HORIZONTES - REVISTA DE EDUCAÇÃO
e-ISSN: 2318-1540

UM ESTUDO DOS DIFERENTES PONTOS DE VISTA DAS CÔNICAS NO QUADRO DA GEOMETRIA

A STUDY OF THE DIFFERENT POINTS OF VIEW OF THE KNICS IN THE FRAMEWORK OF GEOMETRY

Carlos Alberto Fernandes SIQUEIRA[1]
Maria José Ferreira da SILVA[2]

Resumo: neste artigo apresentamos diferentes pontos de vista para o estudo das cônicas, no quadro da geometria como alternativa ao que comumente é exposto no ensino básico, com o objetivo de apresentar articulações entre eles e uma definição para a excentricidade que permite analisar todas as cônicas. O teorema de Dandelin será apresentado como o articulador entre o ponto de vista de corte de um cone reto de duas folhas por um plano e o ponto de vista de lugar geométrico, mostrando uma equivalência matemática entre eles. Além disso, como consequência, apresentamos uma definição geométrica para a excentricidade que possibilita o estudo das cônicas de forma unificada. Tal estudo é consequência de uma análise dos documentos oficiais que apontam para o ensino das cônicas de forma pontual sem relacionamento algum entre esses pontos de vista.

Palavras-Chave: Cônicas. Teorema de Dandelin. Pontos de Vista.

Abstract: in this article we present different points of view for the study of conic, in the frame of geometry as an alternative to what is commonly exposed in basic education, with the purpose of presenting articulations between them and a definition for the eccentricity that allows to analyze all the conics. The Dandelin theorem will be presented as the articulator between the cut-off point of view of a straight two-leaf cone by a plane and the geometric point of view, showing a mathematical equivalence between them. In addition, as a consequence, we present a geometric definition for the eccentricity that makes it possible to study the conics in a unified form. This study is the result of an analysis of the official documents that point to the teaching of conics in a punctual way without any relation between these points of view.

Keywords: Conical. Dandelin's theorem. Viewpoints.

Introdução

[1] Doutorando do Programa de Estudo Pós-graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica (PUC) de São Paulo (SP). E-mail: calbertofisica@yahoo.com.br
[2] Professora Asssitente do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática e da Especialização em Educação Matemática da PUC-SP. E-mail: zeze@pucsp.br

Siqueira (2016) fez um estudo didático das cônicas à luz de Quadros, Pontos de Vista e Registros de Representação Semiótica com o objetivo de apresentá-las nos quadros da Geometria e da Geometria Analítica com diferentes pontos de vista e representações.

O autor apresenta ainda um breve estudo histórico em que mostra que Apolônio definiu as cônicas partindo do corte de um cone de duas folhas por um plano, depois Platão as define como lugar geométrico no plano e, finalmente, Papus de Alexandria faz um estudo das cônicas, sistematizando o que fora estudado por Apolônio e caracterizando as cônicas por meio de seus respectivos focos e retas diretrizes a partir do tratado Lugar Geométrico na Superfície de Euclides.

Para o autor o ensino de cônicas, apresentado nos documentos oficiais, privilegiam o enfoque analítico em detrimento do enfoque geométrico. No “caderno do professor” do Estado de São Paulo, do terceiro ano do ensino médio, por exemplo, as cônicas são apresentadas por meio do corte entre plano e cone reto de duas folhas, mas definem apenas a parábola, quando o plano intercepta paralelamente à reta diretriz. O documento apresenta também a definição de lugar geométrico sem relacioná-la com os cortes, a construção de representações da parábola e da elipse por meio de aparatos mecânicos e algumas aplicações e propriedades das cônicas em várias situações como motivador para estudá-las na geometria analítica em que são vistas apenas por suas equações canônicas.

Nesse caderno, a relação de excentricidade é apresentada por meio de uma relação algébrica entre medidas apoiadas em uma figura geométrica, considerando elementos característicos como focos, eixos de simetria, vértices e pontos centrais. No entanto, nenhuma articulação é feita entre uma cônica e outra.

Assim, pretendemos, neste artigo, apresentar didaticamente os teoremas desenvolvidos por Dandelin, Quetelet e Morton que relacionam o ponto de vista de corte de um cone e um plano, com o ponto de vista de lugar geométrico, que permitem didaticamente transitar de um ponto de vista a outro de forma articulada no quadro da geometria, bem como o ponto de vista da excentricidade que resulta de relações geométricas obtidas do ponto de vista de corte de um cone. Para isso descreveremos, brevemente no que segue, as noções de quadro, pontos de vista e registros de representação semiótica que serão utilizadas em nossas análises.

Os Quadros, os Pontos de Vista e os Registros de Representação Semiótica

A noção de quadros foi desenvolvida por Douady que os considera construído de:

> [...] ferramentas de uma parte da matemática, de relações entre objetos, de formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações. Dois quadros podem ter os mesmos objetos e ser diferentes por causa das imagens mentais e da problemática desenvolvida (DOUADY, 1993, p. 389 apud ALMOULOUD, 2007, p. 64).

Assim, um quadro pode ser entendido como um domínio da matemática, como por exemplo, números, geometria, álgebra, grandezas, ..., que permite, de acordo com Almouloud (2007), explicar a mudança de pontos de vista e a tradução de um problema em quadros diferentes. Essa mudança de quadros pode, então, permitir ao aluno resolver um problema que no quadro de partida considera difícil. Neste sentido, o professor precisa considerar o jogo de quadros em suas intervenções com os estudantes para que estes aprendam a identificar possíveis mudanças de quadros quando resolvem problemas.

De acordo com Douady "é necessário que os problemas fornecidos envolvam, pelo menos, dois domínios, de modo que um sirva de referência ao outro e possibilitem meios de validação pela ação" (MARANHÃO, 2008, p. 147). Uma outra questão que mobiliza essa noção de mudança de quadros é quando "conhecimentos de um certo domínio não serem suficientes para avançar, em uma situação, que o aluno lança mão de conhecimentos de outros domínios" (MARANHÃO, 2008, p. 148).

