Tangram
Revista de Educação Matemática

DOI: 10.30612/tangram.v5i3.11646

Rigidez triangular: um estudo abordando o uso de material manipulável com o suporte da investigação matemática

Triangular stiffness: a study addressing the use of manipulative with the support of mathematical investigation

Rigidez triangular: um estudio que aborda el uso de material manipulable con el apoyo de la investigación matemática

Hugo Lima Fontenelle Bizerril
Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil,
hugolfbizerril@gmail.com
Orcid: 0000-0001-6077-6036

Mônica Souto da Silva Dias
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense (UFF)
Niterói, Rio de Janeiro, Brasil
msoutodias@gmail.com.
Orcid: 0000-0003-4071-053

Fabiano dos Santos Souza
Faculdade de Educação, Universidade Federal Fluminense (UFF)
Niterói, Rio de Janeiro, Brasil
fabiano_souza@id.uff.br
Orcid: 0000-0002-5474-7009

Resumo: O presente artigo apresenta uma proposta didática elaborada e aplicada no âmbito de atuação do subprojeto de Matemática do Programa Institucional de Residência Pedagógica (PIRP) da Universidade Federal Fluminense (UFF) financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Nesse contexto emergiu a seguinte questão de pesquisa: como a utilização de materiais manipuláveis dinâmicos para a construção e manuseio de estruturas poligonais pode favorecer a compreensão da noção de rigidez do triângulo e relacioná-la com a utilização prática dessa em construções? A experiência didática elaborada para responder tal questão foi implementada com 28 alunos de uma turma de 7° ano. Como metodologia utilizou-se a investigação matemática com o suporte de materiais manipuláveis. Os resultados observados apontam uma efetiva construção do conceito de rigidez triangular por parte dos alunos e as potencialidades de utilizar materiais manipuláveis como suporte para práticas investigativas no ensino de geometria na educação básica.

Palavras-chave: Investigação Matemática. Rigidez triangular. Programa Institucional de Residência pedagógica.

Abstract: This paper presents a didactic proposal elaborated and applied within the scope of the Programa Institucional de Residência Pedagógica (PIRP) Mathematics subproject of Universidade Federal Fluminense (UFF), financed by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). In this context the following research question emerged: how the use of dynamic manipulative materials to construct and handle polygonal structures can favor the understanding of the triangular stiffness notion and relate it to its practical use in constructions? The didactic proposal developed in response was implemented envolving 28 students, from a 7th grade class. As a methodology, mathematical investigation was used with the support of manipulative materials in order to address the concept of triangular stiffness and relate it to its application in everyday life. The observed results point out the potential in using manipulable materials as a support for investigative practices in the geometry teaching in the basic education.

Keywords: Mathematical Investigation. Triangular Stiffness. Programa Institucional de Residência Pedagógica.

Resumen: Este artículo presenta una propuesta didáctica elaborada y aplicada en el ámbito del subproyecto de Matemática del Programa Institucional de Residência Pedagógica (PIRP) de la Universidade Federal Fluminense (UFF) financiado por la Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). En este contexto, surgió la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo puede el uso de materiales manipulables dinámicos para la construcción y manipulación de estructuras poligonales favorecer la comprensión de la noción de rigidez del triángulo y relacionarla con su uso práctico en construcciones? La experiencia didáctica diseñada como respuesta se implementó con 28 estudiantes en una clase de 7mo grado. Como metodología se utilizó la investigación matemática con el apoyo de materiales manipulables. Los resultados observados apuntan una construcción efectiva del concepto de rigidez triangular por los estudiantes y el potencial del uso de materiales manipulables como soporte para prácticas investigativas en la enseñanza de geometría en educación básica.

Palabras clave: Investigación Matemática. Rigidez Triangular. Programa Institucional de Residência pedagógica.

Recebido em

28/04/2022

Aceito em

05/12/2020

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O presente artigo apresenta algumas reflexões sobre uma proposta de abordagem da noção de rigidez triangular, à luz da metodologia de investigação matemática para o ensino de matemática, e da utilização de materiais manipuláveis, aplicada a uma turma de 7° ano.

A proposta emergiu da atuação do residente durante o seu processo de formação inicial no seio da escola básica no âmbito das atividades propostas do subprojeto de Matemática do Programa Institucional de Residência Pedagógica (PIRP) da Universidade Federal Fluminense (UFF) financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) com a professora regente da turma da escola campo parceira do Programa.

O PIRP (BRASIL, 2018) é parte integrante da Política Nacional de Formação de Professores e tem por objetivo induzir o aperfeiçoamento da formação prática nos cursos de licenciatura, promovendo a imersão do licenciando na escola de educação básica, a partir da segunda metade de seu curso. Os objetivos do Programa são: (i) incentivar a formação de docentes em nível superior para a educação básica, conduzindo o licenciando a exercitar de forma ativa a relação entre teoria e prática profissional docente; (ii) promover a adequação dos currículos e propostas pedagógicas dos cursos de licenciatura às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC); (iii) fortalecer e ampliar a relação entre as Instituições de Ensino Superior (IES) e as escolas públicas de educação básica para a formação inicial de professores da educação básica; e (iv) fortalecer o papel das redes de ensino na formação de futuros professores.

