HORIZONTES - REVISTA DE EDUCAÇÃO

e-ISSN: 2318-1540

PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE QUADRILÁTEROS VIA PROVAS E DEMONSTRAÇÕES

METHODOLOGICAL PROPOSAL FOR EDUCATION OF QUADERS BY EVIDENCE AND DEMONSTRATIONS

Maridete Brito Cunha FERREIRA[1]

Saddo Ag ALMOULOUD[2]

Resumo: este artigo visa apresentar os resultados de uma pesquisa de doutorado que analisa uma organização didática, cujas tarefas articulam provas e demonstrações geométricas, com intuito de minimizar as dificuldades de alunos de um curso de licenciatura em matemática relacionadas a quadrilátero. A organização envolveu tarefas de construções geométricas em um ambiente de papel e lápis, em que os alunos foram solicitados a construir figuras geométricas e justificar matematicamente as técnicas utilizadas. Neste texto, apresentamos as análises *a priori* e *a posteriori* que se apoiaram na Teoria Antropológica do Didático e na articulação entre os registros de representação. Concluímos que as tarefas se mostraram férteis para que os alunos pudessem efetuar conversões de representações de registros e coordenar as apreensões da figura, contribuindo assim para a (re)construção dos saberes/conhecimentos relativos a quadriláteros, prova e demonstração.

Palavras-chave: Prova. Demonstração. Geometria. Quadriláteros.

Abstract: this article aims to present the results of a doctoral survey that analyzes a didactic organization, whose tasks articulate proofs and geometric demonstrations, with a view to minimize the difficulties of students in a bachelor's degree course in mathematics related to quadrilaterals. The organization involved geometric constructions within a paper-and-pencil setting in which students were asked to build figures and mathematically justify the techniques used. In this text, we presented the a priori and the posteriori analysis that supported the anthropological theory of the didactic (ATD) and in the articulation between the records of representation. Concluded that tasks are fertile to that students could carry out conversions of registers and coordinate the seizures of the figures, thus contributing to the (re)construction of implicit and formalized knowledge on quadrilaterals, proof, and demonstration.

Keywords: Proof. Demonstration; Geometry. Quadrilaterals.

1 Introdução

[1] Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC). Professora Assistente da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), Alagoinhas, Bahia. E-mail: marideteferreira@gmail.com

[2] Educação Matemática, Didática da Matemática, TIC na PUC-SP. E-mail: saddoag@pucsp.br

Este artigo tem por objetivo apresentar parte dos resultados de uma pesquisa de doutorado cujo tema foi provas e demonstrações geométricas na formação inicial de professores de matemática. A pesquisa teve como finalidade elaborar, aplicar e analisar uma organização didática que articulou provas e demonstrações com intuito de minimizar as dificuldades de alunos de um curso de licenciatura em matemática relacionadas ao tópico quadrilátero.

A organização foi composta por tarefas envolvendo construções geométricas, relativamente ao tópico quadrilátero, em um ambiente de papel e lápis, em que os alunos foram solicitados a realizar construções geométricas e justificar matematicamente cada uma delas.

A escolha do objeto 'quadrilátero' se justifica por este propiciar um campo fértil para atingirmos os objetivos da pesquisa. Ele permite explorar as características de um conceito e a diferença entre condição necessária e condição suficiente. As propriedades dos quadriláteros permitem trabalhar demonstrações e abordar diversos conteúdos de geometria plana. Além disso, por ser considerado elementar, este é um tópico pouco explorado na graduação.

Neste artigo, apresentaremos os resultados da parte experimental que foi composta de três etapas as quais serão detalhadas no decorrer deste texto. Pela limitação deste documento, serão apresentadas as análises a priori e a posteriori de uma tarefa de cada etapa de nossa investigação.

A organização didática foi modelada e analisada segundo a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999). Também fundamentamos nossas análises na Teoria Dos registros de Representações Semióticas e nas diferentes apreensões das figuras (DUVAL, 1995), na tipologia de provas em matemática segundo (BACHEFF, 2000, 2010) e nas funções da demonstração segundo De Villiers (2001).

2 Referencial teórico

Neste tópico apresentamos os referenciais teóricos que fundamentaram nossas análises.

2.1 Concepção de prova e demonstração adotada neste artigo

Provar e Demonstrar são palavras sinônimas no âmbito da Matemática pura. No entanto, no âmbito da Educação Matemática, é necessário fazer uma distinção entre os termos ‘explicação’, ‘prova’ e ‘demonstração’ para que estas sejam praticadas em todos os níveis de ensino. A distinção entre os significados de demonstração e prova implica aceitar, a depender do contexto, outras produções dos alunos para estabelecer a validade de uma afirmação. Balacheff (2000 apud FERREIRA 2016)) distingue os termos ‘explicação’, ‘prova’ e ‘demonstração’, definindo-os como:

> - *Explicação:* Um discurso que visa tornar inteligível o caráter de verdade, adquirido pelo locutor, de uma proposição ou de um resultado, os quais podem ser discutidos, refutados ou aceitos.
> - Prova: Uma explicação aceita por dada comunidade em dado momento. Essa decisão pode ser objeto de um debate voltado a determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.
> - *Demonstração:* Um tipo de prova dominante em matemática, com uma forma particular. Trata-se de uma série de enunciados que se organizam segundo um conjunto bem definido de regras.

Balacheff (2000, p. 4 *apud* FERREIRA 2016, p. 46) distingue ainda dois tipos de provas: as pragmáticas, “que têm o recurso à ação real ou apresentações” (exemplos, desenhos) e as conceituais, “que não envolvem ação e são caracterizadas por formulações de propriedades e as relações entre elas”.

Ainda que na Educação básica se faça necessário considerar outros níveis de prova, Ferreira (2016, p.46) afirma que:

> Embora reconhecendo a importância de considerar as produções dos alunos da educação básica em diferentes níveis, acreditamos ser necessário que, ainda nesse âmbito, o aluno seja levado a perceber que exemplos não garantem a validade de um caso geral e que a demonstração é necessária.

Esta ideia se justifica pelo fato de que segundo Jahnke (2008 apud FERREIRA, 2016) alunos de nível secundário e até terciário se sentem mais convencidos da validade de um teorema matemático por meio de argumentos empíricos que por uma demonstração.

É possível que a preferência por verificações empíricas se justifique pelo fato de atribuir à prova a única função de validação. Verificar a veracidade de uma proposição é uma função da prova matemática que, para o aluno, pode se tornar desnecessária caso este fique convencido por meio de verificações empíricas. De Villiers (2001) acredita que tomar consciência de outras funções da demonstração pode motivar o aluno à prática de provas matemáticas. As funções da demonstração listadas em De Villiers (2001) são:

- Verificação (dizendo respeito à verdade da afirmação).

● Explicação (fornecendo explicações quanto ao fato de ser verdadeira).

● Sistematização (organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas).

● Descoberta (descoberta ou invenção de novos resultados).

● Comunicação (transmissão do conhecimento matemático).

● Desafio intelectual (realização pessoal ou gratificação resultantes da construção de uma demonstração).

Neste artigo, consideramos a distinção de prova e demonstração segundo Balacheff (2000 apud FERREIRA 2016) e as funções da demonstração segundo De Villiers (2001).