Embora a mudança de quadros (ou de domínios) propicie uma maneira diferente para olhar um problema, ou seja, provoque uma mudança de ponto de vista, tal mudança não é suficiente para entendermos efetivamente essa noção, pois essa mudança pode ocorrer em um mesmo quadro. Foi esta constatação que conduziu Rogalski, em 1995, a desenvolver a noção de pontos de vista que, de acordo com Almouloud (2007, p. 81):

> Pontos de vista diferentes, para um objeto matemático, são maneiras diferentes de olhá-lo, e de fazê-lo funcionar e, eventualmente, de defini-lo. Neste sentido, olhar um objeto em diferentes quadros é ter diferentes pontos de vista, embora se possam ter vários pontos de vista no mesmo quadro.

A teoria dos Registros de Representação Semiótica, concebida por Duval (1995), tem contribuído para as pesquisas no âmbito da didática da matemática, uma vez que tratam das diferentes maneiras de representar um mesmo objeto matemático, pois estes só podem ser tratados a partir de representações. Um ponto fundamental dessa teoria é a diferença entre o representante e o representado, pois

> Toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão. Os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis fora de seus contextos de aprendizagem: sejam por falta de atenção, seja por que eles tornam-se representações inertes não sugerindo tratamento produtor. Por sua pluralidade potencial, as diversas representações semióticas dos objetos matemáticos seriam secundárias e extrínsecas à aprendizagem conceitual dos objetos (DUVAL, 2009, p. 14).

Para o autor um Registro de Representação Semiótica deve comportar três atividades cognitivas fundamentais associadas à semiosis[3]: a formação, o tratamento e a conversão. A formação de representações "num registro semiótico particular, seja para "exprimir" uma representação mental, seja para "evocar" um objeto real [...] implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres e determinações que "queremos" representar" (DUVAL, 2009, p. 53). O tratamento é uma transformação que ocorre internamente a um registro de representação que substitui a representação inicial, sem mudar a natureza da representação, como, por exemplo, no registro algébrico em que a solução de um problema requer um tratamento que percorre diferentes expressões até se chegar a uma resposta final. Já uma conversão, para Duval (2009), é uma transformação de uma representação de um objeto, de uma situação ou informação, dada em um registro, em outra representação deste mesmo objeto, situação ou informação em outro registro. Neste sentido, uma conversão é uma transformação externa ao registro como ocorre, por exemplo, quando construímos uma representação gráfica a partir de uma representação algébrica. Para Almouloud (2007, p. 75) "a coordenação de vários registros (pelo menos dois) é uma condição necessária para essa forma de compreensão, que Duval denomina, conceitual".

Para Siqueira (2016), o ensino das cônicas no ciclo básico é feito por meio de dois quadros, o da geometria e o da geometria analítica. No quadro da geometria, que trataremos em parte neste artigo, podemos olhar para elas do ponto de vista do corte entre o plano e o cone, do ponto de vista do lugar geométrico e do ponto de vista da excentricidade. Quanto aos registros de representação semiótica utilizados para representar as cônicas nesses diversos pontos de vista temos: o registro material, o registro figural, o registro figural dinâmico, o registro algébrico além de representações simbólicas.

[3] A apreensão ou a produção de uma representação semiótica (DUVAL, 2009, p. 15).

Dessa forma, no que segue, para justificar nosso artigo, apresentamos uma breve análise de alguns documentos oficiais relativos ao ensino de cônicas que, de certa forma, complementa o estudo apresentado pelo autor e, na sequência, diferentes pontos de vista para esse objeto matemático além dos registros de representação semiótica associados a cada um deles.

Análise de Alguns Documentos Oficiais

Analisamos os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2000), PCN$^+$ (BRASIL, 2002), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) (BRASIL, 2006) e do Currículo do Estado de São Paulo (CESP) (SÃO PAULO, 2011) com o objetivo de levantar os principais aspectos considerados para o ensino de cônicas na educação básica.

Os PCNEM (BRASIL, 2000) sugerem o ensino de cônica de forma mais geral, visando o aprendizado por competências com o objetivo de inserir os jovens estudantes na vida adulta. Sugerem a importância do quadro da geometria, para tal, afirmando que:

> As habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca (BRASIL, 2000, p. 44).

Os PCN$^+$ (BRASIL, 2002) complementam as sugestões dos parâmetros anteriores sugerindo para a unidade temática geometria plana o ensino de semelhança, congruência e representações figurais e na unidade de geometria analítica o ensino de representações no plano cartesiano, equações, intersecções e posições relativas de gráficos. Não explicitam nessas unidades o ensino de cônicas com exceção do estudo de circunferência e de parábola afirmando que:

> [...] mais importante do que memorizar diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão do que a geometria analítica propõe. Para isso, o trabalho com este tema pode ser centrado em estabelecer a correspondência entre as funções de 1° e 2° graus e seus gráficos e a resolução de problemas que exigem o estudo da posição relativa de pontos, retas, circunferências e parábolas (BRASIL, 2002, p. 124).

Já nas OCEM (BRASIL, 2006) a escolha de conteúdos deve considerar os diferentes objetivos para a formação matemática do ensino básico, pois esperam que:

> [...] os alunos saibam usar a matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p. 69).

Assim, salientam que o estudo de geometria deve permitir desenvolver capacidades para os estudantes resolverem problemas práticos do cotidiano e que no estudo de geometria analítica, a geometria e a álgebra devem ser estudadas de forma articuladas de modo que possam resolver problemas geométricos por meio de equações ou resolver equações por meio de propriedades geométricas.

Na Geometria Analítica as OCEM (BRASIL, 2006) consideram como essenciais o estudo da reta e da circunferência e que suas equações sejam deduzidas para a compreensão de cada parâmetro envolvido e não apenas apresentadas aos alunos para que sejam memorizadas. No entanto as cônicas são consideradas conteúdos complementares e caberá ao professor analisar a pertinência de seu ensino. Se este ensino vier a acontecer sugerem que sejam estudadas por definição de lugar geométrico, por suas equações canônicas como solução de uma equação de segundo grau de duas variáveis e que ainda sejam considerados os sistemas de coordenadas esféricas, polares, além das construções de curvas e superfícies o que contribuiria para o pensamento matemático generalizador.

