HORIZONTES - REVISTA DE EDUCAÇÃO
e-ISSN: 2318-1540

MAPEO DE LAS CONCEPCIONES DE ALUMNOS: ANÁLISIS COHESITIVO EN UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA SOBRE EL VALOR ABSOLUTO

MAPEAMENTO DAS CONCEPÇÕES DOS ALUNOS: ANÁLISE COESITIVA EM UMA SITUAÇÃO DIDÁTICA SOBRE VALOR ABSOLUTO

Sahara Doria RODRÍGUEZ[1]
Saddo Ag ALMOULOUD[2]
Francisco Ugarte GUERRA[3]

Resumen: este artículo presenta un estudio sobre el análisis de una situación didáctica en torno al concepto de valor absoluto. Hacemos algunas reflexiones sobre este objeto matemático y la situación didáctica. Nos centramos, más específicamente, en el análisis de un cuestionario aplicado en alumnos que habían participado en nuestra secuencia didáctica, cuyo propósito es la introducción del concepto de valor absoluto a partir del contexto funcional. Para el análisis del cuestionario, nos apoyamos en el Análisis Estadístico Implicativo, particularmente en la clasificación jerárquica cohesitiva. Este análisis fue incorporado con la finalidad de validar los resultados obtenidos en el análisis a posteriori. Para ello, se elaboró un cuestionario aplicado a alumnos entre 13 y 14 años. Los resultados muestran que la enseñanza a partir del contexto funcional favorece el desempeño de los alumnos en la resolución de ecuaciones con valor absoluto, pues evita obstáculos didácticos asociados a esa noción

Palabras-clave: Valor absoluto. Análisis cohesitivo. Obstáculo didáctico. Obstáculo epistemológico.

Resumo: este artigo apresenta um estudo sobre a análise de uma situação didática em torno do conceito de valor absoluto. Tecemos algumas reflexões sobre este objeto matemático e a situação didática. Focamos, mais especificamente, a análise de um questionário aplicado em alunos que tinham participado de nossa sequência didática cujo intuito é a introdução do conceito de valor absoluto a partir do contexto funcional. Para a análise do questionário, apoiamo-nos na Análise Estatística Implicativa, essencialmente na classificação hierárquica coesitiva. Ela foi incorporada, a fim de validar os resultados obtidos na análise a posteriori. Para tanto, foi elaborado um questionário aplicado a alunos entre 13 e 14 anos. Os resultados mostram que o ensino a partir do contexto funcional favorece o desempenho dos alunos na resolução de equações com valor absoluto, pois evita obstáculos didáticos associados a essa noção.

[1] Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica (PUC) Peru. E-mail: sahara.doria@pucp.pe.
[2] Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). E-mail: saddoag@pucsp.br.
[3] Educação Matemática PUC-Peru. E-mail: fugarte@pucp.edu.pe.

Palavras-chave: Valor absoluto. Análise coesitiva. Obstáculo didático. Obstáculo epistemológico.

Abstract: This article presents a study on the analysis of a didactic situation around the concept of absolute value. We make some reflections on this mathematical object and the didactic situation. We focus, more specifically, on the analysis of a questionnaire applied to students who had participated in our didactic sequence. The purpose of the questionnaire is the introduction of the concept of absolute value from the functional context. For the analysis of the questionnaire, we use the Implicative Statistical Analysis, particularly the cohesive hierarchical classification. This analysis was incorporated with the purpose of validating the results obtained in the a posteriori analysis. To do this, a questionnaire was developed for students between 13 and 14 years old. The results show that teaching from the functional context favors the performance of students in solving equations with absolute value, because it avoids didactic obstacles associated with that notion

Keywords: Absolute value. Cohesitive analysis. Didactic obstacles. Epistemological obstacles.

Introducción

Este artículo forma parte de nuestra tesis para optar el grado académico de magíster en enseñanza de las matemáticas cuyo título es “análisis de una situación didáctica para la enseñanza del valor absoluto en alumnos de educación secundaria”. Nuestra intención es responder a la siguiente pregunta: “¿La enseñanza del valor absoluto como función, favorece el desempeño de los estudiantes en la resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto?”

Nuestro objetivo principal, en este artículo, es presentar los resultados de un cuestionario que fue aplicado a los alumnos que participaron de una secuencia didáctica cuyo objetivo es justamente responder la pregunta arriba planteada. No obstante, discutiremos de forma sucinta el proceso de construcción histórico del concepto de valor absoluto, algunos obstáculos relacionados al objeto matemático. Presentaremos también, de forma resumida, algunos aspectos de la secuencia didáctica que se diseñó y experimentó y los resultados alcanzados.

Para el análisis del cuestionario nos basamos en los resultados de las investigaciones de Gagatsis y Panaoura (2014) sobre los obstáculos epistemológicos y didácticos, y utilizamos como herramienta de mapeo las producciones de los alumnos el Análisis Estadístico Implicativo (ASI) desenvuelto por Gras (2018) y colaboradores.

El estudio que teníamos realizado en la tesis para optar el grado académico de magíster en enseñanza de las matemáticas, nos permite vislumbrar algunas reflexiones sobre el valor absoluto antes de discutir nuestro cuestionario.

1. Justificación

Las investigaciones sobre el valor absoluto y los errores, dificultades asociados dan muestra de la importancia de la investigación en torno a esta noción. Entre las investigaciones que dan cuenta de los errores y dificultades asociados al valor asboluto, se tiene a Chiarugi, Fracazina y Furinghetti (1990), quienes realizaron su investigación con estudiantes de secundaria y primer año de nivel universitario en Italia; García (2014), por su parte realizó su investigación con estudiantes universitarios en Perú y Gagatsis y Panaoura (2014) realizaron una investigación con alumnos de nivel secundaria de la República de Chipre. Muchos de los errores reportados en estas investigaciones coincidieron, a pesar de que se realizaron en diferentes países y en diferentes tiempos.

Respecto a la forma en la que el valor absoluto es enseñado, Chiarugi et al. (1990), señalan que la enseñanza del valor absoluto, en los alumnos de nivel secundaria en Italia se realiza en el contexto aritmético, por lo que esta noción es entendida como un instrumento que elimina el signo antes del número, en ese mismo sentido Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007), realizaron su investigación en una institución donde la introducción del valor absoluto era de acuerdo al modelo aritmético y sostienen que, el modelo aritmético constituye un conocimiento resultante de una transposición didáctica que restringe al valor absoluto a un simple juego de símbolos, por lo que sugieren la expulsión “temporal” de esta noción de la estructura curricular actual, hasta que se confeccione una transposición didáctica pertinente. Es así, que en ambas investigaciones los autores, coinciden en la necesidad de diseñar un sistema adecuado para la introducción de la noción de valor absoluto.

De acuerdo a Wilhelmi et al. (2007), en este nuevo sistema el modelo preponderante debería ser el funcional. Dado que, la propuesta curricular peruana, introduce el valor absoluto desde el contexto métrico y aritmético, nosotros diseñamos, aplicamos y analizamos una secuencia didáctica para la enseñanza del valor absoluto como función en estudiantes entre 13 y 14 años. Se realizó el análisis cohesitivo con la finalidad de evaluar cómo influye la noción funcional del valor absoluto en el rendimiento al resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

2. Valor absoluto

Gagatsis y Thomaidis (1995), muestra que la notación que hoy se utiliza para el valor absoluto, así como sus propiedades, involucraron cambios conceptuales importantes a lo largo de la historia, lo cual explica la complejidad que encierra esta noción. Los investigadores realizaron un estudio histórico del concepto de valor absoluto donde se distinguen 4 etapas: En la primera etapa, el valor absoluto es visto como un concepto implícito que surgió por la necesidad de realizar la sustracción entre dos cantidades no conocidas, como un modo de prevenir la realización de una operación imposible, ya que en ese tiempo no se trabajaba con los números negativos.

En la segunda etapa, el valor absoluto es visto como un objeto justificativo-explicativo, de la teoría algebraica y de la teoría de números, la frase “haciendo abstracción del signo”, es utilizada en vez de la noción valor absoluto. En la tercera, durante el siglo XIX el valor absoluto es visto como un instrumento que permite la formalización del álgebra, necesario para entender los números negativos y positivos. En esta etapa el valor absoluto es visto como “la distancia desde cero” o como un “número sin signo” y finalmente es visto como un objeto matemático necesario para las demostraciones de convergencia y continuidad. Durante esta etapa el valor absoluto carece de una notación única para representarlo, por lo que no se formalizan sus propiedades. En la cuarta etapa, el valor absoluto es un instrumento para el desarrollo del análisis complejo. El símbolo actual de valor absoluto (| |), fue introducido por Weierstrass en 1841, en su trabajo de la desigualdad de Cauchy, con la finalidad de expresar el módulo de una variable compleja y ciertos conceptos topológicos, pero este simbolismo no fue aceptado en la comunidad matemática sino hasta finales del siglo XIX. La formalización de sus propiedades y su definición formal como “función por partes” desempeñó un rol importante en el siglo XX en estudios de distancia en espacios métricos y estimación en la teoría de los cuerpos.

3. Nociones acerca del valor absoluto

Existente diferentes nociones acerca del valor absoluto dependiendo del contexto desde el que se estudie. Desde el contexto aritmético, por ejemplo, el libro Texto Escolar Matemática 3 del Perú establece que

> Si el número racional es mayor o igual a cero, su valor absoluto es el mismo número, si el número racional es menor que cero, su valor absoluto es el mismo número, pero con signo opuesto (MINISTERIO DE EDUCACIÓN, 2016, p. 20).

Desde el contexto métrico, el mismo libro Texto Escolar Matemática 3 señala lo siguiente "El valor absoluto de un número racional en la recta numérica es la distancia del número al origen" (Ministerio de Educación, 2016, p. 20).