2.2 Teoria Antropológica do Didático

A teoria antropológica do didático, desenvolvida por Yves Chevallard nos anos 1990, tem como objeto de estudo o homem frente às situações matemáticas.

O postulado que serve de base a essa teoria afirma que toda atividade humana pode ser descrita a partir de um modelo único, o qual Chevallard (1999) chamou de praxeologia, ou organização praxeológica.

No âmbito da matemática, todo problema solicita meios para resolvê-lo e o processo que dá suporte teórico a essa resolução é a organização praxeológica matemática, ou organização matemática. Chevallard (1999) dá a esse problema matemático o nome de tarefa, a qual a praxeologia se encarrega de resolver.

Para uma dada tarefa existe uma técnica (que é o modo de realizar a tarefa), uma tecnologia que justifica a técnica e uma teoria que fundamenta a tecnologia. Esses elementos compõem dois blocos: um bloco técnico prático, composto de tarefa e técnica, e um bloco tecnológico-teórico, composto de tecnologia e teoria. É o bloco tecnológico teórico que permite a compreensão de uma técnica e até a possibilidade de uma nova técnica para resolver uma dada tarefa.

Chevallard (1999) afirma que toda atividade matemática pode ser realizada de modo único por meio de uma organização matemática, que se refere aos conteúdos matemáticos. As organizações matemáticas possuem formas de ensinar correspondentes em determinada instituição, que são as organizações didáticas.

Como já explicitado, uma praxeologia se compõe de dois blocos: um técnico-prático, que diz respeito à tarefa e a técnica e que corresponde ao bloco do saber fazer, e um tecnológico-teórico, que abrange a tecnologia e a teoria, correspondendo ao bloco do saber. A noção de praxeologia tem início com a ideia de tarefa, que diz respeito a qualquer atividade humana que requer ser desenvolvida. Uma tarefa é uma atividade específica que pertence a um tipo de tarefa, que por sua vez pertence a um gênero de tarefa. Uma tarefa e o tipo de tarefa que lhe corresponde são geralmente designados por um verbo: *'resolver'*, *'fazer'* e *'demonstrar'* dizem respeito a gêneros de tarefas, enquanto *'resolver um problema'*, *'fazer um bolo'* e *'demonstrar um teorema'* são os tipos de tarefas correspondentes. Um gênero de tarefa solicita uma particularidade para que seu sentido se complete; essa particularidade é o tipo de tarefa. Se T é um tipo de tarefa associado a um gênero de tarefa t, Chevallard (1999) diz que $T \in t$.

Um exemplo: *'demonstrar que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes'* é uma tarefa enquanto *'demonstrar propriedade do paralelogramo'* é um tipo de tarefa correspondente. *'Demonstrar'*, por sua vez, é um gênero de tarefa.

Um tipo de tarefa solicita uma execução, isto é, determinado tipo de tarefa requer uma forma pela qual ela possa ser desenvolvida, forma essa que Chevallard (1999) chama de *técnica*. Assim, uma técnica é uma maneira de fazer uma tarefa. Uma tarefa T solicita uma técnica τ, que é a maneira de executar T. O par $[T/\tau]$ é chamado, na teoria antropológica do didático, de bloco prático-técnico, que corresponde ao saber fazer.

Independentemente da instituição à qual a tarefa e técnica pertençam, a técnica escolhida deve vir acompanhada de uma justificativa, que Chevallard (1999) chama de *tecnologia* (θ). É a tecnologia que justifica a escolha de determinada técnica para resolver uma dada tarefa em determinada instituição. Por mais simples ou mais formal que a técnica seja, ela requer uma tecnologia apropriada que a justifique.

A tecnologia θ e a teoria Θ formam o bloco *tecnológico-teórico* e, juntas, representam o *saber*. Uma organização matemática se constitui, então, de dois blocos: um técnico-prático $[T/\tau]$, composto de tarefa e técnica, que representa o saber fazer, e outro tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$, composto de tecnologia e teoria, que representa o saber.

Neste artigo apresentamos parte de uma organização didática referente a demonstrações geométricas, utilizando o objeto 'quadrilátero'. Nessa organização, são propostas tarefas de construção geométrica que os alunos são convidados a executar e são analisadas as técnicas que estes utilizam e os discursos teórico-tecnológicos por eles mobilizados em suas justificativas.

2.3 Teoria dos Registros de Representação Semiótica e formas de apreensão da figura

A única forma de acesso aos objetos matemáticos é por meio de uma representação. Essa característica a difere das outras áreas e de acordo com Duval (2009) pode justificar a dificuldade com relação ao seu ensino e aprendizagem.

De acordo com este autor as representações semióticas se referem a um sistema específico de signos[3], que, no âmbito da matemática, incluem a língua natural, a escrita algébrica, os gráficos cartesianos e as figuras geométricas.

A função de uma representação semiótica vai muito além da comunicação. Ela se presta a representar um objeto que só é acessível por meio de representações, que podem até mesmo ser confundidas com o próprio objeto. Segundo Duval (2011), mais que tornar possível o acesso aos objetos está a possibilidade de transformar uma representação em outra representação semiótica.

Essas transformações podem ocorrer dentro de um mesmo sistema (o *tratamento*) ou entre sistemas semióticos diferentes (a *conversão*). Duval (2011) afirma que essas transformações "constituem a dinâmica cognitiva de toda atividade matemática" (p. 69) e que nem todo sistema semiótico é suficiente para efetuar essas transformações.

Buscando um sistema semiótico que, além de representar o objeto, cumprisse as atividades de tratamento e conversão, Duval introduziu a noção de registro de representação, que "se caracteriza essencialmente pelas operações cognitivas específicas que ele permite efetuar" (DUVAL, 2011, p. 70).

A especificidade da atividade matemática, segundo Duval (2011), está relacionada à diversidade de registros de um mesmo objeto e à possibilidade de transformação de registros

[3]Signo "é uma coisa que representa uma outra coisa: seu objeto. Ele só pode funcionar como signo se carregar esse poder de representar, substituir uma outra coisa diferente dele" (SANTAELLA, 1983, p. 12). Segundo Duval (2011, p. 71), "o que constitui qualquer coisa como signo não é a sua utilização com a finalidade de comunicação; é seu emprego por oposição a uma ou várias outras coisas que poderiam ser empregadas em seu lugar na mesma situação".

de representação, que o leva a acreditar que a compreensão em matemática depende da coordenação de ao menos dois registros de representação para um mesmo objeto.

As representações envolvidas na geometria são a língua natural, a simbólica e a representações geométricas ou figurais. Para serem resolvidos, os problemas de geometria necessitam, em sua maioria, do apoio da figura, o que corresponde à conversão de um problema em língua natural para um problema no registro figural. Os tratamentos também são comuns em geometria ao relacionar as propriedades de um objeto.

Duval (2011), na teoria dos registros de representação semiótica, defende que, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que garante a apreensão do conhecimento matemático. É a ocorrência de conversão entre dois tipos de registro que garante que houve aprendizagem, uma vez que permanecer em um único registro induz a confundir o objeto com sua representação.