No CESP (SÃO PAULO, 2011) as cônicas começam a ser estudadas pelo objeto parábola no nono ano do ensino fundamental, momento em que os alunos estudam alguns aspectos relacionados a este objeto tais como os fundamentos de função, variação e construções de gráficos e de tabelas representativas de funções polinomiais de primeiro e de segundo grau, com o objetivo de desenvolver diversas habilidades. Esse estudo é aprofundado no primeiro ano do ensino médio, considerando relações entre grandezas, proporcionalidade, função polinomial de 2°grau, não esboçando qualquer menção às cônicas. Já no terceiro ano, desse nível escolar, a parábola, a elipse e a hipérbole são estudadas, a partir de habilidades relacionadas à geometria analítica “saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas". (Ibid., p. 69). Este documento exibe, como fator motivacional para introduzir o tema, situações em que os aspectos geométricos são evidentes, tais como projeções de luzes de um abajur em uma parede, de construções de curvas com formatos elípticos e parabólicos como em pontes, além de utilizar o método do jardineiro para o traçado de elipses, no entanto nenhuma relação dessas situações é feita com a geometria analítica que será ensinada.

A partir desses estudos percebemos que o ensino de cônicas é tratado com ênfase no quadro da geometria analítica, tendo início no ensino fundamental para representações gráficas de funções quadráticas, sem qualquer estudo no quadro da geometria. Assim, neste artigo, baseados em Siqueira (2016) apresentaremos diferentes pontos de vista para as cônicas nesse quadro, ou seja, diferentes maneiras de estudar esses objetos além de suas possíveis representações semióticas. No que segue, apresentaremos então algumas relações entre diferentes pontos de vista para as cônicas que, entendemos ajudariam a compreender a passagem de um para outro e os teoremas que as garantem matematicamente a partir das contribuições de Dandelin, Quetelet e Morton.

Os Diferentes Pontos de Vista para as Cônicas no Quadro da Geometria

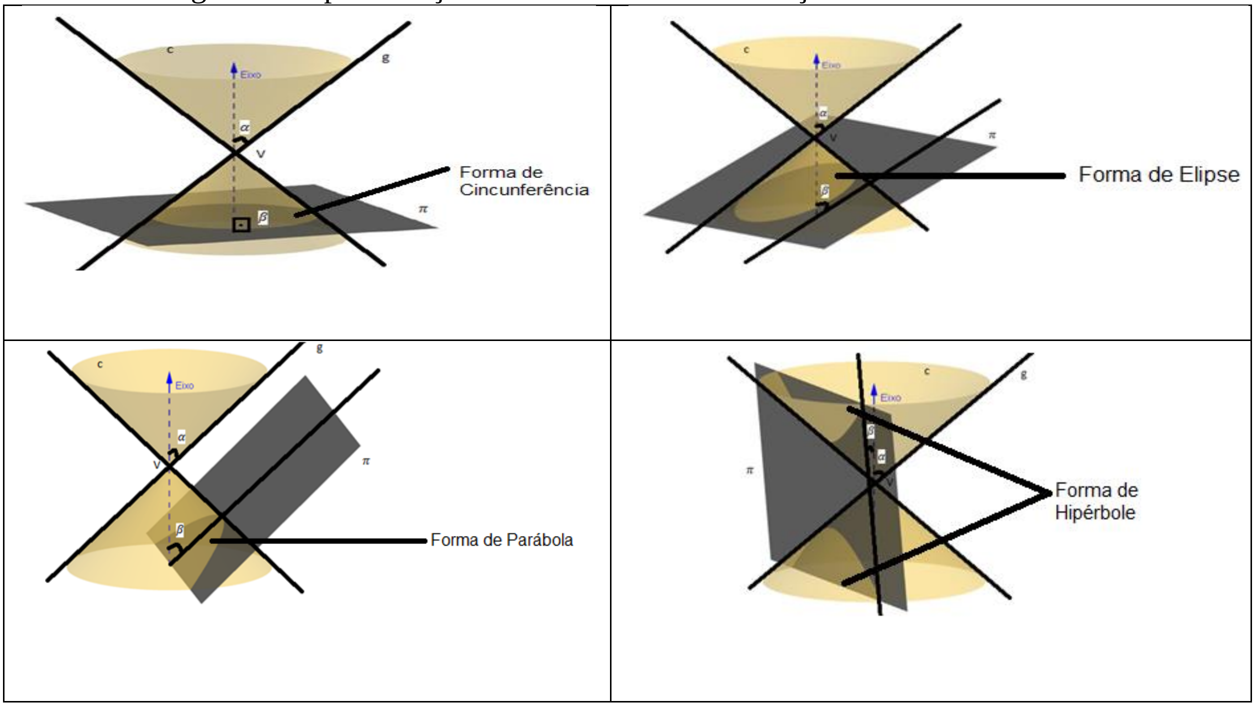
O ensino de cônicas pode ser realizado a partir de três pontos de vista no quadro da geometria: do corte entre plano e cone, do lugar geométrico e da excentricidade.

Ponto de Vista entre Plano e Cone

De acordo com Siqueira (2016) o ponto de vista das cônicas apresentado pelo corte entre plano e cone reto de duas folhas emerge da definição dada por Apolônio (aprox. 262 a 190 a.C.) que as definiu por meio da inclinação de um plano de corte em relação ao eixo de um cone reto de duas folhas (figura 1). O autor afirma que a definição dada por Apolônio perdura até os dias atuais e os nomes parábola, elipse e hipérbole foram adotadas por ele, provavelmente, inspirados nos trabalhos dos pitagóricos para a solução de equações quadráticas por aplicação de áreas.

HORIZONTES - REVISTA DE EDUCAÇÃO
e-ISSN: 2318-1540

Figura 1: Representações de Cônicas Pela Interseção entre Plano e Cone



Fonte: Siqueira (2016, p. 65-72-73).

Na figura 1, c representa o cone reto de duas folhas, g a geratriz do cone, V seu vértice, α o ângulo formado entre o eixo do cone e uma de suas geratrizes, π representa o plano de corte e β o ângulo formado entre o plano e o eixo do cone.

