HORIZONTES - REVISTA DE EDUCAÇÃO
e-ISSN: 2318-1540

O COEFICIENTE ANGULAR COMO TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA: UMA PROPOSTA NO ÂMBITO DO ENSINO MÉDIO

THE ANGULAR COEFFICIENT AS THE INSTANTANEOUS RATE OF CHANGE: A PROPOSAL IN THE SCOPE OF HIGH SCHOOL

Edson Rodrigues SILVA[1]
Maria José Ferreira SILVA[2]

Resumo: neste artigo analisamos uma situação de aprendizagem desenvolvida com oito estudantes do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de São Paulo, cujo objetivo foi levá-los a interpretar o coeficiente angular de uma reta tangente ao gráfico de uma função f em um ponto A do seu domínio, como a taxa de variação instantânea de f(x) em relação a x em A. Com esse intuito, fundamentada em pressupostos da Engenharia Didática, a situação de aprendizagem explorou a ideia de taxa de variação instantânea a partir da Teoria das Situações Didáticas e da Teoria de Registros de Representação Semiótica, que auxiliaram na elaboração e aplicação das atividades. A análise apontou que a articulação entre os registros gráfico e algébrico constituiu uma condição fundamental à compreensão da ideia de taxa de variação instantânea de uma função f em um ponto A do seu domínio como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em A. Diante disso, concluímos que a construção de significado para a ideia de taxa de variação instantânea por estudantes do Ensino Médio pode ser potencializada por meio da mobilização de mais de um registro de representação simultaneamente.

Palavras-chave: Coeficiente angular. Taxa de variação. Teoria de Registros de Representação Semiótica. Teoria das Situações Didáticas.

Abstract: in this article we analyze a learning situation developed with eight high school students from a public school in the State of São Paulo, whose purpose was to get them to interpret the angular coefficient of a line tangent to the graph of a function f at an A point of the its domain, as the instantaneous rate of change of f(x) in relation to x in A. With this intention, based on assumptions of Didactic Engineering, the learning situation explored the idea of instantaneous rate of change from the Theory of Educational Situations and the Theory of Semiotic Representation Registers, which helped in the elaboration and application of the activities. The analysis pointed out that the articulation between the graphical and algebraic representation records constituted a fundamental condition to the idea of the instantaneous rate of change of a function f at a point A of its domain as the angular coefficient of the tangent line to the graph of f in A. We conclude that the construction of meaning for the idea of

[1] Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Centro Universitário Carlos Drummond de Andrade. E-mail: professoredsonrodrigues@gmail.com.
[2] Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. E-mail: zeze@pucsp.b.

instantaneous rate of change by high school students can be enhanced by mobilizing more than one record of representation simultaneously.

Key words: Angular coefficient. Rate of change. Theory of Semiotic Representation Records. Theory of Didactic Situations.

1. INTRODUÇÃO

A noção de taxa de variação instantânea, entendida como a "rapidez" com que uma das grandezas interdependentes varia em relação a outra em um determinado instante, é passível de ser compreendida tanto por estudantes da educação básica quanto por estudantes do ensino superior, basta que esteja inserida em um contexto apropriado para cada nível de escolaridade.

Na educação básica brasileira, os documentos oficiais que a direcionam e organizam propõem que o estudo de taxa de variação seja realizado no contexto do estudo de funções, de modo a propiciar condições para que os estudantes desenvolvam, aprendam e aprimorem a capacidade de ler, interpretar e descrever as características fundamentais de representações gráficas de funções polinomiais. O Currículo de São Paulo (2010, p. 38), por exemplo, propõe que "o destaque dado às taxas de variação pode servir de base para uma apresentação das primeiras noções de Cálculo".

Neste trabalho, não propomos uma antecipação da disciplina de Cálculo Diferencial para o Ensino Médio como, inclusive, já sugeriram alguns autores, mas sim, a exploração de ideias fundamentais do Cálculo, não por conta de uma possível melhora no ensino superior de Cálculo Diferencial, mas, sobretudo, por concordarmos com Ávila (1991, p. 8), para quem, as ideias fundamentais do Cálculo devem ser estudadas no Ensino Médio por conta de seu caráter modernizador,

> [...] porque trazem ideias novas, diferentes das que o aluno de 2° grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas ideias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno.