Desde el contexto funcional, el valor absoluto de un número real *x* es visto como una función por partes, de manera que:

$$f(x) = \begin{cases} x, si\ x \geq 0 \\ -x, si\ x < 0 \end{cases}$$

Al respecto, Wilhelmi et al. (2007), señala que aunque estos significados son equivalentes matemáticamente, no lo son desde el punto de vista epistémico, debido a que no involucran los mismos objetos matemáticos, por lo tanto la noción que un estudiante tenga acerca del valor absoluto va a influenciar en las prácticas operatorias y discursivas en la resolución de un problema. Además existen otras nociones del valor absoluto como la vectorial, función máximo, función compuesta entre otras que no son parte de la presente investigación.

Obstáculos epistemológicos y didácticos asociados al valor absoluto

Gagatsis y Panaoura (2014), identificaron los siguientes obstáculos asociados a la noción de valor absoluto: Interpretar la noción de valor absoluto de un número como "el número sin signo", obstáculo que se evidencia cuando los estudiantes responden que $|a|$ es a o también que $|-a|$ es a, errores reportados por Wilhelmi et al. (2007), así como por García (2014). Al respecto Chiaguri, et al. (1990), menciona que la imagen conceptual del valor absoluto de un número como el "número sin signo" es tan fuerte que los alumnos rechazan la idea de que $-x$

pueden ser el resultado de un valor absoluto. Otro error reportado por Chiarugi et al. (1990) ligado al mismo obstáculo es la afirmación $|x+1|=x+1$. Este obstáculo epistemológico, corresponde a la tercera etapa del desarrollo histórico del valor absoluto, siendo un indicativo de que los estudiantes no han adquirido un entendimiento completo de esta noción.

Por otro lado, el considerar que el valor absoluto es sólo "un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente", constituye un obstáculo didáctico, debido a que en la enseñanza del valor absoluto, al resolver ecuaciones o inecuaciones, el símbolo es rápidamente eliminado con la finalidad de obtener ecuaciones e inecuaciones sin valor absoluto. Este error se presenta comúnmente en preguntas con "ecuaciones imposibles". Por ejemplo $||x-5|-12|=-5$, en ellas la mayoría de estudiantes resuelve mecánicamente la ecuación sin verificar la solución, también ante la pregunta de resolver $|x+2|+|x+6|=0$, la respuesta común fue $x=-2$ ó $x= -6$, estos errores son reportados por Gagatsis y Panaoura (2014). Este obstáculo se evidencia cuando los estudiantes resuelven las inecuaciones con valor absoluto de la misma forma que las ecuaciones con valor absoluto. Por ejemplo, al resolver la ecuación $|x|=5$, los estudiantes responden que $x=\pm5$, Gagatsis y Panaorura (2014), reportaron que al resolver $|x|<5$ algunos alumnos respondieron que $x <\pm5$.

Además, concluyen que el obstáculo didáctico que consiste en la creencia de que el "valor absoluto es sólo un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente", se ha instaurado como parte del contrato didáctico, lo que da como resultado, que los alumnos ante problemas de valor absoluto, actúen de manera mecánica.

4. Secuencia didáctica

Presentamos en esta sección algunos aspectos de la secuencia didáctica que fue aplicada a estudiantes de tercer grado de secundaria cuyas edades oscilan entre los 13 a 14 años.

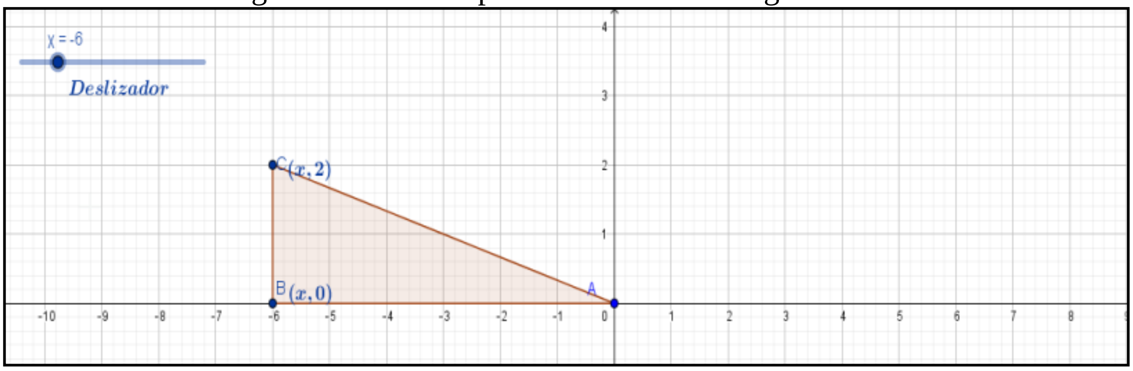
Partimos de una situación problema ubicada dentro de un contexto geométrico, no se resolverá problemas en contextos extra-matemáticos, debido a que el análisis epistemológico realizado por Gagatsis y Thomaidis (1995) muestra que, el valor absoluto surgió dentro de la misma matemática como una necesidad de evitar operaciones imposibles, relacionadas al trabajo con los números negativos.

HORIZONTES - REVISTA DE EDUCAÇÃO
e-ISSN: 2318-1540

La situación problema está diseñada, para que los alumnos hallen indirectamente la regla de correspondencia de la función por partes del valor absoluto, al intentar hallar el área del triángulo ABC que se muestra en la siguiente figura, en función del valor que tome la abscisa de los vértices B y C representado por x, al ser el área una unidad de medida siempre tomará valores positivos.

Como se observa en la Figura 1, se hará uso de un deslizador, esto con la finalidad de que los alumnos trabajen con la noción de variable, de manera que finalmente puedan expresar el área del triángulo en términos de *x*. De esta manera buscamos que los alumnos se familiaricen con el tipo de preguntas donde deben expresar sus resultados en términos de una variable.

Figura 1: Situación problema en contexto geométrico



Fuente: Propio.

En la Tabla 1 se muestran las variables micro-didácticas, variables que se han escogido con la finalidad de modificar el comportamiento de los estudiantes.

Tabla 1. Variables micro-didácticas

Variables	Valores	Código	Ejemplo
Argumento de la función	Número entero	V1.a	|-15|, |18|
	Variable	V1.b	|*a*|, |*b*|
	Expresión algebraica	V1.c	|*x*-4|
Valor de la función	Número real positivo	V2.a	|*x*|=17, |*x*-4|=3
	Número real negativo	V2.b	|*x*|= -2, |*x*-4|= -2
Tipo de relación	Igualdad con ayuda gráfica	V3.a	|*x*|=17, |*x*-4|=3
	Igualdad sin ayuda gráfica	V3.b	|*x*-8|=
	Desigualdad con ayuda gráfica	V3.c	|*x*|≤3, |*x*+3|>2
	Desigualdad sin ayuda gráfica	V3.d	|*x*+10|>5

Fuente: Propio.

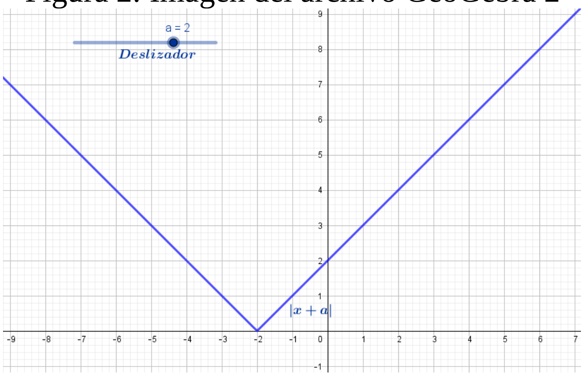
Se espera que estas variables didácticas, durante el desarrollo de la secuencia didáctica produzcan un cambio en el comportamiento de los estudiantes en términos de estrategias de solución o tipos de respuestas.

A partir de la situación moestrada figura 1, fueron propuestas tres actividades con los siguientes objetivos:

Actividad 1: Globalmente, esta actividad tiene por finalidad que los alumnos obtengan indirectamente la regla de correspondencia de la función valor absoluto, al hallar la regla de correspondencia del área del triángulo ABC en función de *x*.

Actividad 2: La finalidad de la actividad es que los alumnos puedan representar gráficamente las funciones $f(x)=|x+a|$, y que puedan resolver ecuaciones del tipo $|x+a|=b$. Al inicio de esta actividad se dan unas indicaciones al alumno para que ingresen al archivo GeoGebra 2, y para que manipule el deslizador, con la finalidad de que el estudiante pueda observar los cambios en la representación gráfica de la función, tal como se muestra en la siguiente figura.

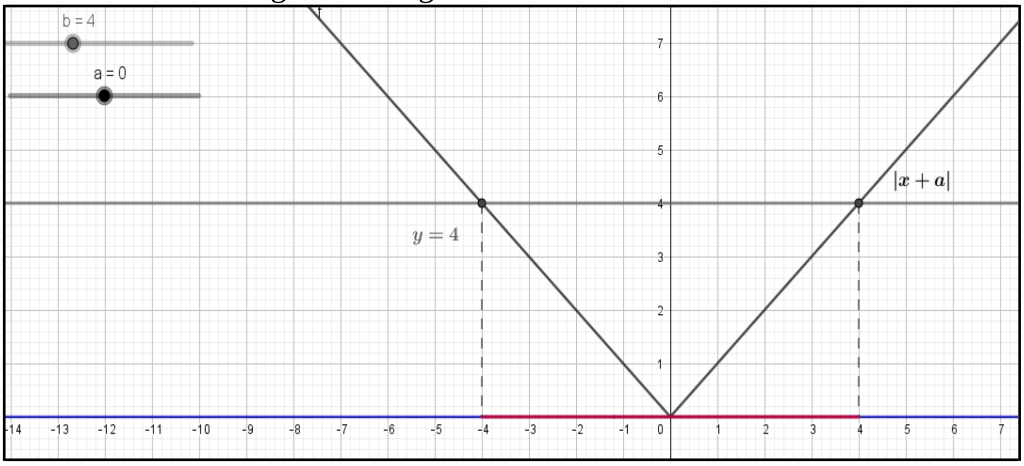
Figura 2: Imagen del archivo GeoGebra 2



Fuente: Propio.