Por este ponto de vista vemos, a partir da figura 1, que a circunferência é identificada quando o plano que intercepta o cone é posicionado paralelamente à base do cone; a parábola pode ser vista quando o plano de corte é posicionado paralelamente à uma das geratrizes do cone; a elipse é identificada quando o plano que intercepta o cone passa por todas as suas geratrizes e forma com o eixo do cone um ângulo maior do que o ângulo formado entre o eixo do cone e uma de suas geratrizes; finalmente, a hipérbole pode ser identificada quando o plano de corte forma com o eixo do cone um ângulo menor que o ângulo formado entre este mesmo eixo e uma de suas geratrizes.

Neste ponto de vista, o resultado da interseção entre o cone e o plano, de acordo com Siqueira (2016) não é um registro de representação semiótica, porém por meio deste procedimento podemos identificar a cônica representada tendo por base a apreensão perceptiva de Duval (2009).

Ponto de vista do Lugar Geométrico – Propriedade Focal

O ponto de vista de lugar geométrico, de acordo com Lacaz Netto (1957), vem da definição dada por Platão (aprox.. 427 – 347a.C.). Para o autor, na Grécia antiga a denominação de lugares sólidos era dada às secções cônicas e a denominação de lugar de pontos ao conjunto formado por todos os pontos que satisfazem determinadas condições. Papus (290-350) tratando as cônicas como lugar geométrico de pontos, verificou que para a elipse a razão entre as distâncias de um ponto qualquer sobre essa curva ao foco e à reta diretriz é menor que 1, e para a hipérbole era maior que 1. Enunciou também diversos teoremas a respeito dos focos, diretrizes e excentricidades das cônicas. Já no século XVII Fermat, baseando-se na obra de Papus, desenvolveu um método para tratar lugares geométricos e deu uma solução para os problemas sólidos de Papus em meio ao desenvolvimento da geometria analítica.

Pelo ponto de vista do lugar geométrico as cônicas são definidas por sua propriedade focal em que são tratadas como um conjunto de seus pontos. Siqueira (2016) apresentou a definição de parábola por essa propriedade afirmando que um ponto qualquer sobre a parábola é equidistante de uma reta fixa (diretriz) e de um ponto fixo (foco). Por essa mesma propriedade a elipse é uma cônica em que a soma das distâncias de um ponto qualquer sobre a elipse aos seus focos é uma constante e para a hipérbole a subtração entre as distâncias de um ponto qualquer aos focos é uma constante positiva.

Esses dois pontos de vista do corte entre plano e cone reto de duas folhas e o ponto de vista do lugar geométrico podem ser estudados de forma articulada uma vez que é possível partir de um estudo em que as cônicas são apenas identificadas para um estudo que considere suas relações matemáticas pela propriedade focal, conforme a relação apresentada a seguir.

A relação entre os pontos de vista do corte e lugar geométrico para as cônicas

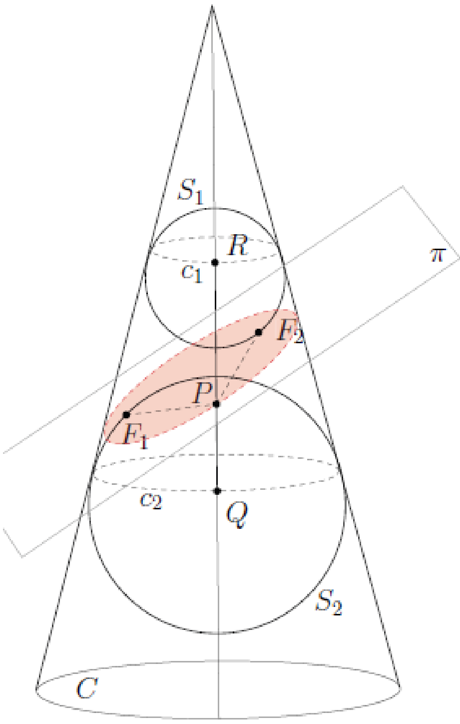
Bordallo (2011) fez um estudo histórico das cônicas no Brasil com o objetivo de verificar como as cônicas foram apresentadas nos programas de ensino, nas leis e nos livros didáticos desde 1892, explicitando em quais momentos elas foram estudadas separadas ou unificadas tanto na geometria quanto na geometria analítica. O autor verificou que o teorema de Dandelin, como parte importante para o ensino de cônicas, esteve presente nos programas desde 1892, passando pela reforma de Capanema em 1931, pelo ajuste feito em 1951 chegando ao início dos anos de 1960, quando foi omitido pelo movimento da matemática moderna.

Já Monteiro (2014) observou que o matemático Dandelin fixou as condições em que a secção entre um cone reto e um plano produz cada um dos tipos de cônicas por intermédio do teorema: **a secção de uma superfície cônica de revolução por um plano oblíquo ao eixo é uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole.**

De acordo com o autor, Dandelin mostrou a possibilidade de se inserir uma ou duas esferas em um cone de maneira que tangenciassem, ao mesmo tempo, o cone e o plano utilizado para o corte. Nesta construção pôde demonstrar a propriedade focal para definir as cônicas como lugar geométrico, por meio de propriedades de tangencia às esferas por planos e de semelhança de triângulos. Acrescenta que Dandelin em colaboração com o também matemático Quetelet apresentaram essa abordagem em 1822 para a elipse e para a hipérbole e Pierce Morton em 1828, para a parábola. Dessa forma entendemos que esses matemáticos relacionam o ponto de vista do corte de um cone reto por um plano com o ponto de vista de lugar geométrico justificando assim matematicamente tal relação.

Segundo Monteiro (2014) Dandelin e Quetelet apresentaram, em 1822, duas proposições para definir a elipse e a hipérbole. Para a elipse consideraram duas esferas inscritas em um cone simples tangenciando o plano de corte (figura 2) e identificaram uma relação entre distâncias que permitiram identificar a elipse como lugar geométrico a partir de sua propriedade focal.

Figura 2: Percepção da Representação da Elipse



Fonte: Monteiro (2014, p. 12).