O raciocínio geométrico, de acordo com Duval (*apud* ALMOULOUD, 2004) envolve três tipos de processos cognitivos, que desempenham funções epistemológicas próprias:

- o processo de visualização para exploração heurística de uma situação complexa;
- a construção de configurações, que pode ser trabalhada como um modelo em que as ações realizadas representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;
- o raciocínio, que é o processo que conduz à prova e à explicação.

Duval (*apud* ALMOULOUD, 2004, p. 126) afirma que “esses processos estão entrelaçados e sua sinergia é cognitivamente necessária para a proficiência em Geometria”. No entanto, esses processos podem ser realizados de forma independente. Por exemplo, a construção pode levar a uma visualização, mas esta não depende da construção. Já a visualização pode colaborar para o raciocínio, bem como levar a cometer enganos (DUVAL *apud* JONES, 1998).

As definições e os problemas em geometria solicitam, mesmo que inconscientemente, ações de reprodução, construção e desconstrução de figuras que, associadas aos textos, requerem formas de interpretação que Duval (ALMOULOUD, 2004) classifica em:

1. *Sequencial*: utilizada nas atividades de construção ou descrição, com o objetivo de reproduzir uma figura.

2. *Perceptiva*: interpretação das formas de uma figura em dada situação geométrica.
3. *Discursiva*: interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação de enunciados, levando em consideração a rede semântica de propriedades do objeto.
4. *Operatória*: centrada nas modificações possíveis de uma figura de partida e na reorganização perceptiva que essas modificações sugerem.

Tomar consciência da distinção entre as três primeiras formas de apreensão é condição necessária para a resolução de problemas em geometria e para entrada na forma de desenvolvimento do raciocínio exigida por essa resolução (DUVAL, 2012).

Na organização didática apresentada neste artigo, são propostas tarefas de construção geométrica em que os enunciados se encontram em registro da língua natural, solicitando apreensão sequencial no momento em que os alunos farão a conversão para o registro figural. Na justificativa da construção são solicitadas apreensões perceptiva, discursiva e operatória.

3.0 Apresentação e análise do experimento

Neste artigo, como já foi destacado, objetivamos apresentar parte dos resultados da fase experimental de uma pesquisa de doutorado em que foi desenvolvida, aplicada e analisada uma organização didática, articulando provas e demonstrações, com o intuito de minimizar as dificuldades relacionadas a quadriláteros, diagnosticadas em uma análise preliminar, bem como estimular aos participantes da pesquisa quanto ao trabalho com demonstração em sua prática futura.

Neste tópico apresentaremos e justificaremos as escolhas feitas na elaboração e aplicação da organização didática e parte de sua aplicação.

3.1 Construção da organização

Nos estudos preliminares apresentados em Ferreira (2016), pudemos verificar a dificuldade apresentada por alunos de graduação quanto à prática de demonstrações, bem como a falta de motivação para o trabalho com demonstração em sua prática futura. Também foi detectado que a forma como os conteúdos são apresentados nos livros de geometria utilizados na maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática das universidades brasileiras segue uma lógica que omite todas as fases de seu desenvolvimento. Roque (2012, apud FERREIRA, 2016)) assinala que existe uma diferença crucial entre a lógica em que um texto matemático é apresentado e o modo como ele se desenvolve.

Essa forma direta de apresentação da geometria, contrária ao seu desenvolvimento, também se repete nas aulas de graduação. Tomando como hipótese que a inversão entre a ordem da descoberta e a ordem da exposição dos conhecimentos matemáticos pode ser um dos fatores que contribuem para a dificuldade dos alunos em compreender demonstrações geométricas, Ferreira (2016) desenvolveu uma sequência de atividades que proporcionasse uma simulação do ambiente de descoberta.

Foi proposta uma abordagem que se opõe ao modelo atualmente praticado e investigou se ela se apresentou favorável à mudança do quadro atual dos sujeitos envolvidos. No entanto, queremos salientar que o propósito não foi fornecer fórmulas para se ensinar demonstração, mas sim testar se a referida organização, associada às discussões, pode possibilitar o cumprimento dos objetivos propostos.

Em seus estudos preliminares, Ferreira (2016) identificou – nas dimensões epistemológica, cognitiva e didática – as razões que podem justificar a manutenção do atual estado da prática das demonstrações o que torna possível decidir quais serão as variáveis globais e seus valores, a fim de fundamentar a construção da organização, que são:

1. **Referencial:**

- A escolha da adoção de aspectos da teoria das situações didáticas tem como objetivo controlar constatações das dimensões epistemológica e didática referentes à abordagem dada às demonstrações na graduação. Visa também provocar conjecturas e valorizá-las, o que é um aspecto dessa teoria, em que visou estimular os alunos a elaborar argumentos de um problema e chegar à construção de uma demonstração, controlando constatações da dimensão cognitiva.
- *Concepção de provas e demonstrações, segundo Balacheff (1988), e funções da prova, segundo De Villiers (2001)* – Apresentação das concepções de prova segundo Balacheff e de funções da prova segundo De Villiers, apresentando uma distinção dos termos ‘prova’ e ‘demonstração’ e outras funções da demonstração. Buscando controlar constatações da dimensão epistemológica a respeito das concepções dos alunos sobre provas e demonstrações.

- *Teoria dos registros de representação semiótica* – Buscar articular os registros língua natural, simbólicos e figurais. Buscou-se também provocar a passagem da apreensão perceptiva para a apreensão discursiva. Com esta escolha pretendeu esclarecer aos alunos o estatuto da figura e conscientizá-los da subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva. Visou com estas escolhas controlar constatações da dimensão cognitiva.

2. **Ambiente de realização:** Opção por tarefas de construções geométricas em um ambiente de papel e lápis. Acreditou-se que estes têm potencial para provocar conjecturas pelo aluno, conscientizá-lo das apreensões perceptiva, sequencial e discursiva, aproximá-lo da prova matemática e criar condições para que perceba a função de explicação da demonstração. Esta escolha visa controlar constatações das dimensões epistemológica, cognitiva e didática.
3. **Organização dos alunos:** Realização das atividades em duplas ou trios. Esta escolha visa proporcionar um ambiente de discursão e de interação entre os alunos.
4. **Formato de entrega das atividades:** Optou-se por entregar as atividades impressas, a fim de otimizar o tempo e garantir que os textos referentes às atividades estariam transcritos corretamente, assegurando as informações necessárias para o entendimento do enunciado de cada atividade.
5. **Forma de coleta de dados:** As sessões foram gravadas em áudio e vídeo, disponibilizando um gravador para cada grupo a fim de coletar as discussões ocorridas nos grupos. Coletou-se também registros escritos.

Diante das escolhas das variáveis globais, a autora elaborou a organização didática em três etapas cujas atividades foram inspiradas em Maioli (2001), Maziero (2011), e complementamos com atividades que fazem parte de livro de autoria Ferreira (2016).

A sequência aplicada Ferreira (2016) foi dividida em três etapas. Apresentaremos neste artigo a descrição de cada uma delas e, pela limitação de espaço, apresentaremos a aplicação e análise de uma tarefa de cada etapa.

Nas três etapas os alunos foram agrupados em duplas ou trios e as sessões foram gravadas em vídeo e áudio. Os participantes da pesquisa foram estudantes de um curso de licenciatura em matemática em que todos já cursaram ou cursavam a componente 'Geometria plana', que é oferecida no segundo semestre do curso, em que são contemplados os conteúdos da geometria plana euclidiana. A seguir detalharemos cada etapa da investigação, seguida das análises de uma tarefa de cada etapa.