Actividad 3: Tiene por finalidad que los alumnos puedan resolver inecuaciones de la forma $|x+a|\geq b$, $|x+a|\leq b$, al inicio de esta actividad se da indicaciones al alumno para que pueda acceder al archivo GeoGebra 3, y que al manipular los deslizadores *a* y *b* observen los cambios en la figura. Los valores que toma *a* en el deslizador van desde -5 hasta 5 y los valores que toma *b* en el deslizador van desde 0 hasta 10.

Figura 3: Imagen del archivo GeoGebra 3

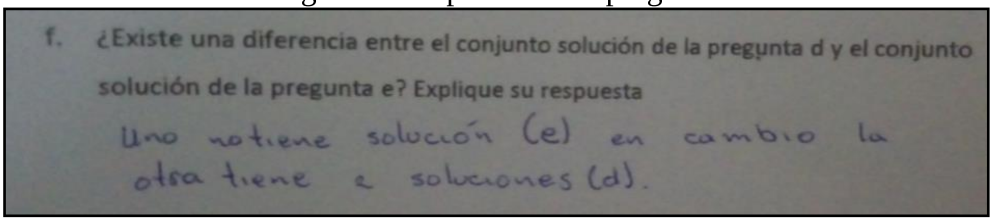


Fuente: Propio.

A continuación, de forma resumida, presentamos algunos resultados observados en la implementación de nuestra secuencia didáctica.

En la Actividad 2, por ejemplo, los estudiantes deberían responder siguiente pregunta: **"¿Existe una diferencia entre el conjunto solución de la pregunta d y el conjunto solución de la pregunta e? Explique su respuesta**." La pregunta d mostraba la ecuación |*x*-4|=3 y la pregunta e mostraba la ecuación |*x*-4|=-2. Los estudiantes reportaron que sí había diferencia en el conjunto solución, la respuesta mayoritaria fue la siguiente:

Figura 4: Respuesta de la pregunta

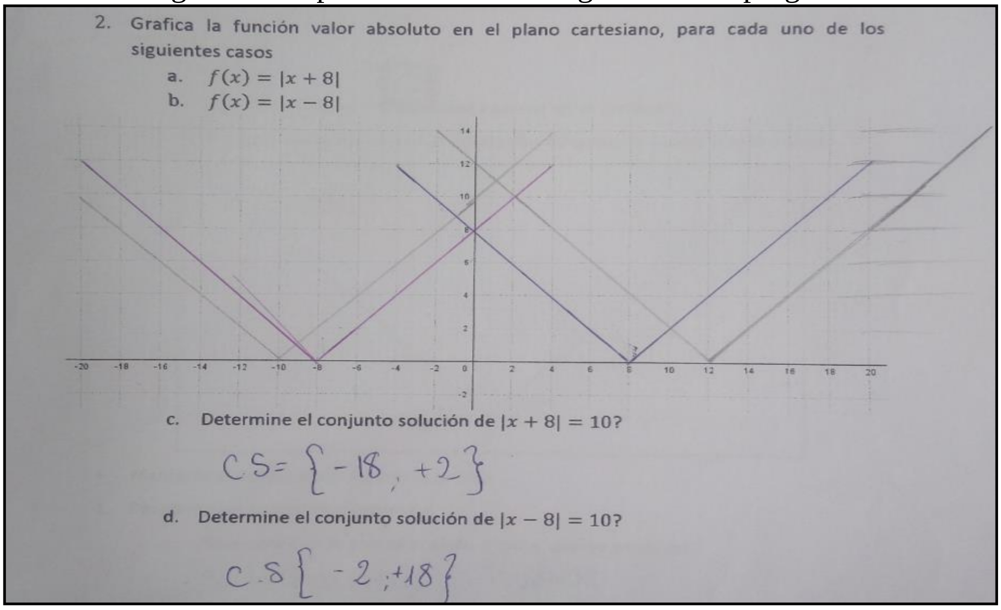


Fuente: Propio.

La mayoría de estudiantes mostró el comportamiento esperado, es decir, expresaron que el conjunto solución era diferente, en la pregunta 1.e no hay un valor que puede tomar *x* debido a que la función valor absoluto nunca puede ser negativo, esa noción queda clara por la representación gráfica de la función valor absoluto, aunque no todos expresaron que el conjunto solución era vació, se observaron respuestas como no existe, no hay o no se puede, todas expresiones que evidencian la noción correcta de que el valor absoluto de un número no puede ser negativo, por lo tanto el valor de la función valor absoluto al cambiar de número entero positivo a un número entero negativo actuó como una variable didáctica.

En la segunda tarea de esta actividad: “**Determina el conjunto solución de |*x*+8|=10 y de |*x*-8|=10”,** se observó dos tipos de comportamientos, el primer tipo de comportamiento fue el que se observó en la mayoría de los estudiantes, este grupo recurrió a la gráfica anterior, para poder responder a la pregunta, es decir resolvieron las ecuaciones gráficamente, como se observa en la siguiente figura.

Figura 5: Respuesta con solución gráfica de la pregunta



2. Grafica la función valor absoluto en el plano cartesiano, para cada uno de los siguientes casos

a. $f(x) = |x + 8|$

b. $f(x) = |x - 8|$

c. Determine el conjunto solución de $|x + 8| = 10$?

CS= {-18 ; +2}

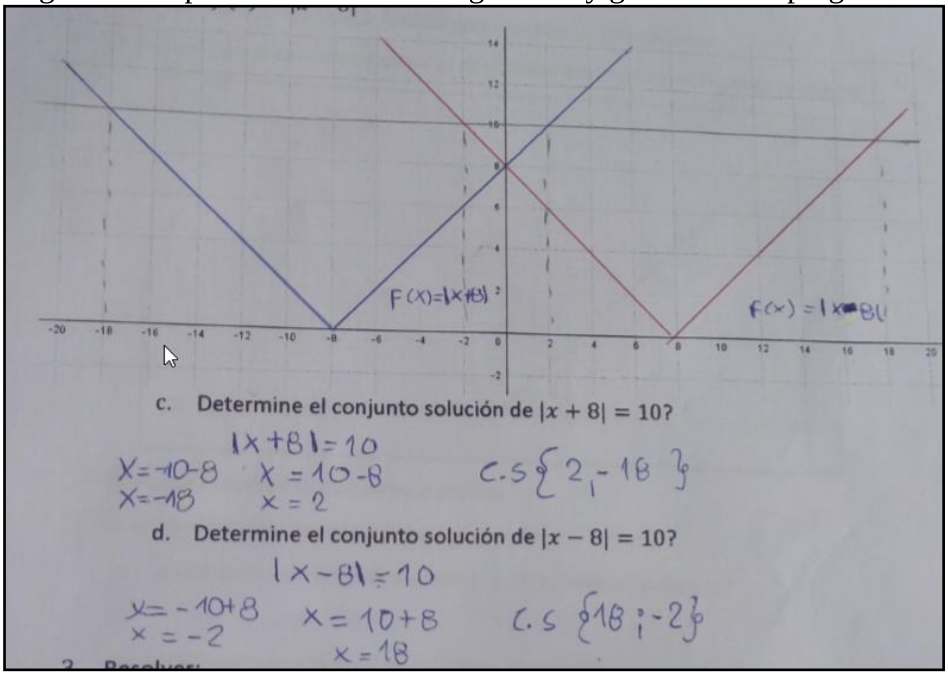
d. Determine el conjunto solución de $|x - 8| = 10$?

C.S {-2 ;+18}

Fuente: Propio.

El otro tipo de comportamiento, que se observó sólo en diez estudiantes, fue que primero resolvieron de forma algebraica, y utilizaron la gráfica sólo para verificar sus respuestas, esto se puede ver como una forma de validación que utilizaron los estudiantes. En algunos casos se observa que hubieron correcciones en la parte algebraica, posiblemente, hicieron correcciones al ver que sus resultados no cumplían. En la siguiente figura, se observa el segundo tipo de comportamiento que se observó en esta pregunta

Figura 6: Respuesta con solución algebraica y gráfica en las preguntas 2



Fuente: Propio.

Se observó el comportamiento esperado en un grupo de estudiantes, la mayoría de los estudiantes no recurrieron a trabajar algebraicamente, sino que resolvieron la ecuación gráficamente, algo que los estudiantes no hacían antes ante una ecuación con valor absoluto (como se observó en los resultados del cuestionario antes de aplicar la secuencia didáctica). Se observó otro comportamiento no esperado, otro grupo de diez estudiantes, resolvió algebraicamente primero, pero luego verificaron sus resultados gráficamente, algunos utilizaron la solución gráfica para corregir su operación algebraica. Esto es característico de la fase de validación.

El argumento de la función al cambiar de valores entre variables a una expresión algebraica del tipo $x+a$, sí actuó como variable didáctica, porque modificó el comportamiento de los estudiantes, que inicialmente resolvían las ecuaciones de forma algebraica con tipo de error de regla mecánica, y que luego cambian a resolución gráfica llegando a las respuestas correctas.