Enunciaram essa proposição: **considere um cone circular reto C interceptado em todas as suas geratrizes por um plano π, considere também, duas esferas S_1 e S_2 que tangenciam simultaneamente o plano e o cone e F_1 e F_2 os pontos de tangência das esferas com o plano π. Então, com base nessas informações, para qualquer ponto P tomado da intersecção, é constante a relação $PF_1 + PF_2$.**

Para obter essa relação consideramos, na figura 2, o ponto R de tangencia da esfera S_1 com o cone, que pertence à circunferência c_1, paralela à base do cone. Esse ponto R e o vértice do cone determinam então a reta geratriz do cone, que por sua vez determina o ponto Q na circunferência c_2, ponto de tangência da esfera s_2 com o cone. A reta geratriz, que passa por R e Q, determina também o ponto P que pertence à intersecção entre o plano de corte π e o cone, ou seja, pertencente à elipse. Podemos observar que o segmento RQ tem medida constante porque pertencem simultaneamente às circunferências paralelas à base do cone e a uma sua geratriz.

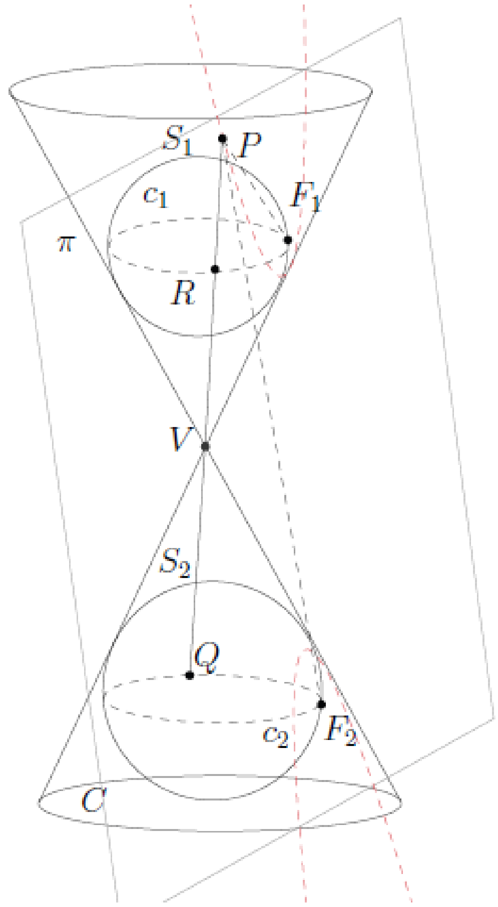
Agora, se considerarmos o ponto F_1, de tangência da esfera s_2 com o plano π, e o ponto F_2, de tangência da esfera s_1 com o mesmo plano, podemos concluir que $PF_1 = PQ$, pois o ponto P é externo à esfera s_2 e as retas PF_1 e PQ tangenciam a esfera, respectivamente, nos pontos F_1 e Q. De maneira análoga podemos dizer que $PF_2 = PR$ e, assim, concluir que $PF_1 + PF_2 = RQ$, ou seja, a soma das distâncias de um ponto qualquer da elipse a seus focos é uma constante, o que caracteriza a elipse como lugar geométrico.

Dandelin e Quetelet consideraram também duas esferas tangenciando simultaneamente um plano de corte e um cone reto circular duplo (figura 3) para enunciar uma proposição semelhante para a hipérbole.

Segundo Monteiro (2014) Dandelin e Quetelet enunciaram a seguinte proposição: **considere um plano π e um cone circular reto C que se interceptam mutuamente e duas esferas inscritas de tal maneira que tangenciam simultaneamente o plano e o cone. Considere ainda os pontos F_1 e F_2 representados pelas interseções entre as esferas com o plano. Com base nessas informações pode ser afirmado que para qualquer ponto P da interseção entre plano e cone é constante e positiva a relação $|PF_1 - PF_2|$.**

Na figura 3 consideremos o ponto R que pertence à circunferência c_1 e é um dos pontos de tangência entre a esfera S_1 e o cone. Por esse ponto R e pelo ponto V determinamos uma reta geratriz do cone que, intercepta a circunferência c_2 no ponto Q, que também é ponto de tangência entre a esfera s_2 e o cone. Essa reta geratriz determina ainda o ponto P na intersecção entre o plano π e o cone, ou seja, pertencente à hipérbole. Considerando F_1 o ponto de tangência entre a esfera s_1 e o plano π e F_2 o ponto de tangência entre a esfera s_2 e o plano π, como o ponto P é externo às esferas e a reta RQ tangencia as duas esferas podemos dizer que $PF_1 = PR$ (propriedade de tangência), e, ainda, que $PF_2 = PQ$. Logo $PF_2 - PF_1 = PQ - PR = RQ$. Podemos então dizer que a diferença entre as distâncias de um ponto P, qualquer da hipérbole, a dois pontos fixos é um valor constante, isto é, a hipérbole é o lugar geométricos dos pontos de um plano que satisfazem essa relação.

Figura 3: Percepção da Representação da Hipérbole

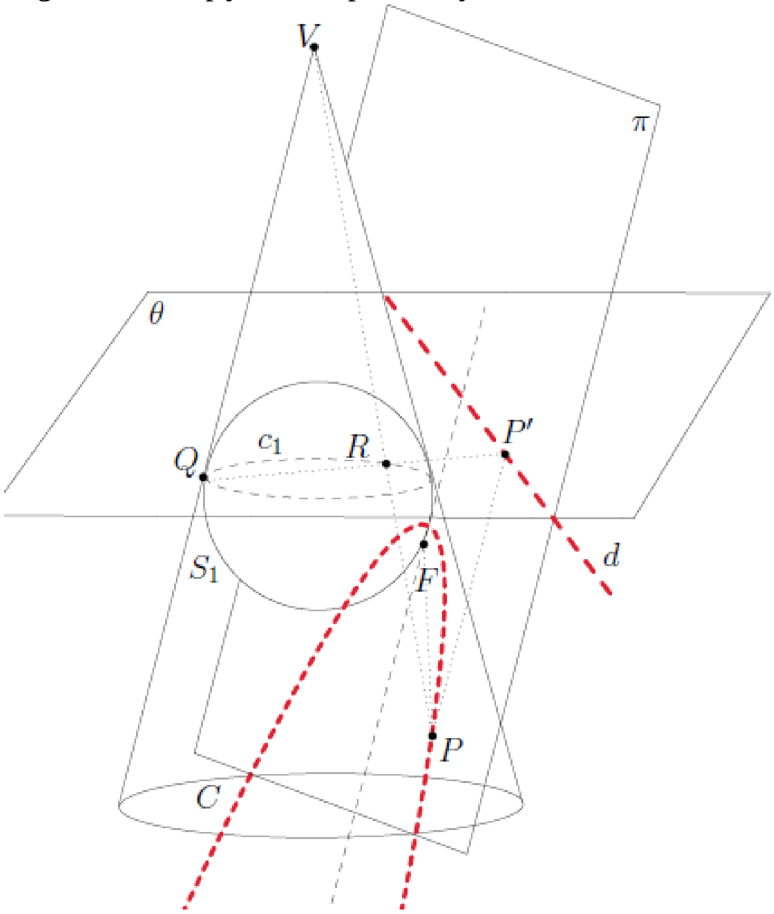


Fonte: Monteiro (2014, p. 13).