3.2 Aplicação e análise das atividades

1ª Etapa: Foram utilizados os três livros analisados, que constam na bibliografia da disciplina 'Geometria plana' de um curso de licenciatura em matemática, e também livros indicados para os níveis fundamental e médio. A atividade foi desenvolvida com o objetivo de possibilitar aos alunos se apropriar dos conhecimentos em jogo. Outro objetivo desta etapa foi trabalhar as definições de quadriláteros notáveis utilizando simultaneamente três registros de representação: o registro da língua natural, o registro simbólico e o registro figural, chamando atenção dos alunos para a importância dos conceitos e de manter coerência com as definições adotadas. Esta etapa se justificou pelo fato de dois dos livros analisados não apresentarem as definições dos quadriláteros nos três registros de representação e de três apresentarem incoerência entre a definição e a propriedade dos ângulos da base do trapézio isósceles. Segue a experimentação e análise de uma subtarefa da tarefa 1- etapa 1.

d) Definir cada um dos quadriláteros seguintes: paralelogramo, retângulo, losango, quadrado, trapézio.

Após receber a atividade e serem disponibilizado um tempo para que os alunos discutissem em grupo, partimos para discussão da tarefa. Apresentaremos um trecho do diálogo:

Andreia*: Eu não sei definir, eu só sei ver.*
Gustavo*: Paralelogramo é o quadrilátero que possui os lados paralelos dois a dois.*
Andreia*: Aí você falou também do retângulo.*
Gustavo*: É um paralelogramo. O retângulo é um paralelogramo. A diferença é que no retângulo os ângulos internos têm noventa graus. Mas o retângulo também é um paralelogramo.*
Fábio*: Não. O paralelogramo é um retângulo? Não.*
Hugo*: O retângulo que é um paralelogramo.*
Fábio*: Eu coloquei que o paralelogramo é o quadrilátero que possui os lados iguais e paralelos dois a dois.*
Jadson*: Eu coloquei que é um quadrilátero com quatro segmentos paralelos dois a dois.*
Daniela*: Eu coloquei que é um quadrilátero oblíquo com lados opostos iguais e paralelos.*

e-ISSN: 2318-1540

***Fábio**: Ele seria oblíquo à base, não é? Que forma ângulo agudo com a base.*

***Ivo**: Eu coloquei: polígono de quatro lados, tendo os lados opostos com mesma medida e os lados oblíquos em relação à base.*

***Fábio**: É! Tem que ser oblíquo em relação à base porque senão eu vou imaginar que vai ser oblíquo em relação a um plano.*

***Pesquisadora**: E vocês imaginaram a necessidade de colocar esse termo oblíquo por quê?*

***Daniela**: Por causa do retângulo.*

***Fábio**: Por causa dos lados paralelos do retângulo.*

***Gustavo**: Mas o retângulo também é um paralelogramo.*

***Daniela**: Sim, mas para a gente falar a diferença... Como vamos falar a diferença deles dois?*

***Gustavo**: Mas aí é como a professora falou. Assim a gente tá usando a figura para definir. A gente pode definir depois que o retângulo é o paralelogramo que possui os quatro ângulos retos.*

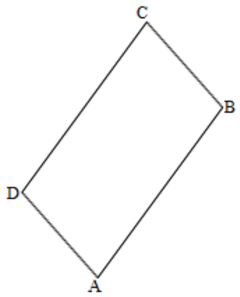
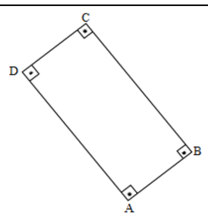
***Daniela**: Foi por isso que eu acrescentei o "oblíquo", porque por essa definição o retângulo é um paralelogramo.*

***Hugo**: Mas o retângulo é um paralelogramo.*

***Andreia**: Aí terminou de confundir tudo.*

Institucionalizamos em um quadro a definição de cada quadrilátero notável representando-a nos registros de língua natural, figural e simbólica. (Quadro 1).

Quadro 1. Institucionalização de definições de paralelogramo e retângulo.

Um quadrilátero plano convexo é paralelogramo se, e somente se, possui os lados opostos paralelos.		$ABCD$ é paralelogramo $\Leftrightarrow \overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{AD} // \overline{BC}$.[4]
Um paralelogramo é retângulo se, e somente se, possui um ângulo reto.		O paralelogramo $ABCD$ é um retângulo $\Leftrightarrow med(A\hat{B}C) = 90^o$ ou $med(B\hat{C}D) = 90^o$ ou $med(C\hat{D}A) = 90^o$ ou $med(D\hat{A}B) = 90^o$

Fonte: Adaptado de Ferreira (2016).

[4] Neste trabalho denotaremos $\overline{AB}$: segmento de reta de extremos *A* e *B*; *AB*: medida de $\overline{AB}$

Os relatos apresentados acima nos permitiram observar alguns pontos. Os alunos identificam os quadriláteros pela apreensão perceptiva, mas apresentam dificuldades em representá-los em língua natural ou em registro simbólico, evidenciando confusão entre o objeto e sua representação. Tiveram dificuldades em relacionar os quadriláteros notáveis, o que também é consequência da confusão entre objeto e representação. Os alunos confundem definição com propriedade, incluindo nas definições dos quadriláteros notáveis atributos que devem ser demonstrados para serem considerados válidos. Concepção de que o esclarecimento das relações entre os quadriláteros pode causar confusão no aprendizado dos alunos.

Os diálogos dos alunos evidenciam que eles apresentam dificuldades conceituais no que tange aos quadriláteros, mais especificamente, na caracterização dos quadriláteros notáveis, que é mais influenciada pela apreensão perceptiva de figura. Isso já foi constatado por Duval (2012), que afirma que a limitação da representação de um objeto matemático a um único registro pode provocar confusão entre o objeto e sua representação. Os resultados colhidos na primeira etapa da sequência se assemelham aos obtidos na pesquisa de Maioli (2011). Há indícios que permitem afirmar que as dificuldades e concepções observadas na graduação podem se perpetuar ao longo da carreira docente.

2.ª etapa: As 10 tarefas envolvem construções geométricas no ambiente papel-lápis e exigiam provas e demonstrações. Solicitou-se que os alunos construíssem quadriláteros notáveis e apresentassem a justificativa matemática de cada construção. Visando controlar a evolução das estratégias que desejávamos que fossem desenvolvidas pelos alunos e, consequentemente, a evolução dos conhecimentos sobre o tópico ‘quadriláteros’, em cada uma das tarefas propostas levaram-se em consideração variáveis locais. Os valores atribuídos a essas variáveis visaram mobilizar diferentes conhecimentos pelos alunos, uma vez que cada escolha visou permitir a resolução das situações de diferentes estratégias de construção e a apresentação de justificativas para as construções realizadas. A escolha dessas variáveis, de seus respectivos valores e as consequências dessas escolhas estão apresentadas nas análises *a priori*.

Para a experimentação, distribuímos as tarefas para cada grupo e após concedermos um intervalo de tempo para que os alunos pudessem discutir internamente, os grupos apresentaram seus resultados, os quais foram colocados em discussão.