5. Análisis de las concepciones de los alumnos sobre el concepto valor absoluto

Como destacamos en la introducción, el objetivo es estudiar las concepciones sobre el concepto de valor absoluto evidenciadas por los estudiantes que participaron de la experimentación de la secuencia didáctica algunos de cuyos resultados fueron discutidos en esta sección. En las siguientes secciones explicaremos acerca del análisis estadístico implicativo y mostraremos los resultados del análisis cohesitivo de las respuestas del cuestionario que se realizó a los estudiantes después de aplicar la secuencia de actividades. Donde se muestra las implicancias que hay entre las concepciones que tienen los estudiantes acerca del valor absoluto y las respuestas que presentan los estudiantes cuando resuelven ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

5.1. Análisis estadístico implicativo

El Análisis Estadístico Implicativo (ASI) es un método de análisis que ha sido desarrollado por Regis Gras y sus colaboradores desde 1979. Almouloud (2008, p.304) señala lo siguiente:

> Se recurre a los análisis estadísticos de datos multidimensionales en el intento de buscar sintetizar y estructurar los datos multidimensionales, a fin de identificar las variables estadísticas (y/o didácticas), los factores en juego, sus relaciones de jerarquía, entre otros aspectos. También, para evidenciar la dinámica de los comportamientos de alumnos o profesores en situaciones de resolución de problemas (Traducción propia).

En esta investigación, aplicamos el análisis estadístico con la finalidad de:

- Identificar el tipo de comportamientos que presentan los alumnos, en términos de errores e implicancias entre tipos de errores, cuando trabajan ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, desde el contexto funcional.
- Complementar el análisis a posteriori de la situación didáctica diseñada.

5.2. CHIC (Classificação Hierárquica, Implicativa e Coesitiva)

El CHIC es un software desarrollado inicialmente por Regis Gras en 1985, perfeccionado por Saddo Almouloud en 1992, y actualizado por Raphael Couturier desde el año 2008. Este software, es una herramienta estadística que permite la aplicación del método ASI. De acuerdo a Couturier (2009), la función principal de este software es extraer reglas de asociación entre variables a partir de un conjunto de datos.

> ASI, es un método de análisis no simétrico de datos, el que permite, a partir de un conjunto de datos que interrelaciona una población de sujetos u objetos con un conjunto de variables, la extracción y estructuración del conocimiento en forma de normas y reglas generalizadas y, a partir de la contingencia de estas reglas, la explicación y en consecuencia una determinada previsión en distintas ramas del saber (ZAMORA, GREGORI & ORÚS, 2009, p. 77).

El CHIC, permite organizar las implicaciones en forma de un árbol jerárquico orientado (grafo implicativo), y también permite obtener un árbol de similaridad (no orientado) basado en la semejanza de las variables. Luego que el software CHIC calcula el conjunto de todas las reglas en función de los parámetros elegidos, se puede construir un árbol a partir de esas reglas, a cada regla se denominará clase, e incorpora dos variables en su forma simple.

> En cada nivel de la clasificación, CHIC elige la clase que posee la mayor intensidad (de similaridad o implicación). A continuación, en cada etapa, CHIC calcula un conjunto de nuevas clases a partir de las clases presentes en la jerarquía. Para crear una nueva clase, se une una clase existente, bien con una variable que no ha sido incorporada hasta el momento, bien con alguna otra clase de la jerarquía (COUTURIER, 2009, p.69).

En cada nivel de clasificación CHIC selecciona la clase que tiene mayor intensidad (de similaridad o cohesión).

> Sin embargo, cada par de variables presentes en la agregación de dos clases debe tener una intensidad válida. Por ejemplo, la formación de la clase ((a, b), c) requiere que las clases (a, c) y (b, c) tengan un sentido según el método de cálculo elegido (similaridad o implicación). La clase ((a, b), c) representa la regla (a ⇒ b) ⇒ c en el análisis implicativo y, con el análisis de similaridades, representa el hecho de que a y b sean similares y que esta clase es similar a c (COUTURIER, 2009, p. 69).

¿Porqué utilizar CHIC?

De acuerdo a Montes y Ursini (2013), el análisis estadístico implicativo tiene el propósito de responder la siguiente pregunta ¿Si un sujeto presenta cierta característica, tiene también otra?, es decir, permite encontrar y resaltar algunas tendencias en las características de los sujetos que se estudia.

> La mayor riqueza de utilizar el análisis implicativo en el estudiante o un grupo de estudiantes, es que los argumentos para decir que la actitud que tiene un

> estudiante o un grupo de estudiantes hacia las matemáticas, no provienen de una interpretación subjetiva del que analiza, sino de una interpretación basada en un método estadístico implicativo (MONTES Y URSINI, 2013, p. 247).

En ese sentido, la interpretación del análisis implicativo, complementará los resultados que se obtendrán mediante la aplicación de la ingeniería didáctica.

5.3. Análisis Cohesitivo

El análisis cohesitivo es uno de los métodos de análisis estadístico implicativo. Almouloud (2008, p. 310) menciona lo siguiente:

> Este método permite hacer un análisis de relaciones intra e inter clases de respuestas. El índice de implicación entre dos variables conlleva el cálculo de cohesión de la clase, el cual da cuenta del nivel de implicación orientada dentro de una clase de variables y es traducida a noción de meta-regla o regla sobre regla (Traducción propia).

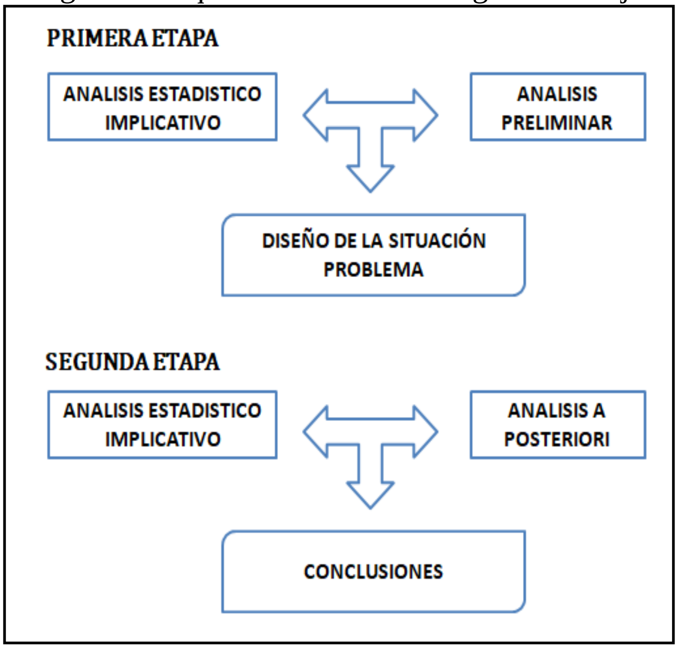
Uno de los análisis de permite realizar el CHIC es el árbol cohesitivo el cual muestra los resultados numéricos de los niveles decrecientes de cohesión y el árbol propiamente dicho, el cual indica los niveles de cohesión de las clases. Almouloud (2008, p. 310) explica que:

> El árbol cohesitivo traduce gráficamente el acoplamiento sucesivo de las clases constituidas de acuerdo con el criterio de cohesión que es decreciente según los niveles de jerarquía. Un intervalo de confianza, de parada sobre la cohesión, permite evitar la constitución de clases que no tienen sentido implicativo o que no producen jerarquías clásicas (Traducción propia).

5.4. Metodología

La investigación se realiza con 36 estudiantes de una institución educativa en Lima. Seguimos una investigación mixta debido a que incorpora el análisis estadístico el cual utiliza de reglas de asociación con métrica probabilista, cuyos índices de asociación se determinan en base a sus respectivas probabilidades, calculadas según las distribuciones Binomial o Poisson, con aspectos de la ingeniería didáctica. En la Figura 7 se muestra una representación de la articulación entre el análisis estadístico implicativo y la ingeniería didáctica.

Figura 7. Esquema de la metodología de trabajo



Fuente: Propia.

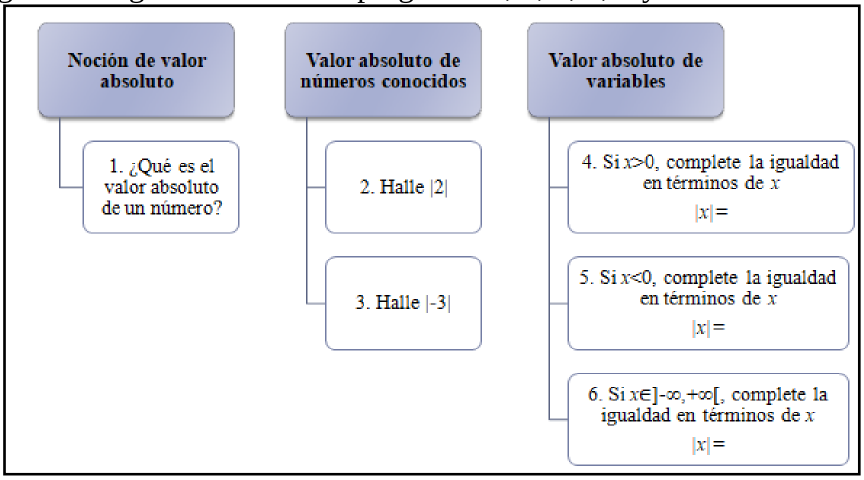
En este artículo, nos enfocaremos en explicar el trabajo realizado en la segunda etapa. Los pasos que se deben seguir para realizar el análisis estadístico implicativo es el siguiente:

> Las fases fundamentales de un análisis de datos multidimensionales: i) diseñar el instrumento de recolección de datos ii) organización y exploración, iii) tratamiento de los instrumentos y iv) interpretación de los datos de acuerdo con los objetivos de la investigación (GRAS & ALMOULOUD, 2002, p. 70).