Segundo Monteiro (2014), Pierce Mortan em 1828, considerou uma esfera inscrita em um cone simples que tangencia, simultaneamente, o plano de corte π (paralelo a uma das geratrizes do cone) e o cone, além de um plano θ ortogonal ao eixo do cone (figura 4) para enunciar a seguinte proposição: **considere uma esfera inserida em um cone circular reto tangente simultaneamente ao plano de corte e ao cone. Seja também o ponto F o ponto de tangência entre a esfera $\mathbf{S_1}$ e o plano $\boldsymbol{\pi}$, e P um ponto representante da interseção entre o cone e o plano de corte e a reta d representada pela interseção entre o plano de corte e o plano ortogonal ao eixo do cone. Verifica-se então a relação métrica $\boldsymbol{\lambda(P,F) = \lambda(P,d)}$.**

Considerando, na figura 4, o ponto F de tangência entre o plano π e a esfera; a reta d determinada pela intersecção dos planos π e θ, além da circunferência c_1, contida no plano θ e representa a intersecção entre o cone e a esfera. Determinando um ponto P qualquer na curva de intersecção entre o plano π e o cone podemos considerar a geratriz do cone VP que determina o ponto R na intersecção com a circunferência c_1.

Figura 4: Percepção da Representação da Parábola



Fonte: Monteiro (2014, p. 14).

Considerando agora o ponto P´, que representa a projeção ortogonal do ponto P na reta d e o ponto R podemos mostrar que $VQ = VR$, pois a circunferência c_1 é paralela à base do cone. Podemos observar ainda que $PR = PF$ (propriedade de tangência). Além disso, considerando que os triângulos *VQR* e *RPP´* são isósceles e semelhantes (*PP´//VQ*) vem que $PP' = PR = PF$. Esses resultados nos conduzem a concluir que a distância de um ponto *P* qualquer da parábola a um ponto fixo *F* é igual à distância entre esse mesmo ponto *P* à reta *d*, ou seja, a parábola é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de uma reta e de um ponto dado.

Na relação entre o ponto de vista do corte e ponto de vista do lugar geométrico, quando identificamos os pontos de tangência entre as esferas e o cone e tomamos um ponto qualquer sobre a curva, estamos na realidade, construindo um registro figural, ou seja, uma figura geométrica em que explicitamos seus elementos, pontos sobre a curva e focos. Quando, a partir da figura, extraímos as equações do lugar geométrico, significa que convertemos no sentido de Duval (2009) do registro de representação figural para o algébrico no quadro da geometria. Portanto, neste estudo, primeiro tem-se a apreensão perceptiva para identificar a cônica representada, depois o registro figural das cônicas e por fim o registro algébrico.

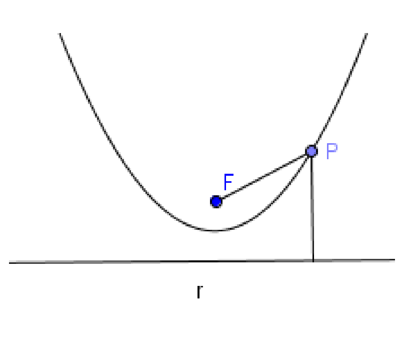
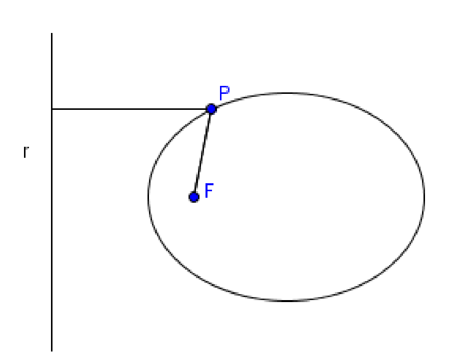
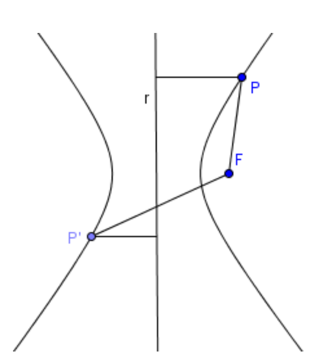
Com essas proposições constatamos que a abordagem dada às cônicas, por Dandelin, Quetelet e Monton, permite mostrar uma equivalência entre o ponto de vista de corte por um plano e o ponto de vista de lugar geométrico que, geralmente, são apresentados de modo isolado.

Além dessa equivalência Dandelin enuncia ainda uma proposição para a excentricidade que permite relacionar as três cônicas a um número partindo de uma interpretação geométrica, que apresentaremos no que segue.

Ponto de Vista da Excentricidade

O ponto de vista da excentricidade que de acordo com Albuquerque (2014) teve início com a definição apresentada por Papus de Alexandria, possibilita a identificação das cônicas por um número, chamado de excentricidade e representado por e considerando o foco F e a reta diretriz d de cada uma.

Figura 5: Cônicas via foco e diretriz

Parábola	Elipse	Hipérbole
		

Fonte: Produção dos autores deste artigo.