Nesse sentido, temos por objetivo levar um grupo de estudantes do Ensino Médio a interpretar o coeficiente angular de uma reta tangente ao gráfico de uma função f em um ponto A do seu domínio, como a taxa de variação instantânea de f(x) em relação a x em A. Para isso, em um primeiro momento, nos detivemos em buscar materiais didáticos em que a ideia de taxa de variação instantânea é tratada intuitivamente, sem o rigor e formalismo do Ensino Superior. Assim, encontramos em Silva (2002) e Machado (1988) as ideias e concepções pertinentes ao objeto matemático taxa de variação que guiaram nossos estudos, uma vez que, para o ensino de noções de Cálculo Diferencial esses autores privilegiam "o significado das ideias fundamentais em detrimento do acúmulo de técnicas operatórias ou de definições formalmente rigorosas." (MACHADO, 1988, p. 4).

Para atingir esse objetivo, bem como para desenvolver e aplicar as atividades que compuseram a situação de aprendizagem, fundamentamo-nos na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1986) e na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2009), que evidenciou a importância da diversidade de registros de representação e da articulação entre os mesmos nos processos de ensino e de aprendizagem propostos, enquanto a TSD nos auxiliou a modelizar estes processos a partir das interações entre o professor, os alunos, o meio e o saber em jogo, e propôs um modelo teórico para construir, analisar e interpretar a situação de aprendizagem.

Diante disso, adotamos pressupostos da Engenharia Didática de Artigue (1995 p. 36, tradução nossa) como método de pesquisa, uma vez que, "como metodologia de investigação, a engenharia didática se caracteriza, principalmente, por um esquema experimental baseado nas 'realizações didáticas' em sala de aula". Tal metodologia se caracteriza por quatro fases fundamentais, a primeira formada pelas análises preliminares, a segunda voltada à concepção e análise *a priori* da sequência didática, a terceira voltada especificamente ao experimento e, a última, destinada à validação, momento em que é feita uma análise *a posteriori* que confrontada com a análise *a priori* permite validar, ou não, a sequência de ensino.

2. A SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM – DO COEFICIENTE ANGULAR À TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA

Participaram voluntariamente do experimento oito estudantes, aqui apresentados por meio de pseudônimos, da terceira serie do Ensino Médio de uma escola pública estadual situada na cidade de Santo André – SP. Todos já haviam estudado o conceito de função e as noções matemática que, direta ou indiretamente, fundamentam o estudo da noção de taxa de variação.

As atividades que compuseram a situação de aprendizagem foram aplicadas em um encontro com duração de aproximadamente 2 horas, em que os voluntários foram dispostos em quatro duplas, de modo a favorecer as discussões e a troca de informações entre os componentes, indo ao encontro das orientações dos PCN+, que sugerem que o processo de "aprendizagem não se dá com o indivíduo isolado, sem possibilidade de interagir com seus colegas e com o professor, mas em uma vivência coletiva de modo a explicitar para si e para os outros o que pensa e as dificuldades que enfrenta". (BRASIL, 2002, p. 120).

Análise da situação de aprendizagem

Atividade 1 – Em um circuito de rua foi realizado um teste de frenagem com um veículo elétrico, a fim de verificar seu desempenho em diferentes situações do dia a dia. Ao fim do teste, constatou-se que seu movimento, após 1 segundo com o freio acionado, obedece à função horária $s(t) = -1/t + 1$, com s em metros e t em segundos. A partir dessa informação faça o que se pede:

a) Calcule a velocidade média do veículo para o intervalo de tempo $[1s, 4s]$.

b) Calcule a velocidade média do veículo para o intervalo de tempo $[1s, 3s]$.

c) Calcule a velocidade média do veículo para o intervalo de tempo $[1s, 2s]$.

d) Considere o intervalo de tempo $[1, 1 + \Delta t]$, em que Δt representa um acréscimo muito pequeno ao instante $t = 1s$, calcule $s(1)$ e $s(1 + \Delta t)$ e, em seguida, determine a velocidade média do veículo nesse intervalo de tempo. O resultado obtido depende de Δt, por esse motivo ele será indicado por $v(\Delta t)$.