Nossas análises *a posteriori* se baseiam nos registros coletados nas discussões ocorridas internamente aos grupos, nas discussões ocorridas ao socializarmos os resultados

e-ISSN: 2318-1540

apresentados pelos grupos e nos registros feitos pelos alunos. Desses registros, escolheremos aqueles que forneçam dados relevantes para nossa pesquisa.

Apresentaremos a análise *a priori* e, em seguida, relataremos a experimentação e exporemos a análise *a posteriori* da tarefa 2 da segunda etapa e, exporemos a produção e diálogo de apenas um dos grupos.

Tarefa 2. Construir um paralelogramo, dados dois lados consecutivos e uma diagonal.

Enunciado: Construir um paralelogramo *ABCD*, dados dois lados consecutivos $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ e a diagonal $\overline{BD}$.

Análise *a priori* da tarefa 2

Ao representar os dois lados consecutivos e a diagonal, os alunos irão obter um triângulo *ABD*. Em seguida deverão buscar uma estratégia para obter o quarto vértice *C* do quadrilátero *ABCD* de modo que este seja um paralelogramo.

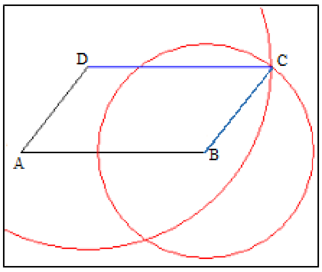
Previmos duas técnicas para a realização desta tarefa:

Técnica 1. Utilizando compasso e régua para construir um quadrilátero com lados opostos congruentes

Por esta técnica, o aluno poderá utilizar compasso e régua para construir um quadrilátero com lados opostos congruentes, por meio dos seguintes passos:

Sejam m_1 e m_2 as medidas respectivas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$. Constroem-se as circunferências de centro *D* e raio m_1 e de centro *B* e raio m_2. *C* é o ponto de intersecção dessas duas circunferências. *ABCD* é o paralelogramo procurado (Figura 1).

Figura 1. Figura-suporte da técnica 1, correspondente à tarefa 2.



Fonte: Ferreira (2016, p. 219).

O aluno poderá recorrer à apreensão perceptiva e afirmar que o quadrilátero construído é um paralelogramo, não validando sua construção.

Para validar sua técnica, ele poderá utilizar o par de esquadros, verificar que os lados opostos do quadrilátero construído são paralelos e afirmar que *ABCD* é um paralelogramo. Nesse caso, o aluno realizará uma prova pragmática em nível de experimento crucial, visto que poderá generalizar sua técnica a partir de um caso, acreditando que, se funciona para este, então funcionará sempre. Caso tente validar sua técnica utilizando uma prova pragmática, pretendemos esclarecer que esta prova convence, mas não valida o caso geral e não explica por que o quadrilátero construído é um paralelogramo.

Para validar o caso geral, o aluno poderá fazer a seguinte demonstração:

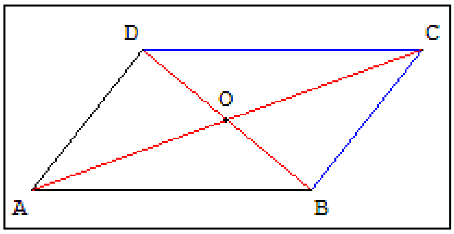
Por construção, $DC = AB$ e $BC = AD$. Traçando a diagonal $\overline{BD}$ e sabendo que ela é comum aos triângulos *ABD* e *BCD*, pelo caso lado-lado-lado, esses triângulos são congruentes. Logo, temos: $A\hat{D}B \equiv D\hat{B}C \Rightarrow \overline{AD} // \overline{BC}$ (teorema das paralelas) e $A\hat{B}D \equiv B\hat{D}C \Rightarrow \overline{AB} // \overline{DC}$ (teorema das paralelas). Portanto, *ABCD* é paralelogramo.

Técnica 2. Construção usando a simetria central

Por meio desta técnica, o aluno poderá construir o ponto médio *O* da diagonal $\overline{BD}$ e o ponto *C*, simétrico de *A* em relação ao ponto *O*.

Para validar a técnica, o aluno poderá utilizar a simetria dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ (ou $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$) em relação ao ponto *O* (Figura 2) ou utilizar a demonstração referente à técnica 3 da tarefa 1.

Figura 2. Figura-suporte da técnica 2, correspondente à tarefa 2.



Fonte: Ferreira (2016, p. 220).

Esta tarefa tem potencial para propiciar ao aluno condições para a elaboração de conjecturas, e, é uma tarefa que poderá conduzi-lo a aplicar simetria central, congruência de triângulos e teorema das paralelas, além de formular e demonstrar condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero seja um paralelogramo.

O aluno pode utilizar técnicas semelhantes à proposta na situação 1 e pode ainda optar por duas novas técnicas: na primeira, poderá utilizar régua e compasso para construir um quadrilátero com lados opostos congruentes ou, com a segunda, utilizar simetria central.

Ao fazer a opção pela técnica 1, o aluno construirá um quadrilátero em que os lados opostos são congruentes. Neste caso, pode afirmar que o quadrilátero construído é um paralelogramo, recorrendo à apreensão perceptiva para justificar sua construção, fundamentado no fato de ter construído um quadrilátero com lados opostos congruentes. Caso isso ocorra, teremos uma oportunidade para rever a definição de paralelogramo considerada e questionar se o fato de um quadrilátero ter lados opostos congruentes implica necessariamente que ele tem os lados opostos paralelos. Leva-se assim o aluno a formular mais uma condição suficiente para que um quadrilátero seja um paralelogramo.

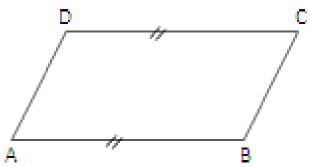
Faremos a **institucionalização** apresentando a seguinte propriedade do paralelogramo: *Um quadrilátero é paralelogramo se, e somente se, possui os lados opostos congruentes*.

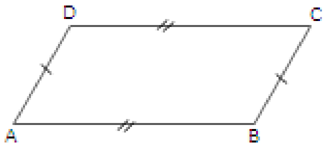
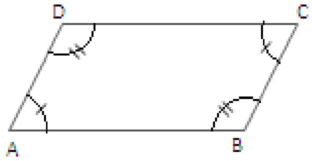
Bloco tecnológico-teórico: Definição de diagonal de um quadrilátero, definição de lados consecutivos de um quadrilátero e definição e propriedade do paralelogramo, para que o aluno possa dar início à resolução da tarefa 2.

Experimentação e análise *a posteriori* da tarefa 2

Entregamos a atividade 2 impressa e disponibilizamos tempo para que fosse realizada. Para justificar a construção realizada nesta tarefa, o aluno poderia lançar mão de propriedades já institucionalizadas na tarefa anterior e que estão ilustradas no quadro 2

Quadro 2. Caracterizações do paralelogramo institucionalizadas na tarefa 1.