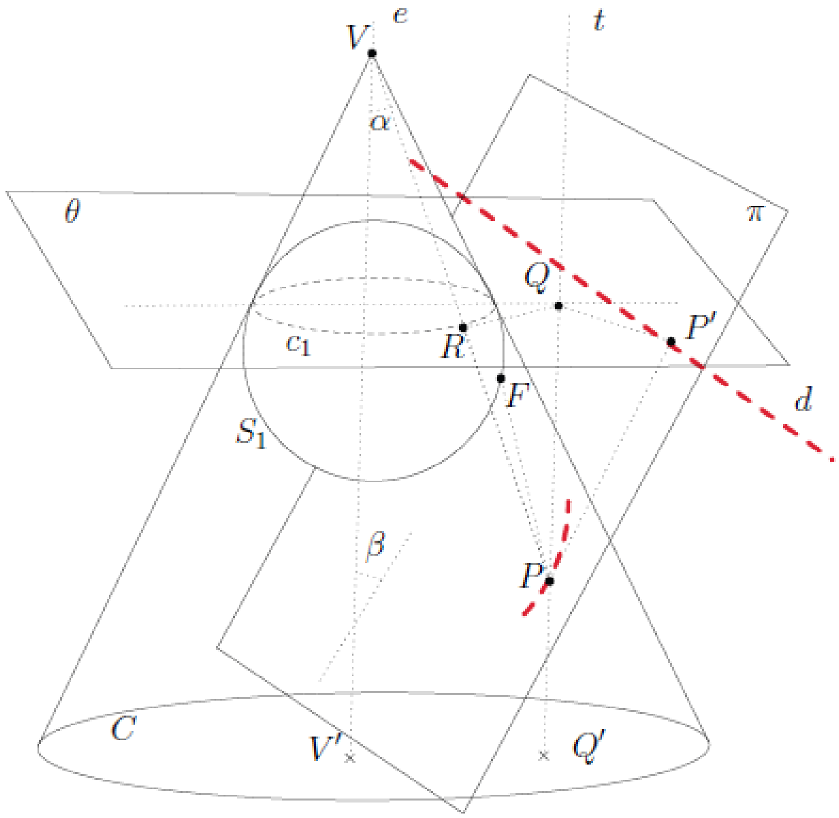
Observando a figura 5 podemos determinar a razão entre a distância de um ponto P qualquer pertencente à cônica a seu foco (F) e a distância desse mesmo ponto à reta diretriz r, ou seja, $\frac{d(P,F)}{d(P,r)}$. A essa constante positiva damos o nome de excentricidade e podemos utilizá-lo para identificar as cônicas da seguinte forma: se seu valor está compreendido entre 0 e 1 a cônica será uma elipse, $0 < e < 1$; se esse valor for igual a 1 a cônica será uma parábola, $e = 1$ e se for maior que 1 será então uma hipérbole, $e > 1$. Mas qual a relação desse número com os cortes apresentados?

Relação entre os pontos de vista do corte e da excentricidade para as cônicas

A abordagem pelo ponto de vista da excentricidade permite a unificação do estudo das cônicas, pois em vez de termos uma definição para cada cônica, como ocorre na propriedade focal, agora temos apenas um número, a excentricidade, que permite identificar as três.

Esta análise unificada para as cônicas é possível com o teorema de Dandelin em que parte da definição do corte de um cone por um plano para obter uma equação que representa uma relação geométrica para a excentricidade. Dandelin considerou um cone simples circular reto, um plano de corte, um plano ortogonal ao eixo do cone e uma esfera inscrita no cone e tangente ao plano (figura 5) e enunciou a seguinte proposição: **considere um cone circular reto C interceptado por um plano π e um ponto P arbitrário dessa intersecção. Então existem neste plano um ponto F, denominado foco, e uma reta d, denominada diretriz, fixos de tal maneira que as medidas das distâncias entre P e F e entre P e d sejam constantes.**

Figura 6: Interpretação Geométrica da Excentricidade



Fonte: Monteiro (2014, p. 19).

Consideramos, na figura 6, um cone *C*, circular reto simples, de vértice *V*, um plano π, que o intercepta, e uma esfera *S*, inscrita no cone e que tangencia o plano π no ponto F. Consideramos também um plano θ, paralelo à base do cone, que intercepta simultaneamente o cone, a esfera e o plano π. Na intersecção com a esfera o plano θ determina o círculo c_1 e na intersecção com o plano π, a reta *d*. Consideramos ainda um ponto *P* qualquer pertencente à intersecção do plano π com o cone e determinamos o ponto *P'*, sua projeção ortogonal sobre a reta *d*. Tomamos a geratriz do cone *VP* que determina o ponto *R* na intersecção com o círculo c_1. Traçamos pelo ponto P a reta t, paralela ao eixo do cone que determinará, na intersecção com o plano θ o ponto Q. Determinamos, em seguida, o ponto *Q´*, projeção ortogonal do ponto Q no plano de base do cone. Desta forma obtemos também o ponto *V*', como a projeção ortogonal do ponto *V* no mesmo plano da base do cone.

Como o triângulo PQR é retângulo em Q (Q pertence à reta t, perpendicular à base do cone e o segmento QR está contido no plano θ que é paralelo ao plano da base do cone) e o ângulo RPQ que tem medida igual a do ângulo α (alternos internos do paralelismo entre as retas *VV*' e *t*) podemos concluir que $\cos(\alpha) = \frac{PQ}{PR}$ ou $PQ = PR \cdot \cos(\alpha)$. Da mesma forma, se considerarmos o triângulo PQP´ retângulo em Q e o ângulo QPP´ que tem medida igual a do ângulo β podemos dizer que $\cos(\beta) = \frac{PQ}{PP'}$ ou $PQ = PP' \cdot \cos(\beta)$. Como consequência podemos concluir que $\text{PR} \cdot \cos(\alpha) = PP' \cdot \cos(\beta)$. Por outro lado, como a medida do segmento PP´ é igual à distância entre o ponto P e a reta diretriz d, isto é, $PP' = d(P,d)$ e a medida do segmento PR é igual à distância entre os pontos P e F, ou seja, $PR = d(P,F)$ podemos dizer que $\cos(\alpha)\,\lambda(P,F) = \cos(\beta)\,\lambda(P,d)$ e ainda que $\frac{\lambda\,(P,F)}{\lambda\,(P,d)} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$ em que λ representa a distância entre os pontos P e F e a distância entre o ponto P e a reta diretriz d.