Essa atividade teve por objetivo levar os estudantes a calcular a taxa de variação média, via registro de representação algébrica, da variação posição do automóvel em relação ao tempo no intervalo $[1, 1 + \Delta t]$, em que Δt representa um acréscimo muito pequeno ao instante t.

Ao se deparar com os itens que compunham a atividade, todas as duplas optaram por resolvê-los via registro de representação gráfica, o que foi além de nossa expectativa, pois esperávamos que chegassem à taxa de variação média da posição do veículo em relação ao tempo via registro de representação algébrica.

Quando questionadas do porque utilizavam a representação gráfica em detrimento da algébrica, prontamente todas responderam que por meio do gráfico a "visualização da velocidade média era mais fácil”. Caroline, por exemplo, calculou a velocidade média nos intervalos dados por meio do registro gráfico e utilizou o registro de representação algébrica para validá-los. Já William afirmou que obter a velocidade média do veículo era “mais fácil com o gráfico”.

Para o item (a), esperávamos que os estudantes calculassem a velocidade média do veículo no intervalo $[1s, 4s]$ algebricamente por meio da razão entre a variação da posição Δs e a variação do tempo Δt, e concluíssem que foi $0{,}25\ m/s$. As duplas mobilizaram corretamente os conhecimentos referentes a ideia de taxa de variação média e atingiram o objetivo do item, mas a dupla formada pelos os alunos Wallace e Guilherme, apesar de ter mobilizado corretamente esses conhecimentos, não chegou a solução esperada por erros aritméticos, pois no cálculo da razão entre a variação da posição Δs e a variação do tempo Δt Guilherme afirmou que “$\frac{3/4}{3} = 4$” e Wallace prontamente acatou a afirmação, sem levantar dúvidas ou algum tipo de questionamento.

Para o item (b), os estudantes deveriam calcular a velocidade média do veículo no intervalo $[1s, 3s]$ e concluir que foi igual a $0{,}333\ m/s$ da mesma forma do item (a). Novamente as duplas mobilizaram corretamente os conhecimentos necessários, porém a dupla formada por Wallace e Guilherme, outra vez, não apresentou uma solução compatível com a esperada. Apesar de terem encontrado o valor da velocidade média do veículo por meio do registro de representação gráfica, conforme relatou o professor observador, no registro de representação algébrica os alunos cometeram erros “triviais” como, por exemplo, na expressão aritmética “$-0.33 + 1$” obtiveram o resultado $1{,}33$.

O item (c) teve o mesmo objetivo dos anteriores, era esperado que os estudantes calculassem a velocidade média do veículo no intervalo $[1s, 2s]$ e concluíssem que foi igual a $0{,}5\ m/s$. Outra vez, somente a dupla formada pelos alunos Wallace e Guilherme não chegou a solução esperada, pois cometeu um erro similar ao que cometera nos itens anteriores, ao afirmar que “$-0.5 + 1 = 1.5$”, o que nos levou a inferir que esses alunos não sabiam operar com números racionais, tanto na forma fracionária quanto na decimal. Já as demais duplas apresentaram soluções compatíveis com a que havíamos previsto e mobilizaram corretamente a ideia de taxa de variação média via registros de representação gráfica e algébrica.

Para o item (d), esperávamos que os estudantes calculassem a velocidade média do veículo no intervalo $[1, 1 + \Delta t]$, em que Δt representa um acréscimo muito pequeno ao instante $t = 1$, e concluíssem que a expressão $V(\Delta t) = \frac{1}{1+\Delta t}$ representa algebricamente a velocidade média do veículo no intervalo dado.