5.4.1. Diseño del cuestionario

Nuestro instrumento de recolección de datos es un cuestionario, el cual se detalla más adelante en la Tabla 3, el cuestionario tiene 14 preguntas, la pregunta 1 se ha diseñado con la finalidad de conocer cuál es la noción de valor absoluto que tienen los estudiantes, las siguientes preguntas de la 2 a la 14 tienen como objetivo determinar cuál es el comportamiento que tienen los estudiantes en términos de estrategias de solución y/o tipos de errores cuando resuelven problemas con valor absoluto. Sin embargo, la diferencia está, en que la preguntas 2 y 3 se les pide calcular el valor absoluto de números enteros conocidos, pero en las preguntas 4, 5, y 6, se les pide calcular el valor absoluto de variables, en la pregunta 4 la variable es positiva, en la pregunta 5 la variable es negativa y en la pregunta 6, la variable es positiva y negativa. Con estas preguntas buscamos identificar la presencia del obstáculo epistemológico que consiste en entender al valor absoluto de un número como el número sin signo.

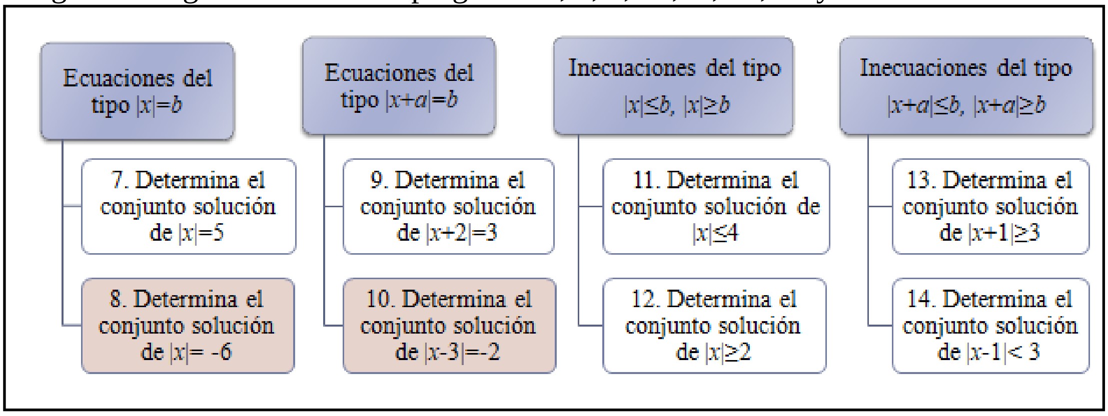
Figura 8: Organización de las preguntas 1, 2, 3, 4, 5 y 6 del cuestionario



Fuente: Propia.

En las 7 y 8 los estudiantes resuelven ecuaciones del tipo $|x|=b$, En las preguntas 9 y 10 los estudiantes resuelven ecuaciones del tipo $|x+a|=b$, sin embargo, tanto las preguntas 8 y 10 como se observan en la Figura 9 tienen algo en común, estas preguntas no tienen solución, nuestra intención con estas preguntas es identificar si hay presencia o ausencia del obstáculo didáctico “el valor absoluto es un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente”. Las preguntas 11 y 12 los estudiantes resuelven inecuaciones del tipo $|x|<b$ y $|x|>b$ respectivamente. En las preguntas 13 y 14 los estudiantes resuelven inecuaciones del tipo $|x+a|<b$ y $|x+a|>b$ respectivamente. La finalidad de estas preguntas es observar la presencia o ausencia de errores asociados al obstáculo epistemológico y didáctico detallado líneas arriba.

Figura 9: Organización de las preguntas 7, 8, 9, 10,11, 12, 13 y 14 del cuestionario



Fuente: Propia.

En el siguiente cuadro se muestra la codificación de las preguntas, que servirán luego para la parte interpretativa.

5.4.2. Organización y exploración

En esta etapa se realizó la codificación de las variables y se realiza la aplicación del cuestionario. Las preguntas que se han diseñado en el cuestionario son abiertas, se han previsto las posibles respuestas, ya sean estas respuestas correctas o no, considerando además lo que han reportado las investigaciones previas (ver Tabla 2).

Cada pregunta y su posible respuesta es considerada una variable. Así, por ejemplo, para la pregunta ¿Qué es el valor absoluto de un número?, el código q1r1, corresponde al valor absoluto de un número es la distancia del número a cero. Se obtuvieron en total 77 variables. Estas variables son tratadas como variables binarias donde 0 representa la ausencia de la variable y 1 representa la presencia de la variable. Las respuestas de los 36 estudiantes fueron registradas en una hoja de datos Excel.

5.4.3. Tratamiento de los datos

En esta etapa se registra los resultados y se realiza el tratamiento de los datos. Para ello se considera lo señalado por Souza (2016, p. 201)

> Para que CHIC pueda efectuar los cálculos necesarios para la construcción de los agrupamientos y la representación de los datos, es preciso elaborar una

hoja Excel® (Office para Macintosh) de Microsoft, cuya extensión sea CVS" (delimitado por comas, con la finalidad de que los datos se puedan adecuar al banco de datos para el procesamiento y para el análisis, pues solamente de esa forma el archivo podrá ser abierto por el software CHIC. El archivo que contenga los datos debe, obligatoriamente, presentar en cada columna un tipo de variable y en cada línea, un único individuo.

Antes de trabajar con CHIC se realizó la limpieza de los datos de la hoja de Excel® obtenida, donde se eliminó aquellas variables no discriminantes, como aquellas con suma igual a cero. Por ejemplo, en la Tabla 2, se observa que no hubo presencia de la variables q1r5 y q2r4, por lo cual se eliminó esas columnas de la hoja de datos.

Tabla 2: Registro de resultados de las preguntas 1 y 2 del cuestionario en hoja Excel®

	q1r1	q1r2	q1r3	q1r4	q1r5	q2r1	q2r2	q2r3	q2r4
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	1	0
3	0	1	0	0	0	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0	1	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	0	1	0	0
7	0	0	1	0	0	0	1	0	0
8	0	0	1	0	0	0	1	0	0
9	0	0	1	0	0	0	1	0	0
10	0	1	0	0	0	0	0	1	0
11	0	0	1	0	0	0	1	0	0
12	0	0	1	0	0	1	0	0	0
13	0	0	1	0	0	0	0	1	0
14	0	0	1	0	0	0	1	0	0
15	0	0	1	0	0	0	1	0	0
16	0	1	0	0	0	1	0	0	0
17	1	0	0	0	0	1	0	0	0
18	0	0	1	0	0	0	1	0	0
19	1	0	0	0	0	0	1	0	0
20	1	0	0	0	0	1	0	0	0
21	0	1	0	0	0	0	1	0	0
22	0	0	1	0	0	1	0	0	0
23	0	0	1	0	0	1	0	0	0
24	0	0	0	1	0	0	1	0	0
25	0	1	0	0	0	0	1	0	0
26	0	0	1	0	0	0	1	0	0
27	0	1	0	0	0	0	1	0	0
28	1	0	0	0	0	0	1	0	0
29	0	0	1	0	0	0	0	1	0
30	0	0	1	0	0	0	1	0	0
	5	6	17	2	0	7	19	4	0

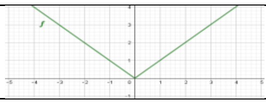
Fuente: Propia

Tabla 3: Codificación de variables

N°	Variable	Posibles Respuestas	Código de las variables	Descripción
1	¿Qué es el valor absoluto de un número?	Es la distancia del número a cero.	q1r1	Noción del valor absoluto desde el contexto geométrico
		Es el número sin el signo Es el mismo número si es positivo, pero si el número es negativo es su opuesto aditivo	q1r2	Noción del valor absoluto desde el contexto aritmético
		El valor absoluto es una función de manera que $f(x)=x$, $x\geq 0$ o $-x$, $x<0$, cuya representación gráfica es la siguiente:	q1r3	Noción del valor absoluto desde el contexto funcional

HORIZONTES - REVISTA DE EDUCAÇÃO

e-ISSN: 2318-1540

				
			q1r4	Sin respuesta
		Otras respuestas no esperadas	q1r5	Noción equivocada de valor absoluto

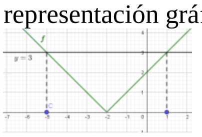
N°	Pregunta	Posible Respuesta	Código de variables	Descripción
2	Resuelve |2|=	2	q2r1	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto
		-2	q2r2	**Error de interpretación de definición**. Creemos que este error se puede presentar cuando los estudiantes interpretan de manera equivocada, parte de la siguiente definición "Si un número es positivo, su valor absoluto es igual al número, pero si es negativo, entonces su valor absoluto es igual al opuesto aditivo de él" (Ministerio de educación, 2016). De acuerdo a Chiaguri, Fracazina & Furinguetti (1990), los alumnos no se percatan de la palabra condicional "si" dada en la definición de valor absoluto. En este caso, pueden no percatarse de que el número debe ser negativo para que el valor absoluto sea el opuesto aditivo del número.
		2 0 -2	q2r3	**Error "regla mecánica"**. Este error está asociado al obstáculo didáctico que consiste en entender el valor absoluto de un número como un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente (Gagatsis & Panaoura, 2011).
			q2r4	**Sin respuesta**
		Respuestas incorrectas no esperadas	q2r5	**Otro tipo de error.**
3	Resuelve $\|-3\|$=	3	q3r1	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto
		-3	q3r2	**Error de interpretación de definición**. Las razones son las mismas que se han dado para este tipo de error en la pregunta 2
		3 o -3	q3r3	**Error "regla mecánica"**. Las razones son las mismas que se han dado para este tipo de error en la pregunta 2
			q3r4	**Sin respuesta**
		Respuestas incorrectas no esperadas	q3r5	**Otro tipo de error.**
4	Si $x >$ 0, complete la	x	q4r1	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto

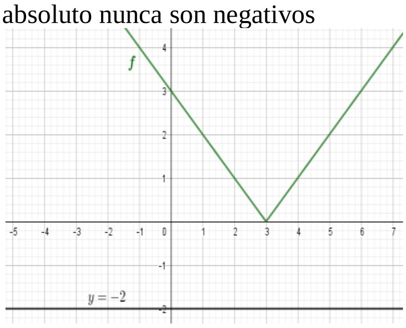
	igualdad en términos de x, $\|x\| =$	-x	q4r2	**Error de interpretación de definición**. Las razones son las mismas que se dieron en este mismo tipo de error en la pregunta 2
		x o $-x$	q4r3	**Error "regla mecánica"**. Las razones son las mismas que se dieron en este mismo tipo de error en la pregunta 2
			q4r4	**Sin respuesta**
		Valores numéricos como 1, 2, 3,…	q4r5	**Error de interpretación de pregunta.** Problemas de interpretación de la frase "en términos de *x*"

N°	Pregunta	Posible Respuesta	Código de variables	Descripción
5	Si $x < 0$, complete la igualdad en términos de x, $\|x\| =$	x	q5r1	**Error epistemológico**. Este error está asociado a la concepción de que el valor absoluto de un número es el número sin signo.
		-x	q5r2	**Sin error**. Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto
		x o $-x$	q5r3	**Error "regla mecánica"**. Las razones son las mismas que se dieron en este mismo tipo de error en la pregunta 2
			q5r4	**Sin respuesta**
		Valores numéricos como -1, -2, -3,…	q5r5	**Error de interpretación de pregunta y de concepción de valor absoluto.** Problemas de interpretación de la frase "en términos de *x*" y además de concepción de valor absoluto
6	Si $x \in]-\infty, +\infty[$, complete la igualdad en términos de x, $\|x\| =$	x	q6r1	**Error epistemológico**. Las razones son las mismas que las dadas en la pregunta 5 en este mismo tipo de error.
		-x	q6r2	**Error de interpretación de definición**. Las razones son las mismas que se dieron en este mismo tipo de error en la pregunta 2
		x o $-x$	q6r3	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto
			q6r4	**Sin respuesta**
		Valores numéricos como …,-2,-1, 0,1, 2,...	q6r5	**Error de interpretación de la pregunta y de concepción de valor absoluto.** Problemas de interpretación de la frase "en términos de *x*" y además de concepción de valor absoluto
7	Determine el conjunto solución de $\|x\| = 5$	C.S.={5}	q7r1	**Error de interpretación de definición**. Las razones son las mismas que se han dado para este tipo de error en la pregunta 2
		C.S.={-5}	q7r2	**Error de interpretación de definición**. Las razones son las mismas que se han dado para este tipo de error en la pregunta 2
		C.S.={-5 o 5}	q7r3	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto
			q7r4	**Sin respuesta.**

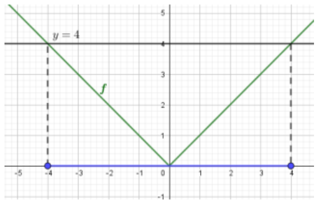
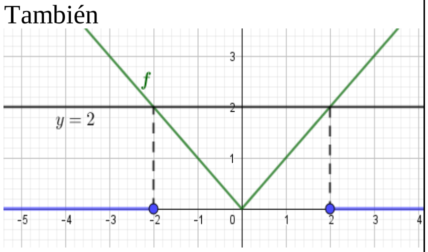
		Otras respuestas no esperadas	q7r5	**Otro tipo de error.**

N°	Pregunta	Posible Respuesta	Código de variables	Descripción
8	Determine el conjunto solución de $\|x\| = -6$	C.S={6}	q8r1	**Error de interpretación de definición**. Las razones son las mismas que las dadas en la pregunta 2 de este mismo tipo de error.
		C.S.={-6}	q8r2	**Error de interpretación de definición**. Las razones son las mismas que las dadas en la pregunta 2 de este mismo tipo de error.
		C.S.={-6 o 6}	q8r3	**Error "regla mecánica".** Este error está asociado al obstáculo didáctico que consiste en entender el valor absoluto de un número como un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente (Gagatsis & Panaoura, 2011).
		C.S={ } o C.S.=Ø	q8r4	**Sin error**. Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto.
		Otras respuestas no esperadas	q8r5	**Otro tipo de error.**
			q8r6	**Sin respuesta**.
9	Determine el conjunto solución de $\|x + 2\| = 3$	*x*+2=3 entonces *x*=1 Por lo tanto C.S={1}	q9r1	**Error de interpretación de definición**. La razón es la misma que se explicó en este mismo tipo de error en la pregunta 7
		x-2=3 entonces *x*=5 o –*x*-2=3 entonces *x*= -5 Por lo tanto C.S={-5,5} También, *x*+2=3 entonces *x*=1 o *x*-2=3 entonces *x*=5 Por lo tanto C.S={1,5}	q9r2	**Error "regla mecánica".** Este error está asociado al obstáculo didáctico que consiste en entender el valor absoluto de un número como un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente (Gagatsis & Panaoura, 2011).
		Desde el contexto aritmético *x*+2=3 entonces *x*=1 o *x*+2= -3 entonces *x*= -5 C.S.={-5,1} Desde el contexto métrico |*x*+2|=*d*(*x*,2), de manera que *x* es un punto de la recta, de manera que al sumarle 2 unidades la distancia de ese número a 0 es 3, por lo tanto *x*=1 o *x*=-5. Por lo tanto C.S.={-5,1}	q9r3	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto.
			q9r4	**Sin respuesta.**
		Otras respuestas no esperadas	q9r5	**Otro tipo de error**
		Desde el contexto funcional |*x*+2|=*x*+2 si *x*≥-2 o |*x*+2|=-(*x*+2) si *x*< -2 Por tanto	q9r6	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto.

		x+2=3⇒x=1 o –(x+2)=3⇒x=-5 También, con apoyo de una representación gráfica  Luego, C.S.={-5,1}		

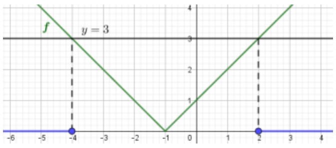
N°	Pregunta	Posible Respuesta/Procedimiento	Código de variable	Descripción
10	Determina el conjunto solución de $\lvert x-3\rvert=-2$	x-3= -2 entonces x=1 Por lo tanto C.S={1}	q10r1	**Error de interpretación de definición.** Las razones son las mismas dadas en la pregunta 7, para este mismo tipo de error.
		x-3=-2 entonces x=1 o –x+3=-2 entonces x=5. Por lo tanto C.S={1,5} También x-3= -2 entonces x=1 o –x-3=-2 entonces x= -1. Por lo tanto C.S.={-1,1}	q10r2	**Error "regla mecánica".** Este error está asociado al obstáculo didáctico que consiste en entender el valor absoluto de un número como un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente (Gagatsis & Panaoura, 2011).
		El valor absoluto de un número es el número sin signo, el resultado de un valor absoluto no puede ser negativo, por lo tanto C.S.={ } o C.S.=Ø El valor absoluto es la distancia de un número a cero, la distancia nunca es negativa, por lo tanto C.S.={ } o C.S.=Ø	q10r3	**Sin error**. Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto en contexto aritmético o métrico
			q10r4	**Sin respuesta.**
		Otras respuestas no esperadas	q10r5	**Otro tipo de error.**
		Los valores de la función valor absoluto nunca son negativos  Por lo tanto C.S.={ } o C.S.=Ø	q10r6	**Sin error**. Debido a una correcta interpretación de la definición de valor absoluto en contexto funcional
11	Determina el conjunto solución de $\lvert x\rvert\leq 4$	$x\leq\pm 4$ O también $x\leq -4$ o $x\leq 4$ Por lo tanto C.S=]-∞,4]	q11r1	**Error "regla mecánica".** Este error está asociado al obstáculo didáctico que consiste en entender el valor absoluto de un número como un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente (Gagatsis & Panaoura, 2011).
		$x\leq 4$ Por lo tanto C.S=]-∞,4]	q11r2	**Error epistemológico**, asociado a la noción del valor absoluto como el número sin signo, error reportado por Chiarugi (1990) en es que |x+1|=x+1

		$-4 \leq x \leq 4$	q11r3	**Sin error.** Solución correcta, debido al uso de propiedad de valor absoluto, si $\|x\|<a$ entonces $-a < x < a$

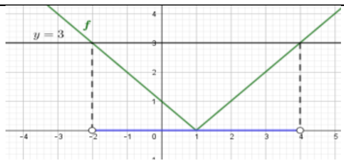
N°	Pregunta	Posible Respuesta/Procedimiento	Código de variable	Descripción
11	Determina el conjunto solución de $\|x\| \leq 4$	$\|x\| = x$ si $x \geq 0$ o $\|x\| = -x$ si $x < 0$ Por tanto $x \leq 4$ o $-x \leq 4$ entonces $-4 \leq x \leq$ 4 También  Luego, C.S=[-4,4]	q11r4	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación del valor absoluto como función, apoyado en una representación gráfica
			q11r5	**Sin respuesta**
		Otras respuestas no esperadas	q11r6	**Otro tipo de error**
12	Determina el conjunto solución de $\|x\| \geq 2$	$x \geq \pm 2$ También $x \geq -2$ o $x \geq 2$ Por lo tanto C.S=[2,+∞[	q12r1	**Error "regla mecánica".** Las razones de este error son las mismas que se han explicado en la pregunta 11 para este mismo tipo de error
		$x \geq 2$ Entonces, C.S=[2,+∞[	q12r2	**Error epistemológico** asociado a la noción del valor absoluto como el número sin signo. Las razones son las mismas que se han explicado en la pregunta 11 para este mismo tipo de error.
		$x \leq -2$ o $x \geq 2$ Por lo tanto C.S.=]-∞,-2]U[2,+∞[	q12r3	**Sin error**. Solución correcta mediante uso de propiedad de valor absoluto, si $\|x\| \geq a$ entonces $x \leq -a$ o $x \geq a$
		$\|x\| = x$ si $x \geq 0$ o $\|x\| = -x$ si $x < 0$ Por tanto $x \geq 2$ o $-x \geq 2$ entonces $x \leq$ -2 o $x \geq 2$ También  Luego, C.S.=]-∞,-2]U[2,+∞[	q12r4	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación del valor absoluto como función, apoyado en una representación gráfica
			q12r5	**Sin respuesta**
		Otras respuestas no esperadas	q12r6	**Otro tipo de error**
13	Determina el conjunto	$x + 1 \geq \pm 3$ Por lo tanto, C.S=[3,+∞[También	q13r1	**Error "regla mecánica".** Las razones de este error son las mismas que se han

HORIZONTES - REVISTA DE EDUCAÇÃO
e-ISSN: 2318-1540

	solución de $\lvert x+1\rvert \geq 3$	$x+1\geq 3$ entonces $x\geq 2$ o $x+1\geq -3$ entonces $x\geq -4$ Por lo tanto C.S.=[2,+∞[		explicado en la pregunta 11 para este mismo tipo de error
		$x+1\geq 3$ entonces $x\geq 2$ Por lo tanto, C.S.=[2,+∞[	q13r2	**Error epistemológico** asociado a la noción del valor absoluto como el número sin signo. Las razones son las mismas que se han explicado en la pregunta 11 para este mismo tipo de error.