Objetivou-se, durante o período de residência desenvolver e pôr em prática propostas envolvendo distintas metodologias de ensino de Matemática de forma a dialogar com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de Matemática. Deste modo, dentre outros temas geométricos, o residente em conjunto com a professora regente e o coordenador de área do PIRP escolheram trabalhar com a noção de rigidez

triangular, listada como habilidade EF07MA25 entre as apontadas para o 7° ano (BRASIL, 2017).

Durante a revisão bibliográfica, observou-se a escassez de trabalhos a respeito do ensino e aprendizagem da noção de rigidez triangular, o que é corroborado por Machado (2016). Após reflexão sobre o tema e tendo em vista sua aplicabilidade prática, optou-se por abordá-lo utilizando a metodologia de investigação matemática por meio do uso de materiais manipuláveis, essa também associada a proposta de atuação no PIRP.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) nos contextos de processos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas sofisticados, mas trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado:

> Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração. (Ponte et al., 2016, p. 10).

O uso de materiais manipuláveis para o ensino de Matemática, defendido por inúmeros educadores desde Montessori, tem ganhado maior notoriedade na área de pesquisa da educação matemática, sendo alvo da busca de professores por seu caráter auxiliador e possivelmente motivador no processo de ensino-aprendizagem, como afirmam Fiorentini e Miorim (1990).

Dentro desta perspectiva, autores como Kaleff (2003) e Lorenzato (2006) dedicam-se à pesquisa sobre uso de materiais manipuláveis para o ensino de matemática, em particular para a geometria, devido ao apelo natural que esta área apresenta com relação ao concreto e as questões que isto implica na escolha de tal abordagem. Kaleff (2003, p. 16) argumenta em favor da potencialidade dos materiais manipuláveis para a aprendizagem da geometria ao afirmar que “ao visualizar objetos

geométricos, o indivíduo passa a ter controle sobre o conjunto das operações básicas mentais exigidas no trato da geometria".

Ainda no campo teórico do uso de materiais manipuláveis, Rêgo e Rêgo (2006) apontam um encaminhamento didático para a utilização de materiais manipuláveis que converge para aquele proposto por Ponte et al. (2016) para uma aula desenvolvida sob um ideal de investigação matemática. Constatada tal ligação buscou-se em Abrantes (1999), integrante do mesmo grupo de pesquisa dos autores portugueses acima citados, uma base teórica para a realização deste trabalho, uma vez que este autor observa também uma ligação existente entre geometria e investigações matemáticas.

Após o exposto elaborou-se a seguinte questão de pesquisa: Como a utilização de materiais manipuláveis dinâmicos para a construção e manuseio de estruturas poligonais pode favorecer a compreensão da noção de rigidez do triângulo e posteriormente relacioná-la à utilização prática dessa em construções?

Para responder a essa questão foram traçados os seguintes objetivos: (i) Verificar se o material possibilita a identificação das características de mobilidade dos polígonos e distinguir o triângulo dos demais polígonos sob esse aspecto e, (ii) Observar de que forma o ensino de geometria de forma investigativa pode relacionar-se com a compreensão, por parte do estudante, do espaço onde vive.

DESENVOLVIMENTO

Investigação Matemática

A concepção de investigação matemática adotada para a elaboração deste trabalho reflete aquela formulada por pesquisadores da Universidade de Lisboa, os quais se destacam especialmente os trabalhos de Ponte et al. (2016) e Abrantes (1999).

Pautando-se por uma perspectiva contemporânea de que aprender matemática é essencialmente fazer matemática, Ponte et al. (2016) propõem aos professores que organizem aulas que coloquem os alunos na posição de investigadores, realizando

experimentações, formulando conjecturas e argumentando em favor ou contra essas. Segundo estes autores “o conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo por isso, uma poderosa metáfora educativa.” (Ponte et al. 2016, p. 21). Tais autores, portanto, propõem uma estrutura dos momentos que compõem uma investigação matemática, de forma a guiar o professor na elaboração e avaliação de uma aula de investigação, como observa-se na tabela 1.

Tabela 1

Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	▪ Reconhecer uma situação problemática ▪ Explorar a situação problemática ▪ Formular questões
Conjecturas	▪ Organizar dados ▪ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	▪ Realizar testes ▪ Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	▪ Justificar uma conjectura ▪ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte et al. ,2016, p. 21

Abrantes (1999) ao tratar a área de geometria sobre uma abordagem investigativa conclui pela ligação natural entre as duas. Segundo ele, a diversidade de objetos e problemas, bem como a ligação que essa área da matemática possui com a realidade evidenciam este potencial de trabalho. O autor destaca ainda, baseado

nas pesquisas realizadas por seu grupo com relação a esse tema, como a adoção de práticas investigativas nas aulas de matemática induziram os alunos se envolverem mais nas aulas e agir de forma mais ativa sobre a construção do seu conhecimento, também desenvolvendo uma concepção de matemática dissociada da ideia de repetição de fórmulas e padrões de resolução, mais voltada para o desenvolvimento do raciocínio, da criatividade e percepção de mundo.