Com exceção da dupla formada pelos alunos Wallace e Guilherme, todas mobilizaram corretamente o registro de representação algébrica e apresentaram soluções compatíveis com a esperada, além de perceber que o valor de Δt correspondia a um acréscimo muito pequeno ao instante t. Na análise da solução apresentada por Wallace e Guilherme, verificamos que os estudantes concluíram que a velocidade média do veículo no intervalo $[1,1 + \Delta t]$ foi igual a $0\ m/s$, pois afirmaram que o veículo esteve parado neste intervalo, o que nos levou a deduzir que os alunos utilizaram $\Delta t = 0$, e não perceberam que Δt apenas se aproxima de zero mas nunca será zero.

O fato de a maioria das duplas ter atingido o objetivo dessa atividade e, principalmente, de todas terem mobilizado o registro de representação gráfica em consonância com o registro de representação algébrica foi ao encontro das palavras de Duval (1995 apud ALMOULOUD, 2007, p. 75), para quem, é se "tomando simultaneamente dois registros de representação, e não cada registro isoladamente, que se pode determinar o funcionamento da representação própria de um registro".

Diante disso, cientes de que os estudantes já possuíam conhecimentos acerca da noção de função, concluímos que a mudança de registro além de facilitar/potencializar o processo de aprendizagem em jogo, ofereceu procedimentos de leitura e interpretação à atividade proposta e evidenciou que a articulação de dois ou mais registros de representação constitui uma ferramenta de acesso à compreensão da ideia de taxa de variação.

No que se refere a dupla formada por Wallace e Guilherme, percebemos que embora os estudantes tenham, aparentemente, as ideias que fundamentam o estudo de taxa de variação como parte integrante de seu conhecimento matemático, eles não atingiram os objetivos dos itens que compunham a atividade ou por deslizes que consideramos triviais ou, realmente, por falta de conhecimentos anteriores a ideia de taxa de variação.

No caso destes estudantes, ao final da atividade, se fez necessário algumas intervenções pontuais do professor de modo a auxiliá-los a interpretar os erros cometidos a partir da releitura do enunciado da atividade. Foi a partir dessa releitura que Wallace e Guilherme verificaram/entenderam seus erros e colocaram-se a resolver a atividade novamente, de modo a apresentar as soluções corretas dos itens que a compunham.

Atividade 2 – No geogebra, construa a curva de equação $y = -1/x + 1$, que representa graficamente a função horária que descreve o movimento do veículo, conforme foi apresentado na atividade anterior e, em seguida, determine:

a) As coordenadas de um ponto A da representação gráfica de s que tem abscissa igual a 1 e localize-o no gráfico.

b) P é um ponto genérico da representação gráfica de s, assim as coordenadas do ponto P são $\mathrm{P}(\mathrm{t}, \mathrm{s}(\mathrm{t}))$.

i. Determine as coordenadas do ponto P tal que $\mathrm{t} = 4$.
ii. Determine as coordenadas do ponto P’ tal que $\mathrm{t} = 3$.
iii. Determine as coordenadas do ponto P’’ tal que $\mathrm{t} = 2$.

c) Na representação gráfica de s, localize os pontos P, P’ e P’’ e, em seguida, trace as retas AP, AP’ e AP’’, e faça o que se pede:

i. À medida que o valor de t diminui cada vez mais e aproxima-se do instante $\mathrm{t} = 1$, o ponto $\mathrm{P}(\mathrm{t}, \mathrm{s}(\mathrm{t}))$ aproxima-se cada vez mais do _____________.
ii. Selecione a ferramenta inclinação, aplique-a sobre a reta AP, calcule a razão entre os segmentos vertical e horizontal do triângulo formado e verifique se há algo em comum entre esse resultado e o que você apresentou no item (a) da atividade 1, e faça o mesmo procedimento para as retas AP’ e AP’’, comparando com os resultados apresentados nos itens (b) e (c) da atividade 1.