REGISTRO EM LÍNGUA NATURAL	REGISTRO FIGURAL	REGISTRO MATEMÁTICO
Um quadrilátero é paralelogramo se, e somente se, possui dois lados opostos paralelos e congruentes.		$ABCD$ é paralelogramo $\Leftrightarrow$ $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$
Um quadrilátero é paralelogramo se, e somente se, seus lados opostos são congruentes.		$ABCD$ é paralelogramo $\Leftrightarrow$ $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$

		
Um quadrilátero é paralelogramo se, e somente se, seus ângulos opostos são congruentes.		$ABCD$ é paralelogramo $\Leftrightarrow \hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$

Fonte: Ferreira (2016, p. 213).

Apresentamos a análise da produção do grupo IV, que tentou utilizar a técnica que faz apelo à simetria central.

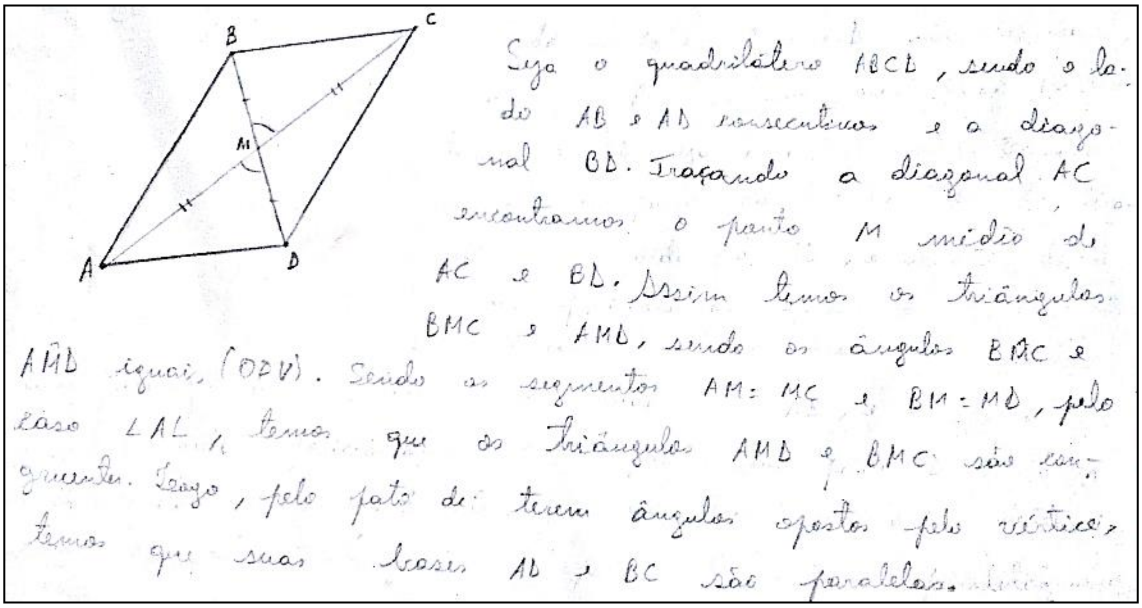
A Figura 3 mostra o registro da realização da tarefa 2 pelo grupo IV. O texto apresentado corresponde a uma prova conceitual, segundo a classificação de Balacheff (2000). Os alunos utilizaram como hipótese o fato de que as diagonais do quadrilátero se interceptam no ponto médio de ambas, embora isso não fique garantido pela técnica utilizada na construção.

Apesar de não ter chegado à conclusão utilizando argumentos corretos, podemos considerar um avanço o fato de os alunos não confundirem a hipótese com o que era para ser demonstrado, como podemos constatar no texto apresentado na Figura 3.

Analisando a construção, observamos que o ponto C foi obtido antes de construírem a diagonal $\overline{AC}$. Para que a simetria central justificasse a obtenção do ponto C, os alunos deveriam ter obtido antes o ponto médio M da diagonal $\overline{BD}$. Isso pode ser constatado no texto apresentado (Figura 3) e neste diálogo:

***Ivo**: Com o compasso transferimos essa medida $\overline{AD}$ pra cá e essa medida $\overline{AB}$ pra cá [translação dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$]. Encontramos o ponto C. Como já temos a diagonal $\overline{BD}$, traçamos a outra diagonal $\overline{AC}$ e encontramos o ponto médio [...].*
***Jadson**: Mas e o ponto médio? Por que ponto médio? Não provou ainda.*
***Ivo**: As diagonais do paralelogramo se cruzam no ponto médio.*
***Jadson**: Mas não provou ainda. Eu quero saber do ponto médio*

Figura 3. Registro da realização da tarefa 2 pelo grupo IV.



Fonte Ferreira (2016, p. 222).

Observamos que a técnica utilizada pelo grupo é a construção de um quadrilátero com lados opostos congruentes, que poderia ser justificada pela propriedade dos lados opostos congruentes de um paralelogramo que já foi institucionalizada em uma tarefa anterior. Conjecturamos que, pela apreensão perceptiva ou por já conhecer a propriedade, o aluno afirmou que as diagonais do paralelogramo se interceptam em seus pontos médios.

Podemos constatar também que o aluno ***Jadson*** contestou o uso da propriedade (diagonais que se interceptam nos pontos médios), uma vez que esta não foi demonstrada, o que pode ser considerado um avanço em relação à ênfase dada à apreensão perceptiva.

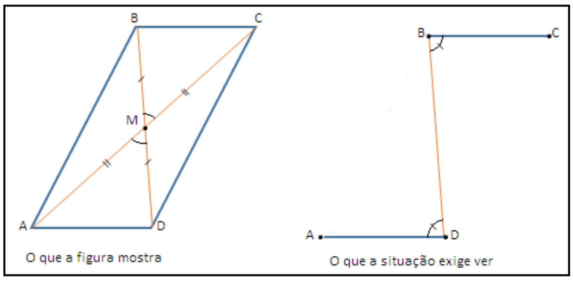
Outra observação na prova apresentada pelo grupo foi a conclusão sobre o paralelismo dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$. Apesar de havermos utilizado em mais de uma demonstração o teorema das paralelas para concluir o paralelismo dos lados do paralelogramo, os alunos deste grupo não perceberam que este teorema deveria ser utilizado para concluir sobre o paralelismo dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ do quadrilátero *ABCD*. Acreditamos que essa dificuldade se relaciona com o fracionamento do quadrilátero. Na atividade 1, os paralelogramos estavam divididos apenas por uma diagonal, enquanto na atividade 2 são traçadas duas diagonais.

Com esta representação estão em destaque a congruência dos ângulos opostos pelo vértice (ângulos formados pela interseção das diagonais) e a congruência dos segmentos

$\overline{BM}\ e\ \overline{MD}$ e dos segmentos $\overline{AM}\ e\ \overline{MC}$. Diante destas hipóteses, os alunos justificaram corretamente a congruência dos triângulos *BMC* e *AMD*, mas não utilizaram esta congruência para justificar o paralelismo e a congruência dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Acreditamos que os ângulos opostos pelo vértice se destacaram na figura e provavelmente impediram de perceber a reconfiguração que indicaria o tratamento matemático pertinente.

Apresentamos na Figura 4 uma reconfiguração que sugere o tratamento matemático que poderia solucionar o problema.

Figura 4. Reconfiguração que possibilita visualizar o tratamento matemático possível à demonstração do paralelismo de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.



Fonte: Ferreira (2016, p. 223).