Porém, tanto Abrantes (1999) quanto Ponte et al. (2016), destacam também alguns dos obstáculos atualmente existentes para a integração de uma abordagem investigativa com a prática do professor de matemática.

Como primeiro fator para tal dificuldade, estes autores observam uma grande resistência por parte de alunos nos anos finais de formação e professores, já acostumados com o modelo tradicional de ensino. Os autores evidenciam a existência de uma falta de confiança por parte dos professores para buscar formas alternativas de ensino, que muitas vezes se alia com a confusão por parte dos alunos com relação aos rumos da aula. O segundo fator ressaltado diz respeito a integração com o currículo. Abrantes (1999) e Ponte et al. (2016) destacam que embora as estruturas curriculares dos contextos português e brasileiro permitam incursões pontuais de cunho investigativo as disposições gerais dos documentos oficiais dificultam uma integração plena desta prática, o que segundo os autores podaria o potencial de um trabalho realizado sob esta perspectiva.

Tais observações evidenciam a necessidade de se incentivar durante a formação inicial ou continuada dos professores a busca por meios alternativos de se pensar e comunicar a matemática, dialogando com sua disposição dentro do contexto escolar e cotidiano dos alunos.

Materiais Manipuláveis

O uso de materiais manipuláveis como objetos didáticos na sala de aula possui um longo histórico de desenvolvimento de concepções. Dentro de uma concepção de escola ativa Pestalozzi defendia uma união entre as experiências de ensino e

aprendizagem e as atividades típicas da vivência dos alunos, tais como canto, desenho, jogos e manipulação de objetos (Fiorentini e Miorim, 1990).

Posteriormente, Montessori e Decroly, inspirados por essa concepção, desenvolvem suas visões de aprendizagem ativa direcionadas para a educação matemática. Castelnuovo (1973, apud Fiorentini e Miorim, 1990), ao discutir as ideias desses autores, expõe que a visão de Montessori valorizava mais uma noção de processo construtivo dos conceitos (sintética), enquanto Decroly priorizava que os alunos conseguissem abstrair a partir da observação de fenômenos naturais os elementos relevantes que compunham a totalidade do processo (analítica). A partir de tal exposição, Castelnuovo propõe uma síntese entre as concepções expressas por esses autores, na qual defende que o material concreto deve servir como auxiliar no processo de aprendizagem dos alunos desempenhando a função de exercitar as faculdades tanto sintéticas quanto analíticas dos alunos, buscando aliar os dois processos que a autora julga comporem o pensamento matemático. Desta forma, Castelnuovo afirma que "o material deverá ser artificial e também ser transformável por continuidade" (1973, p. 92, apud Fiorentini e Miorim, 1990, p. 5).

Lorenzato (2006), ao classificar os tipos de materiais manipuláveis, propõe dividi-los em duas categorias: os materiais manipuláveis estáticos e os materiais manipuláveis dinâmicos. A primeira categoria descreve os materiais cuja manipulação não permite transformações sobre o mesmo. São exemplos desses materiais sólidos geométricos e o material dourado. Já a segunda categoria engloba aqueles cuja manipulação permite que o sujeito modifique a configuração do material e por meio disso possa observar as propriedades e relações que ele possibilita. Lorenzato (2006), portanto, ressalta as vantagens de se adotar um material manipulável dinâmico, uma vez que a experiência dinâmica permite uma compreensão mais ampla dos processos se comparada com o acesso por meio da observação apenas. De tal forma, as visões de Castelnuovo (Fiorentini e Miorim, 1990) e de Lorenzato (2006) convergem em relação à estrutura mais indicada para se conceber um material manipulável.

O material manipulável desenvolvido para a pesquisa aqui relatada pode ser classificado como dinâmico, uma vez que possibilita ao aluno a sua reconfiguração. A

partir das diversas composições possíveis realizadas pelo aluno, ele explora possibilidades, elabora e testa conjecturas.

No entanto, Lorenzato (2006) destaca que a mera utilização do material não determina o sucesso no processo de aprendizagem:

> [...] a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. Para que esta efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental, por parte do aluno. E o MD pode ser um excelente catalisador para o aluno construir seu saber matemático (Lorenzato, 2006, p. 21).

Isto é, a manipulação do material deve estar aliada a uma intencionalidade pedagógica, no sentido de que o simples ato de manusear o material não proporcionará por si só a aprendizagem ao aluno. Nessa perspectiva, o material manipulável caracteriza-se como um mediador na relação professor/aluno/conhecimento (Passos, 2006). Rêgo e Rêgo (2006), seguindo esta perspectiva, destacam o importante papel desempenhado pelo professor no processo de construção do conhecimento por meio do uso de materiais manipuláveis, destacando os seguintes cuidados que este deve tomar ao se utilizar deste auxílio didático:

> I. Dar tempo para que os alunos conheçam o material (inicialmente é importante que os alunos o explorem livremente);
> II. Incentivar a comunicação e troca de ideias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidos;
> III. Mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das atividades, por meio de perguntas ou da indicação de materiais de apoio, solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas;
> IV. Realizar uma escolha responsável e criteriosa do material;
> V. Planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados, para que possam ser explorados de forma eficiente, usando o bom senso para adequá-los às necessidades da turma, estando aberto a sugestões e modificações ao longo do processo, e
> VI. Sempre que possível, estimular a participação do aluno e de outros professores na confecção do material. (Rêgo & Rêgo, 2006, p. 54).