d) Retome a expressão matemática que você apresentou como solução para o item (d) da atividade 1, $V(\Delta t) = 1/(1 + \Delta t)$ e, em seguida, responda:

i. Se tomarmos o valor de $\Delta\mathrm{t}$ cada vez mais próximo de 0, o valor da velocidade média do veículo se aproxima de um número real a, que corresponde a sua velocidade instantânea no instante $\mathrm{t} = 1$. Qual o valor de a?
ii. Escreva a equação da reta r que passa pelo ponto $\mathrm{A}(1, 0)$ e tem coeficiente de inclinação a.
iii. Esboce os gráficos da reta r e da função $s(t) = -1/t + 1$ no mesmo plano cartesiano, em seguida selecione a ferramenta “inclinação”, aplique-a na reta r e calcule a razão entre os segmentos vertical e horizontal do triângulo formado e compare com a solução que você apresentou para o valor de a obtido no subitem i.

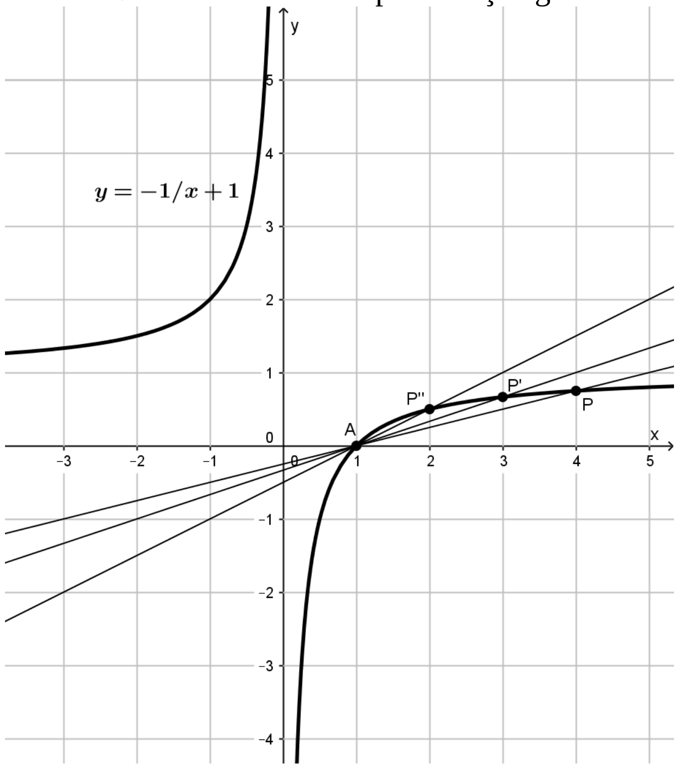
Essa atividade teve por finalidade levar os estudantes a identificar o coeficiente angular da reta tangente a representação gráfica da função $s(t) = -\frac{1}{t} + 1$ no ponto A $(1, 0)$ como a taxa de variação instantânea de $s(t)$ em relação a t no instante $t = 1$.

Para isso, no item (a) esperávamos que os estudantes determinassem as coordenadas do ponto A $(1,\ 0)$ e o localizassem na representação gráfica de s. Todas as duplas concluíram, quase que imediatamente, que $x = 1$ e $y = 0$ são as coordenadas do ponto solicitado e o localizaram na representação gráfica de s sem apresentar nenhuma dificuldade.

Para o item (b), a partir do valor da abscissa de três pontos distintos do tipo $P(t, s(t))$ pertencentes à representação gráfica de s, esperávamos que os estudantes determinassem o valor de suas ordenadas e concluíssem que os pontos solicitados eram: $P(4,\ 3/4)$, $P'(3,\ 2/3)$ e $P''(2,\ ½)$. Novamente todas as duplas apresentaram as coordenadas dos pontos solicitados sem nenhuma dificuldade.

Já para o item (c), almejávamos que os estudantes percebessem, a partir das retas secantes à representação gráfica de s, AP, AP' e AP'', como mostra o gráfico 1, que ao se tomar valores de t cada vez mais próximos do instante $t = 1$, os pontos que definem estas retas aproximam-se cada vez mais um do outro, e que o valor de seus coeficientes angulares, que determinam a inclinação dessas retas em relação ao eixo das abscissas, correspondia à velocidade média do automóvel nos intervalos pré-estabelecidos nos itens a, b e c da atividade 1. Esperávamos também, que os alunos percebessem, ainda que intuitivamente, que a reta secante AP tende a tangenciar a representação gráfica de s no ponto A.

