uma estratégia de resolução, de forma a poder desenvolver um raciocínio para chegar à resposta.

Esta pesquisa revelou que grande parte dos participantes se mostraram capazes de trabalhar, com habilidade, a resolução de problemas, o que lhes proporcionou o conhecimento de mais uma metodologia até então desconhecida para eles.

Registramos a participação motivada dos alunos na sala de aula, trabalho colaborativo, com organização, discussão das atividades propostas e desenvolvimento argumentativo. Tais fatos facilitaram aos pesquisadores avaliar seus alunos com outra visão, fazendo mediações quando necessárias sem, contudo, fosse dada uma resolução pronta. Portanto, essa investigação revelou-se exitosa tanto para os alunos quanto para os pesquisadores.

A pesquisa sugere ainda, que este tipo de metodologia empregada pode ser um caminho para o professor organizar sua prática pedagógica com vistas a obter maior sucesso na aprendizagem dos alunos, permitindo, portanto, desenvolver os conteúdos de forma atrativa e que atenda as reais necessidades dos estudantes.

REFERÊNCIAS

Borin, J. (2004). *Jogos e resolução de problemas*: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: CAEM-IME, USP.

Branca, N. A. (1997). Resolução de Problemas como meta, processo e habilidade básica. In: S. Krulik & R. E. Reys (Orgs.), *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar(*pp.4-12). Tradução. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual Editora.

Brasil, (2002). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.* Brasília: MEC/ SEB.

Brasil. (2006). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares Para o Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias***.** Brasília: MEC/SEB.

Brasil, (2013). Ministério da Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica.* Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação integral. Brasília: MEC, SEB, DICEI.

Brasil (2007) - IDEB - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica. Recuperado de: www.inep.gov.br/resultados - 2018.

Brasil, (2020). *Base Nacional Comum Curricular – BCC*: Ensino Médio. Documento homologado pela portaria n. 1570, publicada no D.O.U em 21/12/2017, Seção 1, p. 146. 2017. Recuperado de: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/ .

Cardoso, L. F. (2007). Dicionário de Matemática: edição de bolso. Rio de Janeiro: Lexikon Ed. Digital Ltda.

Ferrada, C., Díaz-Levicoy, D., & Salgado-Orellana, N. (2018). Análisis de actividades sobre educación financiera en libros de texto chilenos de educación primaria. *TANGRAM - Revista De Educação Matemática*, 1(4), 48–65. https://doi.org/10.30612/tangram.v1i4.8854

Fiorentini, D. & Lorenzato, S. (2009). *Investigações em educação matemática:* percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados.

García-García, J. I., López Calvario, C., & Arredondo, E.-H. (2018). Interpretación de una tabla y una gráfica circular por estudiantes de licenciatura. *TANGRAM - Revista De Educação Matemática*, 1(3), 24–39. https://doi.org/10.30612/tangram.v1i3.8298

Goldenberg, M. (2007). *A arte de pesquisar***:** como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. Rio de Janeiro: Record.

Huizinga, J. (2000). *Homo Ludens*: O jogo como elemento da cultura. Perspectiva: São Paulo.

Lei n. 9.394/96 – LDB, de 20 de dezembro de 1996. (1996). Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União. Brasília, DF.

Lei n. 13.005/2014, de 25 de junho de 2014. (2014). Dispõe sobre o Plano Nacional de Educação – PNE. Diário Oficial da União. Brasília, DF.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. & Morgado, A.C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio***.** v.2 – 6. ed. – Rio de Janeiro: SBM.

Lima, P. V. P. de, Moreira, G. E., Vieira, L. B., & Ortigão, M. I. R. (2020). Brasil no Pisa (2003-2018): reflexões no campo da Matemática. *TANGRAM - Revista De Educação Matemática*, 3(2), 03–26. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12122

Lopes, C. E. (2018). O ensino da Estatística e da Probabilidade na educação básica e a formação dos professores**.** *Cadernos Cedes*, 28(74), 57-73.

Polya, G. (2006). *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* Tradução e Adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência.

Pozo, J. I., Crespo, M. A. G. (1998). A solução de problemas nas Ciências da Natureza. In: J.I. Pozo, J. I. (Org.). *A solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender* (pp.67-98). Trad. Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed.

Rosa, C. W. da & Rosa, A. B. da. (2005). Ensino de Física: objetivos e imposições no ensino médio. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, [*s. l.*], 4(1), 35-42.

Schneider, J.; Saunders, K. W. (1997). As linguagens ilustradas na resolução de problemas. In: S. Krulik & R. E. Reys (Orgs.), *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar* (pp.88-98). Trad. Hygino H. Domingues e Olg Corbo. São Paulo: Atual Editora.

Sturion, B. C., & Amaral-Schio, R. B. (2019). BNCC Do Ensino Médio: Um Olhar Sobre Os Conteúdos De Área E Volume Nos Livros Didáticos De Matemática. TANGRAM - Revista De Educação Matemática, 2(3), 88–102. Https://Doi.Org/10.30612/Tangram.V2i3.10441

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

1º autor: conceitualização; curadoria de dados; análise formal; investigação; metodologia; administração do projeto; supervisão; visualização; redação – rascunho original; redação – revisão e edição.

2º autor: conceitualização; curadoria de dados; análise formal; investigação; metodologia; administração do projeto; supervisão; visualização; redação – rascunho original; redação – revisão e edição.