N°	Pregunta	Posible Respuesta/Procedimiento	Código de variable	Descripción
13	Determina el conjunto solución de $\lvert x+1\rvert \geq 3$	x+1≤ -3 o x+1≥3 entonces x≤-4 o x≥2 Por lo tanto]-∞,-4]U[2,+∞[	q13r3	**Sin error**. Solución correcta mediante uso de propiedad de valor absoluto, si |x|>a entonces x<-a o x>a
		$\lvert x+1\rvert = x$ si $x\geq -1$ o $\lvert x\rvert = -x-1$ si $x<-1$ Por tanto $x+1\geq 3$ o $-x-1\geq 3$ Entonces $x\leq -4$ o $x\geq 2$ Por lo tanto C.S=]-∞,-4]U[2,+∞[También  Luego, C.S=]-∞,-4]U[2,+∞[	q13r4	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación del valor absoluto como función, apoyado en una representación gráfica
			q13r5	**Sin respuesta**
		Otras respuestas no esperadas	q13r6	**Otro tipo de error**
		x-1 < ±3 entonces C.S.=]-∞,3[También x-1<3 o x-1<-3 entonces x<4 o x< -2 entonces x< -2. Por lo tanto C.S.=]-∞,-2[	q14r1	**Error "regla mecánica"**. Las razones de este error son las mismas que se han explicado en la pregunta 11 para este mismo tipo de error
		x-1<3 entonces x<4 Por lo tanto, C.S.=]-∞,4[También x+1<3 entonces x<2 Por lo tanto C.S.=]-∞,-2[	q14r2	**Error epistemológico**. Error asociado a la noción del valor absoluto como el número sin signo. Las razones son las mismas que se han explicado en la pregunta 11 para este mismo tipo de error.
		$-3<x-1<3$ entonces $-2<x<4$ Por lo tanto, C.S.=]-2,4[	q14r3	**Sin error**. Solución correcta mediante uso de propiedad de valor absoluto, si |x|<a entonces –a<x<a
		$\lvert x-1\rvert = x-1$ si $x\geq 1$ o $\lvert x-1\rvert = -x+1$ si $x<1$ Por tanto $x-1<3$ o $-x+1<2$ Entonces $-2<x<4$ Por lo tanto C.S.=]-2,4[También	q14r4	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación del valor absoluto como función, apoyado en una representación gráfica

HORIZONTES - REVISTA DE EDUCAÇÃO
e-ISSN: 2318-1540

		 Luego, C.S.=]-2,4[		
			q14r5	**Sin respuesta**
		Otras respuestas no esperadas	q14r6	**Otro tipo de error**

Fuente: Propio.

Luego de realizada la limpieza de los datos, se procede a abrir el software CHIC, se selecciona nuevo tratamiento, y el archivo CSV que tiene los datos a analizar. Se escoge como tratamiento la opción árbol cohesitivo. Al seleccionar este tratamiento, se obtiene tres ventanas, la primera muestra el árbol cohesitivo, la segunda muestra la media, desviación estándar, frecuencia por pares de variables, coeficiente de correlación, índices de cohesión, clasificación por nivel indicando el índice de cohesión de todas las relaciones de las variables, clases y subclases y los nodos significativos. La tercera ventana, ofrece casi los mismos tipos de datos que la segunda ventana de forma tabular.

5.4.4. Interpretación de los resultados

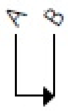
Para realizar la interpretación de los resultados debemos tener en cuenta el nivel de cohesión y los nodos significativos. Respecto al nivel de cohesión, que se refiere a la probabilidad de esa regla, Almouloud (2008, p. 309) menciona "La transitividad, que dirige la interpretación en términos de caminos, es aceptada para un valor de confianza mayor o igual a 0.5" (Traducción propia).

Zamora (2009, p. 77) define a los nodos significativos de la siguiente manera "Los nodos significativos son los niveles correspondientes a una clasificación compatible lo mejor posible con los valores y la calidad del agrupamiento obtenido".

De acuerdo a Almouloud (2008, p. 311) los nodos significativos son criterios estadísticos que ayudan en la parte interpretativa del árbol de cohesión.

> Las nociones de nivel y de nodos significativos, marcados con una flecha roja, muestra para el usuario las clases en las que debe enfocar su atención, por el hecho de que estarán en mejor conformidad con los indicios de implicancia iniciales (Traducción propia).

Figura 10: Ejemplo de regla A⇒B en árbol coesitiva



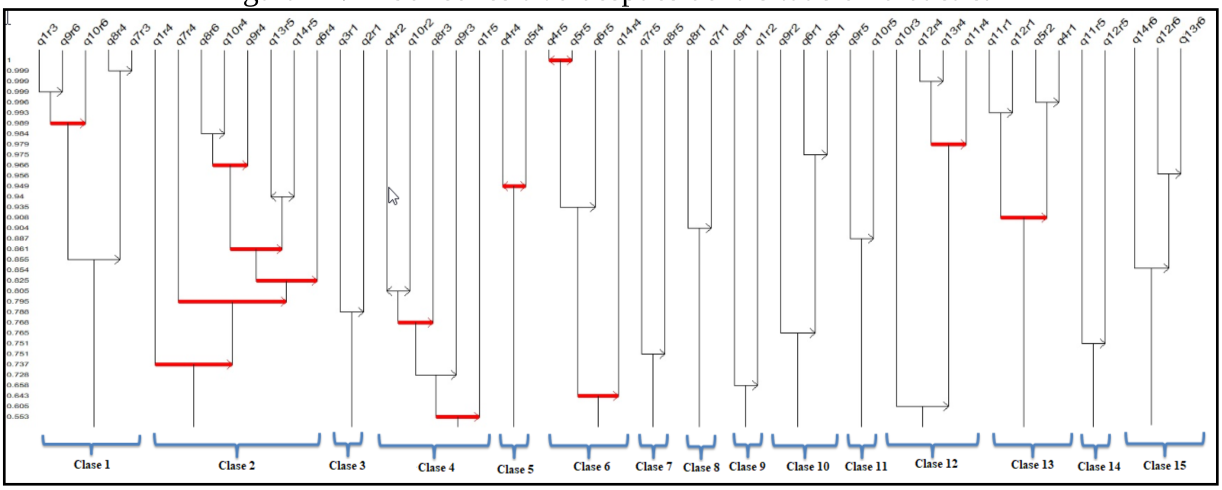
Fuente: Propia.

En el análisis cohesitivo cada regla identificada, será interpretada como sigue: “Si A entonces probablemente B” con índice de cohesión igual a ϰ. Eso significa que la presencia de la variable A puede implicar la presencia de la variable B con una probabilidad igual a ϰ.

Resultados

En la Figura 11 se observa el árbol cohesitivo completo que se ha obtenido con los resultados de las respuestas de los estudiantes del cuestionario después de aplicar la situación problema. La figura muestra 35 reglas o clases, de los cuales 13 son significativos.

Figura 71: Árbol cohesitivo después de la situación didáctica

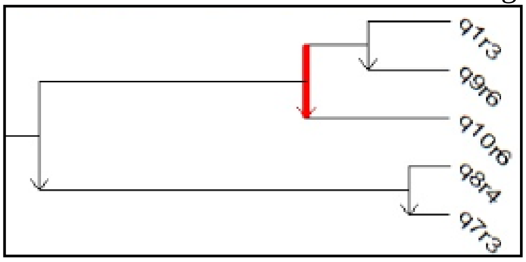


Fuente: Propio.

En este artículo, sólo se presentan los resultados de interpretación de las clases 1, 5 y 13 debido a que, los resultados sirvieron para complementar el análisis a posteriori de la situación didáctica.

Clase 1 ((q1r3→q9r6)→q10r6)→(q8r4→q7r3)-nivel de cohesión 0.855

Figura 82: Clase 1 del árbol coesitiva de la figura 11



Fuente: Propio.

Es importante notar que en esta clase aparece la variable q1r3, la cual estuvo ausente en el en los resultados del cuestionario aplicado antes de realizar la secuencia didáctica, esta variable está asociada a la concepción funcional del valor absoluto. Podemos decir, que esta es la diferencia principal entre los resultados del cuestionario antes y después de aplicar la secuencia didáctica.