Gráfico 1. Retas secantes a representação gráfica de s



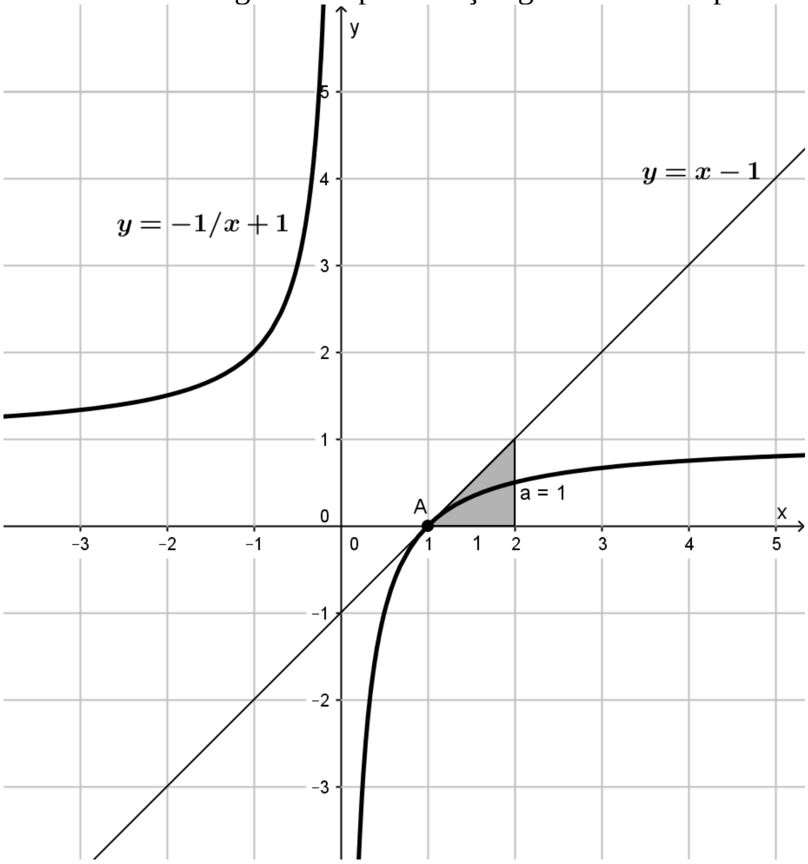
Fonte: Produção nossa.

Nenhuma dupla apresentou dificuldades para localizar os pontos $\text{P}, \text{P'}$ e P'' na representação gráfica de s. Todas perceberam que os valores das razões calculadas neste item correspondiam à velocidade média do veículo nos intervalos pré-estabelecidos e também os relacionaram corretamente com os resultados obtidos nos itens (a), (b) e (c) da atividade 1.

As duplas formadas por Wallace e Guilherme e por Leonardo e Adriano embora tenham percebido que à medida que o valor de t diminui e aproxima-se cada vez mais do instante $\text{t} = 1$, o ponto genérico $\text{P}(\text{t}, \text{s}(\text{t}))$ aproxima-se cada vez mais do ponto A, em suas verbalizações afirmaram que o ponto $\text{P}(\text{t}, \text{s}(\text{t}))$ aproxima-se cada vez mais do número real 1. Acreditamos que os estudantes chegaram a essa conclusão pelo fato de o instante em questão ser $\text{t} = 1$, o que nos levou a concluir que eles também atingiram o objetivo desse item.