Tal orientação de abordagem aproxima-se da perspectiva defendida por Ponte et al. (2016), o que justifica a adoção dos referenciais buscados para a formulação da proposta aqui descrita e orientação de seu percurso prático no ambiente da escola.

Assim, os materiais manipuláveis se apresentam como uma poderosa ferramenta de auxílio no trabalho do professor de matemática, sendo suas variantes dinâmicas mais indicadas para a utilização. Porém, de forma alguma, a escolha de utilização de materiais dispensa a atuação reflexiva sobre o fazer docente e as relações estabelecidas com os alunos no decorrer das aulas, sendo o potencial desses materiais ampliado ao inseri-los em uma aula estruturada pela perspectiva de investigação matemática.

Aspectos metodológicos

O presente trabalho constitui-se de uma pesquisa de natureza qualitativa e explicativa (Severino, 2007) – uma vez que buscou registrar, analisar e identificar as causas dos fenômenos estudados – realizada no Colégio Universitário Geraldo Reis (COLUNI-UFF).

O colégio, localizado na região central do município de Niterói e ligado à Universidade Federal Fluminense, atende estudantes do primeiro ano do Ensino Fundamental ao terceiro ano do Ensino Médio. Desenvolvida no âmbito do Programa Institucional de Residência Pedagógica, a pesquisa teve como público-alvo a turma de 7°ano do colégio, cujos integrantes possuíam idades entre 12 e 14 anos.

Como particularidade da organização curricular do colégio, os alunos das turmas do ensino fundamental frequentam às aulas de laboratório de matemática que ocorrem em um ambiente especificamente destinado para estas (o LEMAT) complementarmente às aulas de Matemática. Nas aulas realizadas no laboratório, os conteúdos matemáticos, que podem estar ou não diretamente ligados aos conteúdos prescritos na grade curricular adotada, são trabalhados de forma distinta das exposições frequentemente observadas nas aulas tradicionais, com os alunos realizando atividades envolvendo jogos, investigações e projetos relacionados a

temas matemáticos. Dessa forma, optou-se pelo uso deste espaço com o fim de aliar a atividade aqui apresentada com a proposta pedagógica do colégio.

Foi utilizado, para a condução das investigações realizadas pelos alunos na aula, o material manipulável exposto a seguir (figura 1), composto de 24 peças de madeira com 1cm de espessura, 2cm de largura e comprimentos variados com buracos espaçados por 4cm, com recuo de 1cm da borda, além de 20 parafusos e 4 chaves. O material foi desenvolvido com o intuito de permitir a investigação por parte dos alunos através de diversas configurações possíveis para as peças.



Figura 1. Mesa do professor do Laboratório de Matemática com material disposto

Fonte: os autores, 2019

Relato e Análise da Experimentação

A proposta, realizada no espaço do laboratório de matemática, ocorreu no período de uma hora e trinta minutos de aula, de forma que a cada 45 min foi atendida uma das metades da turma. Desse modo, a turma foi dividida em dois grupos com 14 alunos cada.

Cada um dos grupos de estudantes, aqui denominados grupos 1 e 2, foram novamente subdivididos. O grupo 1 foi dividido no subgrupo 1, formado pelos alunos F, AR e D, e o subgrupo 2 composto por C, GC, I e G, e no subgrupo 3 formado pelas alunas AS, E e AJ e por fim o subgrupo 4, formado por GM, MB, FG e J. O grupo 2, por sua vez, foi subdividido nos subgrupos 5, formado pelos alunos M, JF, LF, JP e K,

6, composto pelas alunas LA, ME, ML e MC e o subgrupo 7 formado por MM, PH, MG, L e R.

Cada uma das aulas iniciou-se com uma mesma pergunta direcionada aos alunos, questionando-os o que estes entendiam ser um objeto rígido. Entre as respostas dos alunos surgiram as seguintes definições: duro, preso, escuro, que briga / pega no pé, formato exato, frio, maciço.

Após este momento inicial, foram dispostos os elementos que compõem o material sobre a mesa do professor, pedindo que um dos subgrupos construísse um triângulo, outro um quadrilátero, outro um pentágono e por fim que um último subgrupo construísse um hexágono. Por opção do residente, o grupo 2 foi subdividido em apenas 3 subgrupos, o que naturalmente resultou na montagem apenas dos 3 primeiros polígonos citados anteriormente.

No momento posterior à montagem dos polígonos, foi solicitado que os subgrupos trocassem entre si os polígonos construídos para descrever as características que diferenciavam cada polígono dos demais. Inicialmente foram destacadas pelos alunos apenas características individuais dos polígonos, tais como o número de lados, mobilidade e afrouxamento dos parafusos, sem estabelecer relações entre eles. Posteriormente, ao comparar os polígonos entre si, os subgrupos de alunos começaram a notar a diferença apresentada pelo triângulo com relação a sua mobilidade.