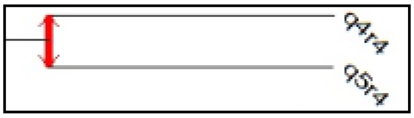
La regla (q1r3→q9r6)→q10r6 muestra que aquellos estudiantes que tienen una concepción funcional del valor absoluto, probablemente también resolvieron gráficamente la ecuación $|x+2|=3$, obteniendo resultados correctos. Aquellos estudiantes que mostraron este comportamiento probablemente también respondieron correctamente a la ecuación $|x-3|= -2$, debido a que al resolver gráficamente la ecuación no encontraron solución, y expresaron correctamente que el conjunto solución era el vacío.

La regla q8r4→q7r3, muestra que aquellos estudiantes que resolvieron de forma correcta la ecuación $|x|= -6$, probablemente también respondieron de forma correcta a la ecuación $|x|=5$, esto debido a que los estudiantes han recurrido a la solución gráfica de las ecuaciones.

Finalmente la clase ((q1r3→q9r6)→q10r6)→(q8r4→q7r3) muestra que aquellos alumnos que tiene una concepción funcional de valor absoluto, probablemente resuelvan correctamente las ecuaciones $|x|=b$ y $|x+a|=b$. Esto con un nivel de cohesión de 0.885. Esto debido a que la concepción funcional, permite que se apoyen en una representación gráfica, para poder determinar la solución. Esto verifica las recomendaciones de Wilhelmi et al. (2007), quienes recomiendan que el modelo funcional debiera ser el predominante en la enseñanza del valor absoluto, debido a que la representación gráfica es fundamental para la comprensión de esta noción. Es importante señalar que, ninguno de los estudiantes respondieron correctamente a las ecuaciones |*x*|= -6, |*x*-3|= -2 antes de aplicar la secuencia didáctica, sin embargo luego de aplicar la secuencia didáctica los estudiantes responden de forma correcta a las ecuaciones |*x*|= -6 |*x*-3|= -2, de esta manera vemos que la enseñanza del valor absoluto como función evita el obstáculo didáctico mencionado por Gagatsis y Panaoura (2014), y que además el valor de la función funcionó como una variable didáctica puesto que produjo respuestas distintas.

Clase 5 (q4r4→q5r4)-nivel de cohesión 0.949

Figura 93: Clase 5 del árbol cohesitivo de la figura 11

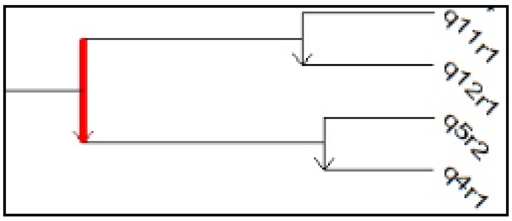


Fuente: Propio.

Aquellos alumnos que no respondieron la pregunta cuál es el |*x*| si *x* es positivo, probablemente tampoco respondieron a la pregunta cuál es el |*x*| si *x* es negativo. El nivel de cohesión es 0.949. Este grupo representa a los estudiantes que no dieron respuesta a las preguntas donde tenían que expresar su respuesta en términos de una variable. Al respecto Chiarugi et al. (1990) mencionan que las dificultades en el trabajo con el valor absoluto se manifiestan cuando los estudiantes pasan a problemas algebraicos con variables.

Clase 13 (q11r1→q12r1)→(q5r2→q4r1)-nivel de cohesión 0.908

Figura 104: Clase 13 del árbol cohesitivo de la figura 11



Fuente: Propio.

La regla q11r1→q12r1 muestra que aquellos estudiantes que presentaron error del tipo "regla mecánica" al resolver la inecuación |*x*|≤4, probablemente también presente el mismo tipo de error al resolver la inecuación |*x*|≥2. La regla q5r2→q4r1 muestra que los estudiantes que no presentaron error al resolver |*x*| si *x* es negativo, probablemente no presenten error al resolver

$|x|$ si x es positivo. Finalmente la clase (q11r1→q12r1)→(q5r2→q4r1) muestra que los estudiantes que presenta tipo de error regla mecánica al resolver inecuaciones de la forma $|x|\leq b$ o $|x|\geq b$, probablemente no presentan error al trabajar ecuaciones con variables. Es decir, hubo un grupo de estudiantes que al trabajar ecuaciones no tuvo dificultades, sin embargo al trabajar con inecuaciones el obstáculo epistemológico de creer que el valor absoluto es un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente vuelve a aparecer, debido a que son problemas de mayor dificultad.

6. Consideraciones finales

Para realizar la validación de las hipótesis que se tenía en este trabajo, en términos de suponer qué variables lograrían modificar el comportamiento de los estudiantes, hemos hecho uso de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori, pero también hemos utilizado como recurso el análisis cohesitivo, esto está sustentado en base a la señalado por Artigue (1966, p. 193)

> El análisis a posteriori que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. Además, como ya lo habíamos indicado, en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

El argumento de la función al cambiar de valores entre números enteros a variables no actuó como variable didáctica, no se logró modificar el comportamiento de los estudiantes, los cuales expresaron que si b representa un número negativo el $|b|$ es b, esto también se observó en el análisis cohesitivo en la clase 5 del árbol cohesitivo, la razón es principalmente la concepción incorrecta que tienen los estudiantes acerca de variable, coincidiendo con lo reportado por Gagatsis y Panaoura (2014).

El argumento de la función al cambiar de valores entre variables a una expresión algebraica del tipo $x+a$, sí actuó como variable didáctica, porque modificó el comportamiento de los estudiantes, que inicialmente resolvían las ecuaciones de forma algebraica con tipo de error de regla mecánica, y que luego cambian a resolución gráfica llegando a las respuestas correctas. Esto es reforzado por los resultados del análisis cohesitivo, donde en la clase 1 del árbol cohesitivo, muestra que aquellos estudiantes que tienen la concepción funcional de valor absoluto, probablemente resolvieron de forma correcta las ecuaciones del tipo $|x+a|=b$.

El valor de la función valor absoluto al cambiar de número entero positivo a un número entero negativo actuó como una variable didáctica durante la secuencia didáctica, debido a que se logró cambios en las respuestas de los estudiantes, y este mismo comportamiento se evidenció al realizar el análisis cohesitivo, en la clase 1 del árbol cohesitivo, se observa la implicancia que hay entre la concepción funcional del valor absoluto y la respuestas correctas ante ecuaciones con valor absoluto que no tienen solución. En el primer cuestionario ningún estudiante respondió correctamente este tipo de pregunta, esta variable se reconoció luego de la secuencia didáctica.

El tipo de relación inecuación sin ayuda gráfica no funcionó como variable didáctica, debido que al ser una inecuación se esperaba que resolvieran deduciendo las propiedades de valor absoluto, pero muchos de ellos volvieron a la técnica que habían aprendido antes, resolviendo inecuaciones con valor absoluto, presentando errores del tipo regla mecánica. Eso también se observa en los resultados del segundo análisis cohesitivo, donde en la clase 13 del árbol cohesitivo, se observa las implicancias que hay entre tipo de error regla mecánica en la resolución de inecuaciones con valor absoluto.

Finalmente, el análisis cohesitivo realizado permitió validar variables didácticas, de manera que se pudo descartar algunas y corroborar el estatus de otras. Con respecto al objetivo planteado en esta investigación, podemos concluir que la enseñanza del valor absoluto como función favorece el desempeño de los estudiantes al resolver ecuaciones con valor absoluto, debido a que se evitan errores del tipo epistemológico y didáctico asociados a la enseñanza del valor absoluto desde un contexto aritmético.

Referencias

ALMOULOUD, Saddo. (2008). Análise e mapeamiento estatístico de fenómenos didácticos con CHIC. En: Okada, A., Santos, E, & Okada, S. (Ed.), *Cartografía Cognitiva. Mapas do Conhecimento para pesquisa, aprendizagem e formcâo docente* (pp.303-324).Cuiabá: KCM.

ARTIGUE, M. (1996). Ingeniería Didáctica. En: Brun, J. (Ed.), Didática das Matemáticas (pp.35-111). Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget.

CHIARUGI, I.; FRACAZINA, G. & FURINGHETTI, F. (1990). Learning difficulties behing the notion of absolute value. *Proceeding Fourtheen PME Conference*, *3*(28), 231-238. Recuperado de http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED411137.pdf

COUTURIER, R. (2009). Teoría y Aplicaciones del Análisis Implicativo. Primera Aproximación en Lengua Hispana. Pilar Orús, Larisa Zamora, Pablo Gregori (editores).

GAGATSIS, A. & PANAORUMA, A. (2014). A multidimensional approach to explore the understanding of the notion of absolute value. *International Journal of Matematical Education in Science and Technology*, *45*(2), 159-173. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2013.790510

GAGATSIS, A. & THOMAIDIS J. (1995). Eine Studie zur historischen Entwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs absoluter Betrag [A study of a historical design, development and didactic transposition of the term "absolute value"]. *Journal fur Mathematik-Didaktik 16*(1-2), 3-46.

GARCÍA, C. (2014). *Criterios de idoneidad didáctica como guía para la enseñanza y aprendizaje del valor absoluto en el primer ciclo del nivel universitario*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Lima, Perú.

PERÚ, Ministerio de Educación (2016). Matemática 3 Secundaria. Texto Escolar. Lima. Editorial Norma.

WILHELMI, M., GODINO, J. & LACASTA, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions the case of the absolute value. *Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(2), 73-90. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/didactic_effectiveness.pdf

ZAMORA, L.; GREGORI, P. & ORÚS, P. (2009). Conceptos Fundamentales del Análsis Estadístico Implicativo (ASI) y su soporte computacional CHIC. En: Zamora, L.; Gregori, P. & Orús, P. (Ed.), *Teoría y Aplicaciones del Análsis Estadístico Implicativo. Primera Aproximación en Lengua Hispana* (77-110). España.

Enviado: 30/12/2018
Aceito: 06/04/2019