Para o item (d), esperávamos que os estudantes apresentassem a equação da reta tangente à representação gráfica de s no ponto A, percebessem que o coeficiente angular dessa reta corresponde à taxa de variação instantânea de $\text{s}(\text{t})$ em relação a t no ponto A e concluíssem que a reta de equação $\text{y} = \text{x} - 1$ é a tangente solicitada. Além disso, por meio da análise da representação gráfica de s(t) e da reta tangente a s(t) em A, esperávamos que eles percebessem que o valor do coeficiente angular dessa tangente, $a = 1$, corresponde a taxa de variação de $s(t)$ em relação a t em A, como mostra o gráfico 2.

Gráfico 2. Reta tangente a representação gráfica de s no ponto A



Fonte: Produção nossa.

Com exceção da dupla formada pelos alunos Wallace e Guilherme, todas perceberam, ainda que intuitivamente, que o valor do coeficiente angular da reta de equação $y = x - 1$, tangente à representação gráfica de s no ponto $A(1, 0)$, corresponde à velocidade do veículo no instante $t = 1s$.

Acreditamos que o fato de Wallace e Guilherme não terem atingido o objeto do item (d) da atividade 1, ou seja, de não terem percebido que Δt apenas se aproxima de zero mas nunca será zero, pode ter prejudicado a compreensão de que a reta tangente a representação gráfica de s no ponto A é uma aproximação das secantes AP, AP’ e AP’’ e, por consequência, de que o coeficiente angular dessa tangente corresponde a taxa de variação de $s(t)$ em relação a t no ponto A.

Diante disso, o professor novamente interviu junto aos estudantes e, com o auxílio do geogebra, "mostrou" as secantes "se aproximando" da tangente e solicitou que relacionassem o coeficiente angular dessas secantes com os resultados encontrados nos itens a, b e c da atividade 1. Somente assim a dupla inferiu que o coeficiente angular da reta tangente a representação gráfica de s no ponto A corresponde a taxa de variação de $s(t)$ em relação a t no instante $t = 1$.

Feito isso, o professor fez uma discussão coletiva acerca das duas atividades e deu inicio a fase de institucionalização, quando evidenciou que para uma função f qualquer, o coeficiente angular da reta tangente a sua representação gráfica em um ponto A do seu domínio corresponde à taxa de variação instantânea de f(x) em relação a x neste ponto. Finalizou o encontro e, com o intuito de formalizar a taxa de variação instantânea como a derivada de uma função f em um ponto A do seu domínio, reiterou as palavras de Machado (1988, p. 26), para quem, a taxa de variação instantânea de f(x) em relação a x em um ponto de abscissa x_0 "é também chamada de derivada de f(x) no ponto de abscissa x_0. Seu valor indica a inclinação da reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto considerado. Esse valor é comumente representado por $f'(x_0)$".

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O fato de os estudantes optarem pelo uso do registro de representação gráfica em detrimento do algébrico e de usarem o registro algébrico para validar as conjecturas levantadas a partir da análise do registro gráfico evidenciou modificações comportamentais frente à situação de aprendizagem proposta. São estas modificações que, para nós, caracterizaram a compreensão da noção de taxa de variação instantânea de f(x) em relação a x em um ponto de abscissa x_0 como o coeficiente angular da reta tangente a representação gráfica de f em x_0, e que vai ao encontro da afirmação de Brousseau (1975), para quem,

> [...] um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da

> aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos. (BROUSSEAU, 1975, p. 6, apud ALMOULOUD, 2007, p. 31).

Foi a partir da mobilização espontânea do registro de representação gráfica em consonância com o registro algébrico que os estudantes construíram significado para a ideia de taxa de variação instantânea de f(x) em relação a x em um ponto de abscissa x_0 como o coeficiente angular da reta tangente a representação gráfica de f em x_0, levando-nos a inferir que o processo de aprendizagem deste objeto matemático pode ser potencializado por meio da mobilização e coordenação simultânea entre dois ou mais registros de representação, de modo a propiciar meios para que os estudantes tenham independência, autonomia e condições de construir os conhecimentos referentes a esta ideia.