Em tal momento os alunos foram questionados pelo residente sobre as razões que levariam a tal diferença. As justificativas apresentadas buscaram inicialmente fundamentações nas características físicas do material, como por exemplo, a posição do parafuso. Posteriormente, os alunos voltaram suas justificativas para aspectos dos polígonos que as configurações do material representavam, tais como a possibilidade de reconfigurações e a relação de dependência observada entre os ângulos de um polígono. Ao final da aula, foi organizado um ambiente de discussão com os alunos, com o intuito de sistematizar e sintetizar as observações e justificativas expressas pelos alunos.

No primeiro momento da proposta, a organização da aula possibilitou que os alunos explorassem livremente o material manipulável, buscando as razões da rigidez triangular, procurando construir conjecturas a respeito do fato do triângulo ser o único polígono que possui esta característica. A organização em grupos favoreceu as discussões entre os alunos. Esses comportamentos por parte dos alunos são corroborados por Abrantes (1999), quando afirma que esta metodologia de ensino permite uma participação ativa do aluno na construção do conhecimento matemático. Nessa primeira parte observou-se, tal como Ponte et al. (2016) explicitam, a etapa e exploração e formulação de conjecturas.

A seguir destacam-se alguns trechos dos encaminhamentos tomados com cada um dos grupos, destacando diálogos transcritos que foram estabelecidos com os alunos e algumas observações do residente, responsável pela aplicação da proposta.

Grupo 1

Durante a aula realizada com o grupo 1 o subgrupo responsável pela construção do triângulo levou uma quantidade excessiva de tempo para tal. Desta forma, o residente optou por unir os subgrupos para a realização das investigações. Após a montagem de todos os polígonos juntaram-se os subgrupos 1 e 4 e os subgrupos 2 e 3.

Destinou-se uma parcela do tempo de aula para que os subgrupos realizassem investigações iniciais sobre o material, sem a interferência do residente.

Após esse intervalo, o residente começou a estabelecer diálogos com os alunos, tendo como intuito identificar as observações feitas por eles, bem como os processos de explicação atrelados a essas. O papel do residente nesse momento foi atuar como mediador do processo de investigação, buscando suscitar e discutir o surgimento de outras questões.

Abaixo são explicitados alguns dos diálogos registrados, juntamente com algumas das observações realizadas e registradas durante o momento da aula.

Nesses diálogos o residente é identificado pela letra maiúscula R e os alunos pelos nomes atribuídos a esses anteriormente.

Direcionando-se aos subgrupos 2 e 3:

R – E aí, perceberam alguma coisa?

GC – Se a gente alinhar dois lados desse (hexágono) a gente consegue transformar nesse (pentágono).

R – E eu sempre consigo reduzir a figura?

Realizando alguns testes, os alunos perceberam que, com as peças usadas, o menor polígono que poderia ser construído a partir de uma reconfiguração de um pentágono ou de um hexágono era um triângulo. A partir desta constatação por parte dos alunos, pediu-se que esse subgrupo construísse um triângulo e destacassem que diferenças ele apresentava em relação aos demais polígonos por eles construídos.

Direcionando-se aos subgrupos 1 e 4:

R – Terminaram de montar o quadrilátero?

MB – Sim. (mostrando-o)

R – Ah, ficou muito bom. E que diferença tem o quadrilátero e o triângulo?

MB – O quadrilátero tem mais pontas.

F – O triângulo não mexe. (manipulando o quadrilátero)

MB – Ih, é verdade! É porque o triângulo é rígido?

R – Será que é?

MB – É, ele tá duro.

R – Mas tenta explicar por que isso acontece.

Direcionando-se aos subgrupos 2 e 3:

R – E então, o que o triângulo tem de diferente?

GC – Ele não mexe.

G – É, mas quando a gente faz um triângulo com o hexágono ele mexe (manipulando o hexágono) (Figuras 2, 3 e 4)

R – É, mas ele continua sendo um triângulo?

AS – Não, o lado tá dobrando. (apontando para um dos lados do polígono) (Figura 4)

R – E tem como um dos lados do triângulo dobrar?

AS – Não porque ele é duro.

R – Entendi, junta esse grupo com o outro e tenta juntar as ideias dos dois.