Desta forma a excentricidade da cônica é definida pela razão $\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$ que depende exclusivamente da configuração geométrica apresentada na figura e, de acordo, com o resultado obtido identifica a cônica em questão. Neste sentido, a relação definidora da cônica pode ser representada pela expressão $e = \frac{PF}{Pd}$ e as cônicas podem ser definidas como o conjunto dos pontos que satisfazem a relação $\delta = \{P/\,\lambda(P,F) = e\,\lambda\,(P,d)\}$ em que δ representa a cônica, P o conjunto de pontos no plano e e a excentricidade da cônica. Assim, podemos extrair as seguintes conclusões a partir da comparação entre os ângulos α e β, sendo que β varia no intervalo $0 < \beta < 90°$.

- Se $\beta = 90°$ então $e = 0$ e a cônica será representada por uma circunferência (como caso especial de elipse).
- Se $\beta = \alpha$ então $e = 1$ e a cônica será representada por uma parábola.
- Se $\beta > \alpha$ então $\cos(\beta) < \cos(\alpha)$ que conduz a $0 < e < 1$ e a cônica será representada por uma elipse.
- Se $\beta < \alpha$ então $\cos(\beta) > \cos(\alpha)$ que implica em $e > 1$ e a cônica será representada por uma hipérbole.

Por meio do corte entre plano e cone, extraímos um registro algébrico para a excentricidade das cônicas que depende exclusivamente de fatores geométricos e após identificarmos o valor da excentricidade teremos um registro numérico que indicará ser uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole, de acordo com as conclusões obtidas anteriormente.

O teorema de Dandelin permitiu apresentar uma relação entre os pontos de vista do corte por um plano e do lugar geométrico, pois a cônica inicialmente representada no espaço pela interseção de um cone por um plano pôde ser então representada no plano e, ainda o estudo de maneira unificada para as três cônicas. Tal estudo pode conduzir a atividades em que dada uma figura semelhante à figura 6, com medidas especificadas o aluno possa concluir a que cônica o ponto P, em questão, pertence. Tais estudos podem ser auxiliados com softwares de representações dinâmicas para que sejam percebidas as alterações que a representação da cônica sofre quando certas medidas são alteradas.

Considerações Finais

Neste artigo apresentamos um estudo em que o teorema de Dandelin está no centro das discussões porque possibilita promover articulações e equivalências entre diferentes pontos de vista das cônicas, no quadro da geometria, de maneira didática não comumente apresentada no ensino. Esta abordagem permitiu apresentar uma relação matemática entre os pontos de vista do corte de um cone por um plano e o ponto de vista de lugar geométrico, além de uma relação entre o ponto de vista do corte de um cone por um plano e o ponto de vista da excentricidade que permite um estudo unificando para as cônicas.

Tal estudo justifica ainda a conversão de uma representação da curva no espaço para uma representação da mesma curva em um plano a partir do ponto de vista do corte de um cone por um plano, da constatação da propriedade focal e do ponto de vista de lugar geométrico, para chegar então na interpretação geométrica para a excentricidade.

Entendemos que é importante a discussão do teorema de Dandelin no ensino, preferencialmente com a ajuda de ferramentas computacionais, para garantir coesão entre as diferentes definições para as cônicas, além do desenvolvimento de relações e percepções obtidas por um trabalho com seus diferentes pontos de vista e representações possíveis no quadro da geometria.

Os documentos oficiais estudados orientam um ensino de cônicas que privilegia o quadro da geometria analítica e embora o currículo do estado de São Paulo considere o quadro da geometria em algumas partes, é usado apenas como motivador para o estudo deste objeto no quadro da geometria analítica. Além disso, apresenta a representação algébrica para a excentricidade apenas para a elipse desvinculada da definição que utiliza o foco e a diretriz e, também, sem analisar as três cônicas de forma unificada. Apresentam a relação para cada uma delas separadamente a partir de uma figura. No entanto, entendemos que a forma unificada permite relacionar uma cônica e outra, evitando o atomismo com que geralmente são tratadas.

Embora o Caderno do Professor", como consequência do currículo do Estado de São Paulo, traga diferentes definições para as cônicas no quadro da geometria, a abordagem é predominantemente analítica, ou seja, o quadro geométrico é abordado rapidamente a para estudar a geometria analítica. Porém, estudar o enfoque geométrico representa uma importante preparação para o estudante no sentido de entender a parte analítica, uma vez que ao fazer a mudança do quadro da geometria para o quadro da geometria analítica para as cônicas na realidade transportamos elementos e resultados do estudo na geometria para um referencial cartesiano de onde outros resultados serão encontrados, como o estudo das equações que representam essas curvas.

Referências

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: Ed UFPR, 2007.

ALBUQUERQUE, C. M. M. S. *Alguns Problemas Geométricos de Papus de Alexandria*. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP). Portugal: Porto, 2014.

BORDALLO, M. *As Cônicas na Matemática Escolar Brasileira: Passado, Presente e Futuro.* Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2011.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 3 ed. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. *Orientações curriculares para o ensino médio:* Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Secretaria da Educação básica. v.2. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.* Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). Brasília: MEC/Semtec, 2000.

BRASIL. *PCN + Ensino médio:* orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). Brasília: MEC/Semtec, 2002.

CALVOSO, J. C. *Estudo das cônicas com aplicações e o software GeoGebra como ferramenta de apoio didático*. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Três Lagoas, 2014.

DUVAL, R. *Semiosis e o Pensamento Humano*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

LACAZ NETTO, F. A. *Lugares Geométricos Planos*. 2 ed. São Paulo: Livraria Nobel S/A, 1957.

MARANHÃO, M. C. S de A. Dialética ferramenta objeto. In: Machado, S. D. A. (Org.). *Educação Matemática:* uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2008.

MONTEIRO, R. M. *Resgate do teorema de Dandelin no estudo de cônicas com o Geogebra*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 2014.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação. *Currículo do Estado de São Paulo:* Matemática e suas tecnologias. 1 ed. São Paulo: SE, 2011.

SIQUEIRA, C. A. F. *Um Estudo Didático das Cônicas:* Quadros, Registros e Pontos de Vista. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2016.

Enviado:05/07/2018
Aceito: 29/08/2018