Diante disso, reiteramos nossa afirmação inicial, de que a ideia de taxa de variação instantânea é passível de ser compreendida tanto por estudantes da Educação Básica quanto por estudantes do nível superior e acrescentamos que, no ensino básico, essa compreensão deve ser pautada em situações de ensino e de aprendizagem que propiciem o estudo deste objeto matemático intuitivamente, sem as estruturas e terminologias de um curso superior de Cálculo, de modo que os estudantes desse nível de escolaridade construam, autonomamente, as capacidades de ler, interpretar e resolver situações problema em que a ideia de taxa de variação é a técnica mais econômica e eficaz a ser mobilizada, tal como propõem os documentos oficiais que direcionam e organizam o ensino de Matemática no Brasil.

Corroboramos com Ávila (1996), ao enfatizar que, no âmbito do Ensino Médio, seria muito mais vantajoso que todo o tempo gasto com formas e nomenclaturas referentes ao conceito de função fosse utilizado no ensino das ideias fundamentais do Cálculo Diferencial. Para o autor, “[...] um dos principais objetivos na introdução da taxa de variação instantânea logo no início da primeira série do Ensino Médio é a interdisciplinaridade com a Cinemática, por isso mesmo os professores de Matemática e Física devem planejar juntos o trabalho que vão desenvolver.” (ÁVILA 2006, p. 36).

Indo ao encontro dessa afirmação, e referindo-se a algumas possibilidades de interação da Matemática com outras áreas do conhecimento, Simmons (1987, p. 86) afirma que

> [...] o conceito de derivada está intimamente relacionado com o problema de calcular a velocidade de um objeto móvel. [...] Poderia parecer que só os estudantes de Física achariam vantajoso preocupar-se com ideias precisas

> acerca da velocidade. No entanto, essas ideias dão uma introdução bastante fácil ao conceito geral de taxa de variação e esse conceito é importante em muitos outros campos de estudo, incluindo as ciências biológicas e sociais – especialmente Economia.

Diante disto e dos resultados de nossa situação de aprendizagem, inferimos que a ideia de taxa de variação instantânea pode, e deve ser explorada no âmbito da educação básica. Não basta o cidadão apenas identificar quando uma função cresce e/ou decresce, para o exercício pleno de sua cidadania se faz necessário compreender o quão rápido essa função está crescendo e/ou decrescendo e, para isso, é imprescindível um conhecimento mínimo da noção de taxa de variação que, para nós, pode ser explorada desde as séries iniciais, quando pode ser articulada, harmoniosamente, ao estudo de proporcionalidade e, por conseguinte, ao estudo de funções, de modo auxiliar os estudantes na construção de significado para situações de seu cotidiano como, por exemplo, na leitura e interpretação de um gráfico que apresenta o crescimento (exponencial) da impopularidade de um presidente ou de um gráfico que apresenta o *déficit* e/ou o *superávit* da previdência social em função do tempo.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: UFPR, 2007.

AVILA, G. S. de S. Limites e Derivadas no Ensino Médio? *Revista do Professor de Matemática*, nº 60, p. 30-38, São Paulo, 2006.

AVILA, G. S. de S. O Ensino de Calculo no 2o Grau. *Revista do Professor de Matemática*, nº 18, p. 1-9, São Paulo, 1991.

ARTIGUE, M.; at all. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamerica, 1995.

BRASIL. Secretaria de Educação Media e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio*: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasilia: MEC/SEMT, 2002.

BROUSSEAU, G. Fondaments et methodes de la didactique de la mathematiques. In: *Recherches en didactiques de mathematiques*, v. 7 nº 2, p. 33-115, 1986.

DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano – Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2009.

MACHADO, N. J. *Matemática por assunto*: noções de calculo. São Paulo: Scipione, 1988.

SÃO PAULO. *Currículo do Estado de São Paulo*: Matemática e suas Tecnologias. São Paulo: SEE, 2010.

SILVA, B. A.; et all. *Atividades para o estudo de funções em ambiente computacional*. São Paulo: Iglu, 2002.

SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica*. Trad. SEIJI HARIKI, São Paulo: Ed. McGraw-Hill, 1987.

Enviado: 21/09/2018
Aceito: 26/09/2018