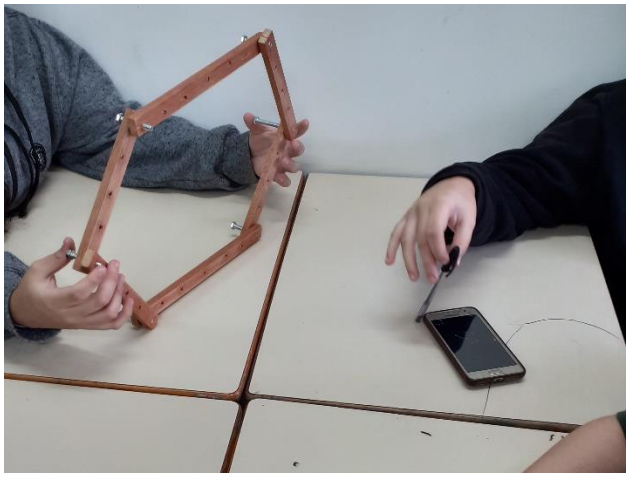

Figura 2. Hexágono construído pelo subgrupo 3

Fonte: os autores, 2019

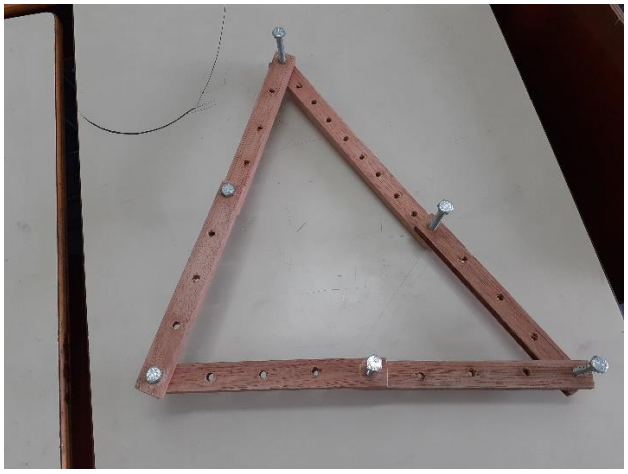

Figura 3. Triângulo construído a partir da reconfiguração do hexágono

Fonte: os autores, 2019

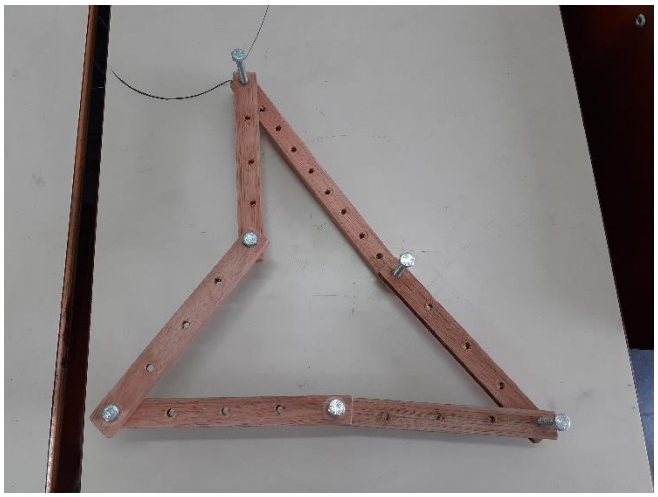

Figura 4. Reconfiguração do triângulo anterior

Fonte: os autores, 2019

Nesse momento os alunos se reuniram e explicaram as suas ideias uns aos outros. Passado algum tempo, pediu-se que estes sintetizassem as ideias pensadas e apresentassem as justificativas a que chegaram. A partir disto os alunos expressaram as seguintes conclusões: “O triângulo é a única figura rígida, por que não dá para dobrar um dos lados.” e “Se a figura tem mais de três lados dá pra mexer porque o quadrilátero dá pra mexer e dá pra transformar uma figura com mais lados em um quadrilátero.”

No relato observa-se que o uso do material manipulável elaborado pelos autores, possibilitou o surgimento de várias questões e de discussões a respeito destas. A reconfiguração das estruturas poligonais permitida pelo fato do material ser dinâmico (LORENZATO, 2006) motivou os alunos a testar diversas combinações com o número dos lados e das medidas destes, o que embasou a elaboração e validação das conjecturas.

Grupo 2

Diferentemente do ocorrido na aula 1 o subgrupo responsável pela construção do triângulo rapidamente construiu 2 unidades distintas, o que agilizou a ocorrência dos processos de investigação.

Depois de realizadas tais construções, pediu-se que os membros do primeiro subgrupo distribuíssem suas construções entre os demais. Feito isso, esses membros permaneceram próximos aos subgrupos a que foram entregues os triângulos, posteriormente se juntando ao subgrupo 2, como será observado. A seguir são apresentados os diálogos estabelecidos com os subgrupos presentes na segunda aula.

Direcionando-se ao subgrupo 6:

R – Então, que diferenças vocês perceberam entre o triângulo e o pentágono?

LA – O triângulo tem menos lados que esse aqui (segurando o pentágono). e ele tá meio mole.

ML – O triângulo tá com os parafusos mais apertados!

R – Será que se eu afrouxar os parafusos do triângulo eu consigo mexer?

ML – Acho que sim – Após afrouxar um dos parafusos a aluna tenta novamente mexer o triângulo – Não dá por que... eu não sei, só sei que não dá.

R – Ok, tentem pensar o porquê de isso acontecer que mais tarde eu volto.

Após a saída do professor os integrantes dos subgrupos 1 e 2 se reuniram para discutir sobre o tema.

Direcionando-se ao subgrupo 7:

R – E aí, conseguiram montar o quadrilátero?

MM – Foi tranquilo. (figura 5)

R – Ok, vão mexendo nos dois e tentem ver que diferenças eles têm.