Segundo Duval (2012, p. 124), "uma figura guarda uma estrutura perceptiva autônoma: os objetos que aparecem podem, deste modo, serem diferentes dos tipos de objetos que a situação exige ver".

Para realização da tarefa 2, os alunos evidenciaram ter conhecimento do que vêm a ser lados consecutivos e diagonal do paralelogramo, elementos fornecidos para a construção deste.

As escolhas feitas nesta tarefa (valor da variável local: dois lados consecutivos e uma diagonal) implicaram uma nova técnica, conforme previsto em nossa análise *a priori*. A congruência dos lados opostos, técnica utilizada na tarefa 1, foi utilizada por alguns grupos para realização da tarefa 2, o que também fora previsto em nossa análise *a priori*.

Os grupos que tentaram justificar suas construções utilizando a propriedade do ponto médio evidenciaram ter subordinado a apreensão discursiva à apreensão perceptiva, uma vez que a simetria central não foi, de fato, utilizada para a construção do paralelogramo.

Conjecturamos que o fracionamento da figura (quadrilátero e suas diagonais) dificultou a visualização da reconfiguração pertinente ao tratamento matemático que deveria ser utilizado

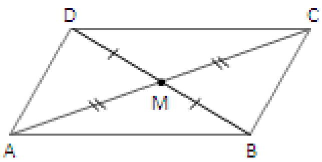
e-ISSN: 2318-1540

por um dos grupos para validar sua técnica. No entanto, apenas identificamos esse fato em um grupo.

Em nossos estudos preliminares, identificamos que a única função da demonstração concebida pelos alunos investigados era a de validação. Durante a resolução desta tarefa, percebemos que a função de verificação/convencimento ainda é ressaltada, por exemplo nesta fala: *"A dificuldade é convencer, não é, professora? Tem que convencer..."*.

Finalizamos institucionalizando, nos três registros de representação, a caracterização do paralelogramo (Quadro 3).

Quadro 3. Caracterizações do paralelogramo institucionalizadas na tarefa 2.

REGISTRO EM LÍNGUA NATURAL	REGISTRO FIGURAL	REGISTRO SIMBÓLICO
Um quadrilátero é paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se intersectam em seus respectivos pontos médios.		$ABCD$ é paralelogramo $\Leftrightarrow$ $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}$ e $\overline{AM} \equiv \overline{MC}$ e $\overline{DM} \equiv \overline{MB}$

Fonte: Ferreira (2016, p. 227).

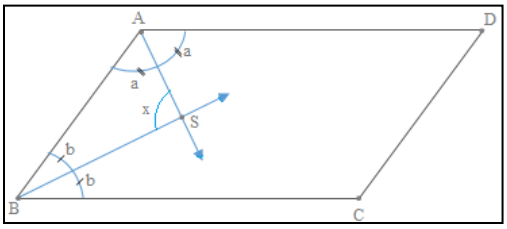
3ª Etapa: Nesta etapa foram apresentadas tarefas cujo objetivo foi aplicar as propriedades institucionalizadas nas tarefas anteriores. Foram propostas situações com a intenção de permitir aos alunos trabalhar condições necessárias e suficientes, destacar hipótese e tese de um teorema e trabalhar teorema recíproco, assim como explorar a redação de um teorema. As tarefas desta etapa não foram aplicadas totalmente uma vez que a disponibilidade dos participantes da pesquisa não permitiu sua integralização.

As tarefas desta etapa são constituídas de subtarefas, que representaremos pelo número e letra correspondentes. Por exemplo, tarefa 1, letra *a*, será representada por T_{1a} e a técnica correspondente será $t_i(T_{1a})$, em que *i* designa o número da técnica.

Tarefa 12. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo. Se for verdadeira, prove-a. Se for falsa, mostre um contraexemplo.

T_{12e} :As bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são perpendiculares.

Figura 4. Figura-suporte da tarefa 12.



Fonte: Ferreira (2016, p. 306).

Demonstração:

Como $\overrightarrow{AS}$ e $\overrightarrow{BS}$ são bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ respectivamente, temos que $D\hat{A}S \equiv S\hat{A}B$ e $A\hat{B}S \equiv S\hat{B}C$.

$2a + 2b = 180º \Rightarrow a + b = 90º$ (I) (pois *ABCD* é um paralelogramo) e $a + b + x = 180º$ (II) (pois *ASB* é um triângulo). Substituindo I em II, temos: $90º + x = 180º \Rightarrow x = 90º$. Logo, $\overrightarrow{AS}$ e $\overrightarrow{BS}$ são perpendiculares.

Os alunos poderão conjecturar sobre esta afirmação atribuindo valores aos ângulos do paralelogramo e encontrando o valor de 90º para cada ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos consecutivos do paralelogramo. Para isto é necessário que conheçam as propriedades referentes aos ângulos do paralelogramo, isto é, ângulos opostos congruentes e ângulos consecutivos suplementares.

Este item gerou bastante discussão, pois os alunos não estavam certos de suas respostas.

Fábio: *É verdadeira ou falsa? Tem que procurar um paralelogramo que dê falsa. Já fiz com o quadrado, dá certo; com o retângulo, dá certo. No trapézio será que dá certo? Mas o trapézio não é um paralelogramo.*

Marina: *São as bissetrizes.*

Fábio: *No retângulo forma, no quadrado forma, no losango forma. Será que não é verdadeiro, não?*

Bruna: *Eu acho que não.*

Marina: *Eu acho que não. Porque no paralelogramo vai dar um triângulo com dois ângulos de 90º, não é não?*

Fábio: *É a interseção das bissetrizes.*

Bruna: *No quadrado e no retângulo também dá.*

Fábio: *É esse, ó, formado pelas bissetrizes.*

Marina: *Ah! Tá... Mas aí vocês estão fazendo com a diagonal, não?*

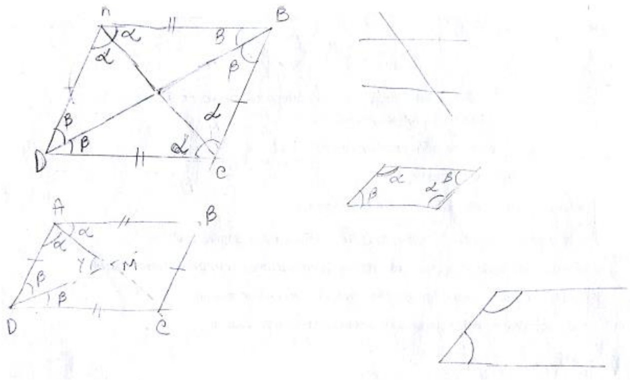
Fábio: *É com as bissetrizes que dividem o ângulo ao meio.*

Marina*: A bissetriz não é isso aqui?*

Fábio*: A gente estava fazendo errado mesmo. A gente estava fazendo com a diagonal. A diagonal não divide o ângulo ao meio.*