PH – Tio, eu não consigo mexer o triângulo, não.

R – Por que será que isso acontece?

MG – Acho que só o quadrado mexe.

R – E se tiver mais lados não vai mexer?

MG – Talvez.

R – LA, você consegue mexer o pentágono?

Após observar a movimentação do pentágono demonstrada pela aluna do outro subgrupo MG formula a seguinte conjectura:

MG – Quanto mais lados tem a figura maior a probabilidade de ele mexer.

R – Probabilidade? ... Hum, o que você chamaria de probabilidade?

PH – Tem a ver com sorte.

MG – É isso mesmo, tipo uma moeda tem cinquenta porcento de chance de cair cara, aí se cair várias vezes cara é sorte.

R – Então, será que se eu tentar mexer o quadrado vai ter uma hora que eu vou dar azar e não vai mexer?

Nesse momento, após deixar o questionamento ao subgrupo 7, redirecionou sua atenção aos subgrupos 5 e 6 que trabalhavam em conjunto.



Figura 5. Quadrilátero construído pelo subgrupo 7

Fonte: os autores, 2019

Direcionando-se aos subgrupos 5 e 6:

R – E então, pensaram em mais alguma coisa?

ML – Eu e o M achamos que o triângulo tá muito apertado pra mexer.

R – E como é que vocês podem testar se é isso mesmo?

M – A gente pode tentar pegar uma madeira maior e testar outros buracos.

R – Beleza, pega lá na mesa e tenta fazer isso.

Nesse momento o aluno busca entre os pedaços restantes na mesa o maior deles e o substitui por um dos lados do triângulo. Em seguida, com o auxílio dos colegas, este alterna os buracos sobre o maior lado e testa a mobilidade do triângulo. O professor aproveita esse momento para voltar-se para o subgrupo 7.

Direcionando-se ao subgrupo 7:

R – E então, era questão de sorte?

MM – Não, sempre mexe, porque quando você abre um ângulo o do outro lado também abre.

R – E por que eu não consigo abrir o triângulo?

MM – Porque não tem ângulo do outro lado.

MG – É.

R – Muito bom, lembra disso pro final da aula.

Após a apresentação das respostas dos alunos o professor direciona-se novamente para os subgrupos 5 e 6

Direcionando-se aos subgrupos 5 e 6:

R – Testaram os buracos?

M – Sim, e em nenhum deles mexe.

R – E por que será que isso acontece?

LA – Porque o triângulo é um objeto rígido.

R – Certo, mas por que será?

LA – Porque, tipo, quando tem só 2 lados dá pra mexer, mas quando bota um terceiro ele trava. (Mostrando dois pedaços de madeira unidos por um parafuso)

M – Aí se botar mais um lado é como se tivesse quebrando esse que trava em dois.

R – E no caso do pentágono estaria quebrando um lado em três?

M – Ou dois lados em dois cada. E aí não trava mais.

R – Entendi. Gostei.

Ao final da aula sintetizou-se com os alunos a conclusão de que “o triângulo é a única figura rígida, porque se a figura tem mais de três lados é como se

construíssemos mais um ângulo a partir da quebra de um lado, o que permite uma nova movimentação".

Os diálogos acima apresentados evidenciam que o uso material manipulável aqui tratado não apenas suscitou o surgimento de questões específicas como também possibilitou meios para respondê-las e justificá-las. Tal constatação pode ser observado na justificativa dada pelo aluno MM, baseada na relação de dependência observada entre os ângulos, e com ainda mais ênfase na formulação de conjecturas e processos de argumentação apresentados pelos subgrupos 5 e 6, onde observa-se também a influência exercida por parte do apelo ao concreto que o material possibilitou.

Vale ressaltar também na fala da aluna MG como o processo de investigação possibilitou uma negociação de significados em torno do conceito de probabilidade. Isso se observa pelo fato de que a proposta de investigação matemática abre espaço para o surgimento de questões inesperadas, com as quais o professor deverá se deparar (Ponte et al., 2016).

No final de ambas as aulas, foram requeridas aos alunos que identificassem e registrassem por meio de fotos ou vídeos objetos ou estruturas que utilizassem a noção de rigidez triangular para manter sua forma. Essa relação foi prontamente reconhecida por alguns dos alunos em objetos do próprio ambiente do laboratório de matemática do colégio (Figura 6 e 7). Os alunos registraram, posteriormente, objetos de suas residências ou próximos destas que se utilizavam da rigidez triangular (Figuras 8 e 9).



Figura 6. Estante do Laboratório de Matemática

Fonte: os autores, 2019



Figura 7. Tetraedro feito de canudos

Fonte: os autores, 2019



Figura 8. Suporte de prateleira

Fonte: aluna LA, 2019



Figura 9. Sinalização de trânsito

Fonte: aluna I, 2019

Tal parte da proposta foi pensada com o fim de relacionar os conceitos trabalhados em sala de aula com o cotidiano dos alunos, trabalhando assim, a sua leitura de mundo e proporcionando-os uma aprendizagem significativa (Moreira & Masini, 1982), também abordando as propostas de documentos normativos (Brasil, 2017).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste artigo foi descrever e analisar uma proposta pedagógica para a construção do conceito de rigidez do triângulo, utilizando materiais manipuláveis e investigação matemática. Observou-se que, devido ao fato de a rigidez do triângulo ser uma característica possível de ser observado fisicamente, o material manipulável desenvolvido pelos autores cumpriu a função de motivar os alunos e auxiliá-los na busca de explicações para essa característica dos triângulos.