Bruna*: Agora a gente tem que procurar um que não dê certo.*

Fábio*: O paralelogramo normal, mas eu acho que vai dar certo com todos.*



Bruna*: Do mesmo jeito que você falou, pegando um ângulo de 60º.*

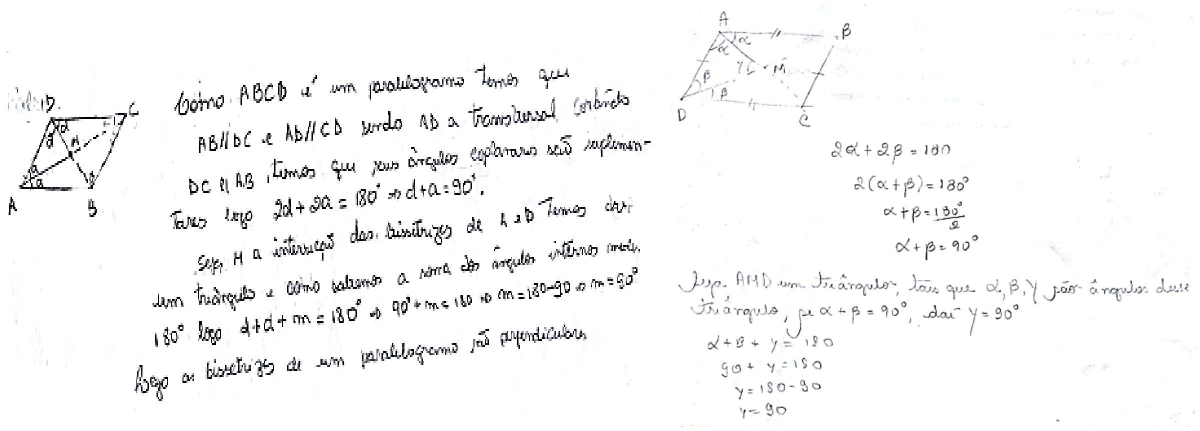
Marina*: Então aqui é 120º porque a soma tem que dar 360º.*

Marina*: Vai ter que provar.*

Fábio*: Vai ter que generalizar agora. A gente não pode dar mais medidas aos ângulos.*

Marina*: Chama α, α, β, β. Tem que ser medida arbitrária.*

Os alunos realizaram a seguinte demonstração:



Esta tarefa provocou comentários e conjecturas e culminou em uma demonstração. Os alunos tiveram que interpretar o enunciado, convertê-lo ao registro figural e conjecturar para decidir sobre o valor lógico da afirmação, o que os levou a vivenciar momentos de ação, formulação e validação.

Até chegarem ao resultado, os alunos cometeram equívocos, mudaram de estratégia e apenas partiram para a demonstração quando estavam certos de que a proposição era verdadeira.

De Villiers (2001) afirma que só partimos para uma demonstração quando sabemos que a propriedade que queremos demonstrar é válida. Portanto, a função de validação da demonstração não motiva o aluno a partir para uma prova e sim a busca de por que está correta.

Além das funções de validação e explicação, identificamos funções de comunicação e sistematização, pois os alunos sistematizaram suas ideias logicamente e redigiram a demonstração.

4 Considerações sobre os experimentos

Este estudo trata de demonstrações geométricas com alunos de um curso de licenciatura em matemática e se propôs a apresentar a fase experimental de um trabalho maior (FERREIRA, 2016), cujo principal objetivo foi elaborar, aplicar e analisar uma organização didática que permitisse minimizar as dificuldades dos alunos de licenciatura em matemática relativas ao tópico quadrilátero.

Apresentamos neste texto recortes das três etapas que compôs a parte experimental da pesquisa que foi desenvolvida com a intenção de envolver os alunos participantes em tarefas que os permitissem testar conjecturas, formularem e validaram suas hipóteses e socializarem e comunicarem seus resultados, mobilizando conhecimentos anteriores, como congruência de triângulos, teorema das paralelas e mediatriz de um segmento para reconstruir conhecimentos sobre quadriláteros.

Com as análises apoiadas na Teoria Antropológica do Didático, na Teoria dos Registros de representação Semiótica, de Duval juntamente com as formas de apreensões da figura proposta pelo mesmo autor, possibilitou simultaneamente analisar e minimizar os problemas de aprendizagem sobre quadriláteros.

A articulação entre os registros de representação (tratamento e conversão) nos permitiu verificar que o conhecimento dos alunos sobre quadriláteros se baseava na apreensão perceptiva, isto é, se confundiam os quadriláteros notáveis com sua representação.

Por ser um trabalho realizado no âmbito da educação matemática, julgamos pertinente distinguir os termos ‘prova’ e ‘demonstração’, e para isso consideramos a concepção de Balacheff (2000). Essa distinção, assim como os níveis de prova segundo o mesmo autor, foram fundamentais para classificar os tipos de provas realizados pelos alunos.

Diante das análises pudemos constatar que houve um avanço em termos de aprendizagem em relação aos conhecimentos geométricos, uma vez que ao final da terceira etapa os alunos já mobilizavam conhecimentos de mediatriz de um segmento, teorema das paralelas, congruência de triângulos, propriedades de quadriláteros, bissetriz e triângulo isósceles na validação da técnica utilizada; houve redução no uso de argumentos empíricos para validação das técnicas; os alunos parecem ter tomado consciência das limitações da apreensão perceptiva, passando a realizar interpretação discursiva da figura, o que evidencia a tomada de consciência do estatuto das figuras geométricas, dos axiomas, dos teoremas e das definições.

De acordo com Ferreira (2016), a análise das produções dos alunos mostra que houve uma evolução de provas pragmáticas para provas conceituais, e ainda que os alunos evoluíram na escrita da demonstração, já realizando algumas demonstrações bem estruturadas.

Esperamos que a comunicação dos resultados da pesquisa, por meio deste artigo, contribua para a formação inicial de professores e consequentemente, contribua para minimizar os problemas relacionados ao ensino e a aprendizagem de geometria.

Referências

ALMOULOUD, S.A.; MANRIQUE, A. L.; SILVA. M. J.F.; CAMPOS, T.M.M.A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, set – out – nov – dez, n. 027. Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação, pp. 94 – 108, São Paulo, 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf. Acesso 28/08/2015>.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: PIMM, D. (Ed.). **Mathematics Teachers and Children**. London: Hodder and Stoughton, 1988, p. 216-235.

BALACHEFF, N. Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), **Explanation and Proof in Mathematics.** Philosophical and Educational Perspectives (pp. 115-136). New York: Springer, 2010. Disponível em: <http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4419-0576-5_9#page-2>. Acesso em 12 de janeiro de 2013.

CHEVALLARD, Yves. El análisis de las prácticas docentes en la teoria antropológica de lo didáctico**. Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n.2, p. 221-266, 1999.
DE VILLIERS, M.D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Shetchpad. Tradução de Eduardo Veloso**. Educação e Matemática**, n. 62, p. 31-36, 2001. Disponível em < http://www.apm.pt/apm/revista/educ63/Para-este-numero.pdf>. Data de acesso: 20 de janeiro de 2013.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2009. p. 11-33.

______.**Ver e ensinar a Matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar**:** os registros de representação semióticas. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

______. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti, **Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem**. ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 7, n. 1, p.118-138, 2012.

JONES, K. Theoretical frameworks for the learning of geometrical reasoning. **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics**, 18(1&2), p. 29-34. University of London, London, 1998.

MAIOLI, M. **Uma oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros** 2002, 162f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

MAZIERO, L.M., **Quadriláteros**: Construções geométricas com o uso de régua e compasso, 2011, 88f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

Enviado 30/12/2018.
Aceito 06/04/2019.