A utilização do material, tal como foi observado, permitiu não apenas a construção do conceito de rigidez triangular, mas também uma apreensão crítica deste por meio da investigação matemática proposta pelos autores, articulando ideias essenciais para a matemática tais como comparação e dependência. A possibilidade de reconfiguração do material manipulável desenvolvido motivou e ampliou a elaboração de conjecturas pelos alunos, também ajudando-os em seus processos de

argumentação e justificação, desta forma podendo apreender a relação de rigidez apresentada unicamente pelo triângulo.

Tal apreensão contribuiu ainda para a compreensão, por parte dos alunos, do espaço onde vivem, permitindo-os relacionar a rigidez triangular com o seu uso prático em objetos tanto do ambiente escolar que frequentam quanto de suas residências e proximidades, proporcionando assim uma aprendizagem significativa.

Desta forma, o trabalho aqui apresentado evidenciou não apenas o potencial de se trabalhar por meio do uso de materiais manipuláveis e da metodologia de investigação matemática, mas também a possibilidade de se desenvolver, durante a formação inicial, propostas pedagógicas, no ambiente próprio da escola, alinhadas com as tendências em educação matemática e os documentos curriculares normativos que são colocados no cenário atual da educação brasileira.

REFERÊNCIAS

Abrantes, Paulo (1999). Investigações em Geometria na Sala de Aula. In: E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte, & P. Abrantes (Orgs.). *Ensino da Geometria no Virar do Milénio*. (Cap. 5 p.51-62) Lisboa: DEFCUL. Recuperado a partir de http://www1.rc.unesp.br/igce/demac/maltempi/cursos/curso3/Artigos/Artigos_arquivos/p_153-167.pdf Acesso em: 20 set 2019.

Brasil (2017). Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental*. Brasília: SEMT/MEC. Recuperado a partir de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em: 20 set 2019.

Brasil (2018). Programa de Residência Pedagógica. Recuperado a partir de https://www.capes.gov.br/educacao-basica/programa-residencia-pedagogica. Acesso em: 20 set 2019.

Fiorentini, D., & Miorim, M. A. (1990). Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática. *Boletim da SBEM-SP, vol.1*(7), p. 5-10. Recuperado a partir de

http://www.cascavel.pr.gov.br/arquivos/14062012_curso_47_e_51_-_matematica_-_emersom_rolkouski_-_texto_1.pdf Acesso em: 20 set 2019

Kaleff, Ana Maria Martensen Roland (2003). *Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos*. Niterói: Editora da Universidade Federal Fluminense.

Lorenzato, Sergio (2006). Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: S. Lorenzato (Ed.) *Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores* (Cap. 1 p. 3-38). Campinas: Autores Associados.

Machado, G. C. (2016). *O Estudo dos Triângulos através da observação de estruturas treliçadas e sua aplicação em competição de construção de pontes de espaguete* Dissertação, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro, Brasil. Recuperado a partir de https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/23112016Guilherme-Coelho-Machado.pdf Acesso em: 20 set 2019

Moreira, Marco Antônio, & Masini, Elcie Aparecida Fortes Salzano (1982). *Aprendizagem significativa. a teoria de David Ausubel*. São Paulo: Editora Moraes.

Passos, Cármen Lúcia Brancaglion (2006). Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: S. Lorenzato (Ed.) *Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores* (Cap. 4 p. 77-92). Campinas: Autores Associados.

Ponte, João Pedro da, Brocardo, Joana, & Oliveira, Hélia. (2016). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Rêgo, Rogéria Gaudencio do, & Rêgo, Rômulo Marinho do (2006). Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: S. Lorenzato (Ed.) *Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores* (Cap. 2 p. 39-56). Campinas: Autores Associados.

Severino, Antônio Joaquim (2007). *Metodologia do Trabalho Científico.* São Paulo: Cortez.

Agradecimentos

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pela bolsa de iniciação à Docência do Programa Institucional da Residência Pedagógica da Universidade Federal Fluminense. Aos professores do Colégio Universitário Geraldo Achilles Reis (COUNI-UFF), Dr. Luiz Davi Mazzei (COLUNI-UFF) e Olinda Mioka Chubachi.

Contribuições dos Autores

1º autor: conceitualização; desenvolvimento da proposta; elaboração de materiais; investigação; metodologia; visualização; redação – rascunho original; redação – revisão e edição.
2º autor: conceitualização; auxílio no desenvolvimento da proposta; análise formal; metodologia; redação – rascunho original; redação – revisão e edição.
3º autor: conceitualização; auxílio no desenvolvimento da proposta; metodologia; análise formal; administração do projeto; supervisão; visualização; redação – rascunho original; redação – revisão e edição.